L G
485

STADTBIBLIOTHEK AUGSBURG

Euklid's
Geometrie

oder

die sechs ersten Bücher der Elemente
nebst dem eilften und zwölften,

aus dem Griechischen übersetzt

von

Johann Friedrich Lorenz

nach der vierten Ausgabe sämmtlicher funfzehn Bücher
der Elemente.

Halle und Berlin,
in der Buchhandlung des Hallischen Waisenhauses.
1818.

Euklid's
Elemente
acht Bücher:
die sechs ersten, nebst dem eilften
und zwölften,

aus dem Griechischen übersetzt

von

Johann Friedrich Lorenz

---

nach der vierten Ausgabe sämmtlicher funfzehn Bücher
der Elemente.

Halle und Berlin,
in der Buchhandlung des Hallischen Waisenhauses.
1818.

1950·1386

Vorbericht.

Die erste Ausgabe dieser acht Bücher der Elemente des Euklides, des ersten bis sechsten und des eilften und zwölften Buchs, erschien im Jahre 1773 mit einer Vorrede von J. A. v. Segner, als ein Versuch einer neuen von dem sel. Lorenz unternommenen Verdeutschung. Da man sie zum Schulgebrauch zweckmäßig fand, so wurden auch dann, als die Uebersetzung sämmtlicher Elemente erschienen war, und bey den wiederholten Ausgaben derselben, besondere Abdrücke jener acht Bücher veranstaltet. Dies ist auch dieses Mal bey Bekanntmachung der vierten Ausgabe geschehen. Die Vorreden von Segner und Lorenz aber bleiben dieses Mal weg. Die Paralleltheorie, welche in ersterer vorgetragen ist, finden die Leser in den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie desselben Verfassers. Und der Empfehlungen des Euklides, welche den übrigen Theil jener Vorrede, einnehmen,

und

und die Hauptsache der ersten Lorenzischen ausmachen, bedarf es in einem zum Schulgebrauch bestimmten Buche jetzt nicht mehr. Euklides hat sich hinlänglich selbst empfohlen.

Wer übrigens sich näher über ihn, und über die Art, wie seine Geometrie ins Deutsche übergetragen hier erscheint, zu unterrichten wünscht, muß die der Ausgabe sämmtlicher Elemente vorgesetzte Einleitung nachsehen.

Leipzig, am 4ten Julius 1818.

Karl Brandan Mollweide.

Erklä=

Erklärung der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen.

$A = B$	Die Größe A ist der Größe B gleich.
$A > B$	Die A ist größer als die B.
$A < B$	Die A ist kleiner als die B.
$A \gtreqless B$	Die A ist entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die B.
	Wenn $A \gtreqless B$, so ist auch $C \gtreqless D$, d. i. wenn $A = B$, so ist auch $C = D$, wenn $A > B$, so ist auch $C > D$, wenn $A < B$, so ist auch $C < D$.
$A \sim B$	Die A ist der B ähnlich.
$A \cong B$	Die A ist gleich und ähnlich der B.
$A + B$	Was kommt, wenn B zu A hinzugethan wird.
$A - B$	Was bleibt, wenn B von A hinweggenommen wird.
ABC	Der Winkel, dessen Spitze B ist.
R.	Ein rechter Winkel.
$\triangle$ ABC	Der Triangel, dessen Spitzen, A, B, C, sind.
$\square$ AB	Das Quadrat der geraden Linie AB.
$A \times B$	Das unter den geraden Linien, A, B, enthaltene Rectangel.
$A : B$	Die Verhältniß der A zu der B.
	$A : B = C : D$, d. i. die A verhält sich zu B, wie C zu D.
	$A : C = (A : B) + (B : C)$, d. i. die Verhältniß, $A : C$, ist zusammengesetzt aus den beyden Verhältnissen, $A : B$ und $B : C$.
$2(A : B)$	Das Zwiefache der Verhältniß $A : B$.
$3(A : B)$	Das Dreyfache der Verhältniß $A : B$.

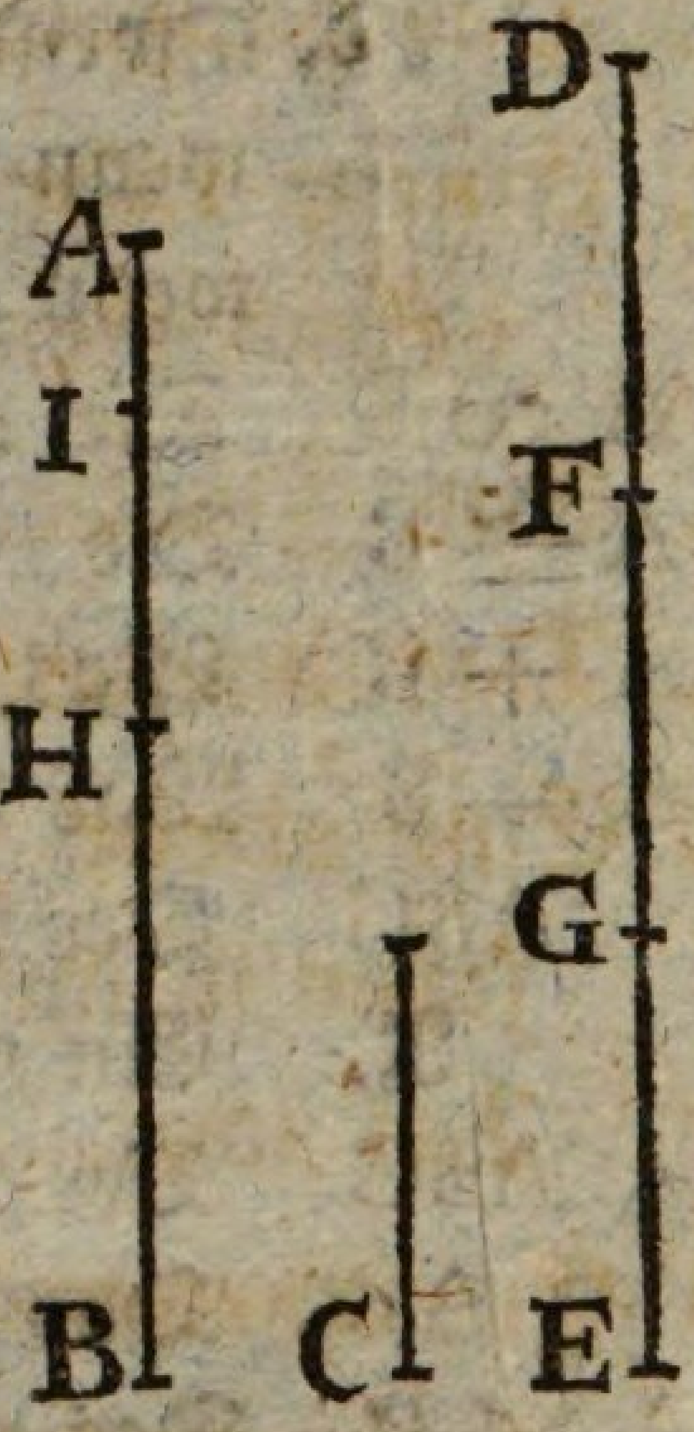
*) Bey

*) Bey den Citatis bedeutet E. Erklärung; F. Forderung; G. Grundsatz; S. Satz. Die Zahl des Buchs ist immer vorangesetzt, und durch ein Komma abgesondert.

**) Im zwölften Buche ist der einzige erste Satz aus dem zehnten Buche zum Grunde gelegt, der daher als ein Lehnsatz hier vorangeschickt werden muß.

X. Buch. 1. Satz.

Lehrsatz. Sind zwey ungleiche Größen, AB, C, gegeben, und man nimmt von der größern, AB, mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort: so kommt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe, C.



Mache, was immer angeht, von C ein Vielfaches DE, welches zunächst > AB ist, und theile solches in seine der C gleiche Theile, DF, FG, GE. Von AB nimm mehr als die Hälfte BH, von dem Reste AH mehr als die Hälfte HI, und dieß so fort, bis in AB so viele Abschnitte AI, IH, HB, als Theile in DE, sind.

Da also DE > AB ist, und von DE weniger als die Hälfte EG, von AB aber mehr als die Hälfte BH weggenommen wird: so ist der Rest GD > AH. Nun wird von GD die Hälfte GF, von AH aber mehr als die Hälfte HI, weggenommen. Folglich ist der Rest DF > AI, oder, weil DF = C ist, C > AI, folglich der Rest AI < C.

Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn in AB immer nur die Hälfte weggenommen wird.

Euklid's

Euklid's Elemente

Erstes Buch.

Erklärungen.

1. Ein **Punkt** ist, was keine Theile hat.
2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.
3. Das Aeußerste einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie** ist, welche zwischen jeden **in ihr** befindlichen Punkten auf einerley Art liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Das Aeußerste einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene Fläche (Ebene)** ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt.
8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweyer Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen, ohne in gerader Linie zu liegen.
9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade; so heißt derselbe ein **geradliniger Winkel.**
10. Steht eine gerade Linie auf einer andern so, daß sie gleiche Nebenwinkel macht; so heißt sie **perpendikular** auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein **rechter Winkel.**

11. Ein **stumpfer Winkel** heißt, der größer als ein rechter;

12. Ein **spitzer** aber, der kleiner als ein rechter ist.

13. **Gränze** heißt, was das Aeußerste eines Dinges ist;

14. **Figur**, was von einer oder mehrern Gränzen eingeschlossen wird.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene Figur von einer einzigen Linie, **Umring** oder **Umkreis** genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche an dieselbe, aus einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich sind.

16. Dieser Punkt heißt des Kreises **Mittelpunkt.**

17. Des Kreises **Durchmesser** ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, und an beyden Seiten von dem Umringe begränzte, gerade Linie, welche auch den Kreis halbirt.

18. Ein **Halbkreis** ist die Figur, welche vom Durchmesser, und dem durch ihn abgeschnittenen Umkreise eingeschlossen wird.

19. Ein **Kreisabschnitt** ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem Umkreise eingeschlossen wird.

20. **Geradlinige Figuren** sind, die von geraden Linien eingeschlossen werden, und zwar

21. **dreyseitige** (**Triangel**) die, welche von dreyen,

22. **vierseitige**, welche von vieren,

23. **vielseitige** (**Polygone**) die, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen werden.

24. Unter den **Triangeln** heißt derjenige **gleichseitig**, welcher drey gleiche Seiten hat;

25. gleich-

25. **gleichschenklig** aber, welcher nur zwey gleiche Seiten hat;
26. **ungleichseitig**, welcher drey ungleiche Seiten hat.
27. Ferner heißt unter den **Triangeln** derjenige **rechtwinklig**, welcher einen rechten Winkel hat;
28. **stumpfwinklig**, welcher einen stumpfen Winkel hat;
29. **spitzwinklig**, welcher drey spitze Winkel hat.
30. Unter den **vierseitigen Figuren** heißt diejenige ein **Quadrat**, welche gleichseitig und rechtwinklig ist;
31. ein **Oblongum**, welche zwar rechtwinklig, aber nicht gleichseitig ist;
32. ein **Rhombus**, welche zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist;
33. ein **Rhomboid**, deren einander gegenüberliegende Seiten und Winkel gleich sind, die aber weder gleichseitig, noch rechtwinklig ist.
34. Jede andere vierseitige Figur heißt **Trapez**.
35. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, und, soweit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Foderungen.

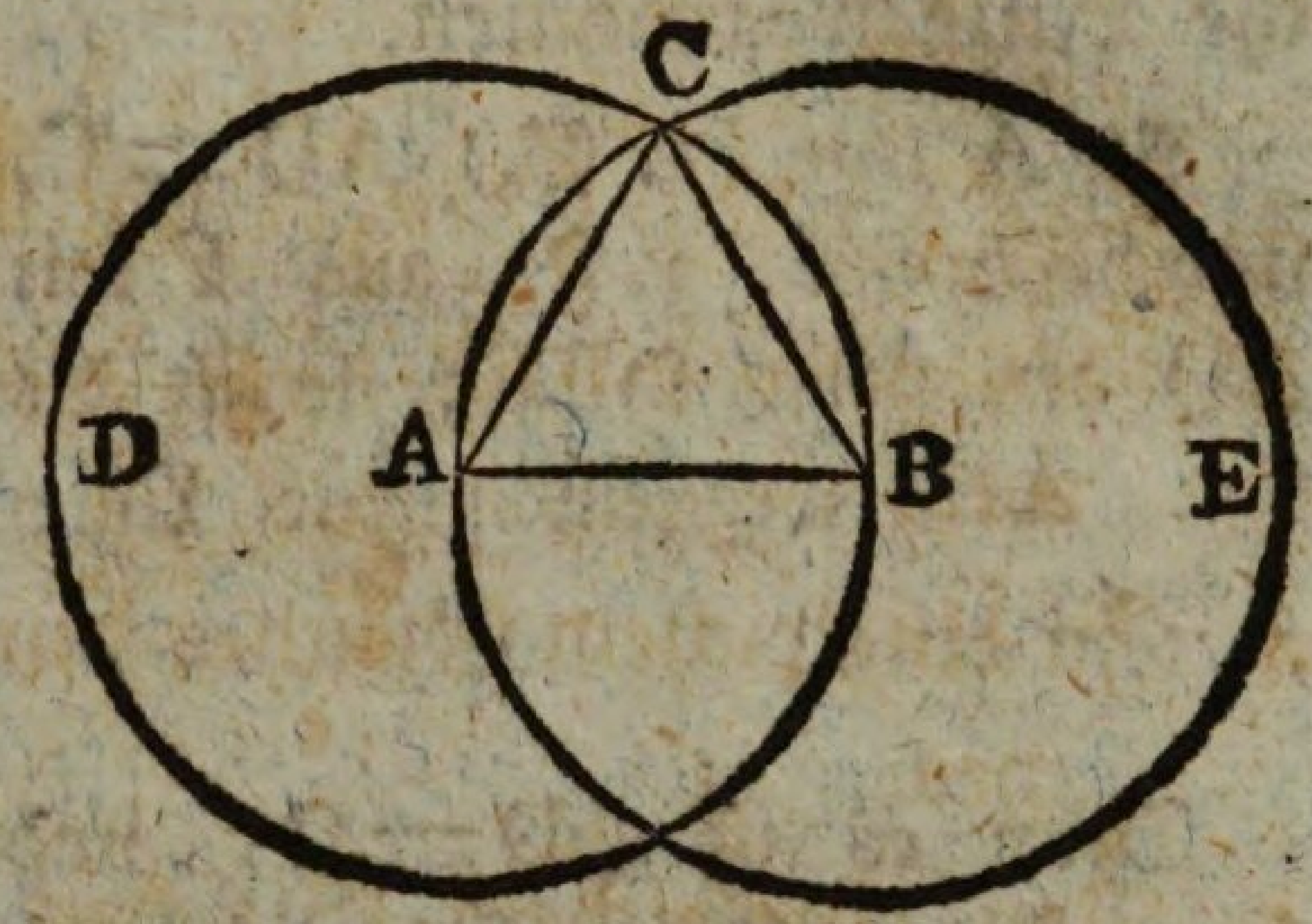
1. Man fodere, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen;
2. desgleichen, eine gerade begränzte Linie stetig gerade fort zu verlängern;
3. desgleichen aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze.

1. Was Einem und eben demselben gleich ist, ist selbst gleich.
2. Zu Gleichem Gleiches hinzugethan, bringt Gleiches.
3. Vom Gleichen Gleiches hinweggenommen, läßt Gleiches.
4. Zu Ungleichem Gleiches hinzugethan, bringt Ungleiches.
5. Von Ungleichem Gleiches hinweggenommen, läßt Ungleiches.
6. Gleiches verdoppelt, giebt Gleiches.
7. Gleiches halbirt, giebt Gleiches.
8. Was einander deckt, ist einander gleich.
9. Das Ganze ist größer als sein Theil.
10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.
11. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.
12. Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Der 1. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu errichten.

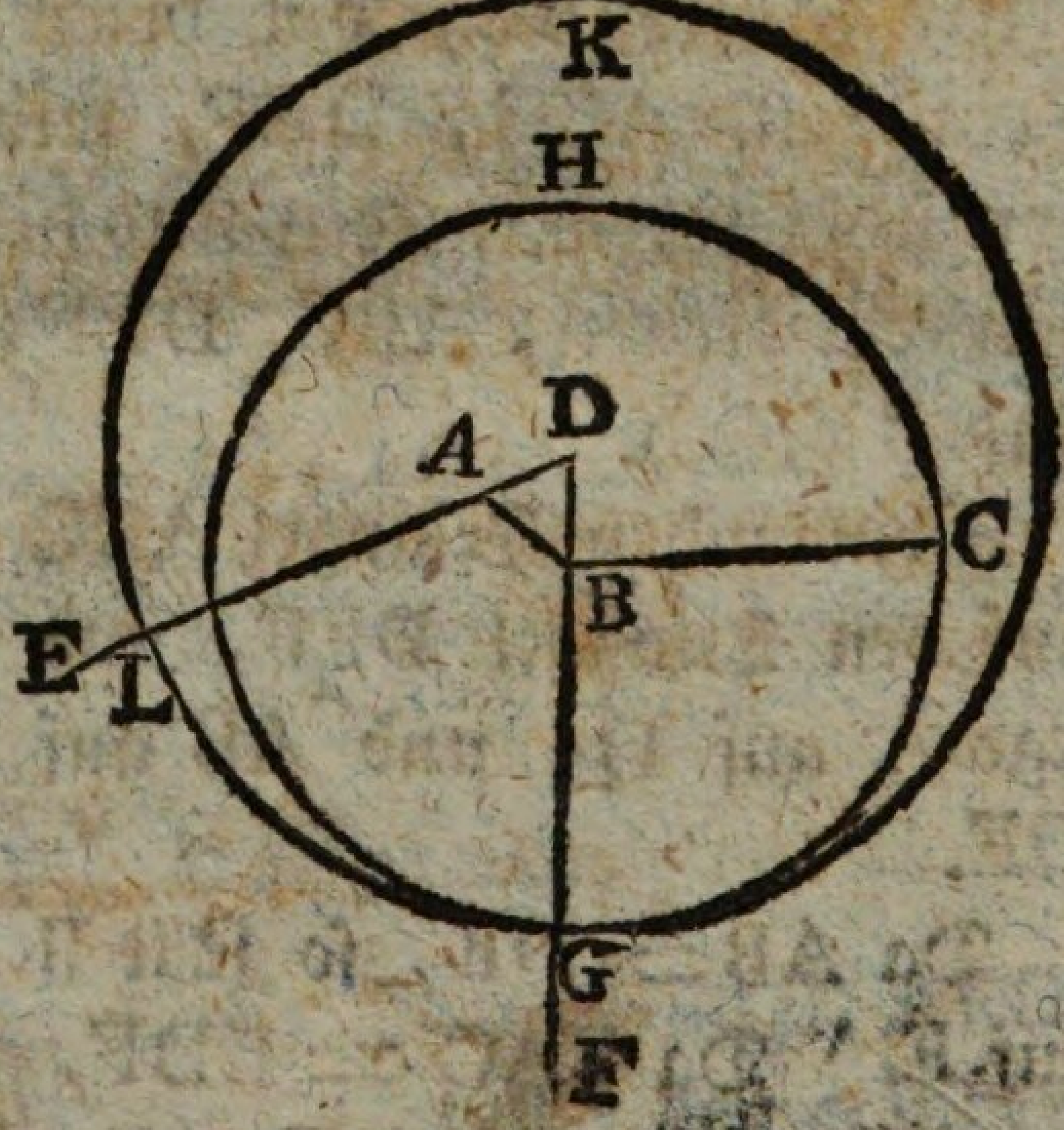


Aus dem Punkte A beschreibe (3. F.) mit AB den Kreis BCD, und aus dem Punkte B mit BA den Kreis ACE. Vom Punkte C, in welchem beyde Kreise einander schneiden, ziehe (1. F.) nach A, B, die geraden Linien CA, CB: so ist ACB der verlangte Triangel.

Denn da (15. E.) AC = AB, und BC = BA: so ist (1. G.) AC = BC. Demnach ist AC = AB = BC, folglich (24. E.) der auf AB errichtete △ CAB gleichseitig.

Der 2. Satz. Aufgabe.

An einen gegebenen Punkt, A, eine der gegebenen, BC, gleiche gerade Linie zu legen.



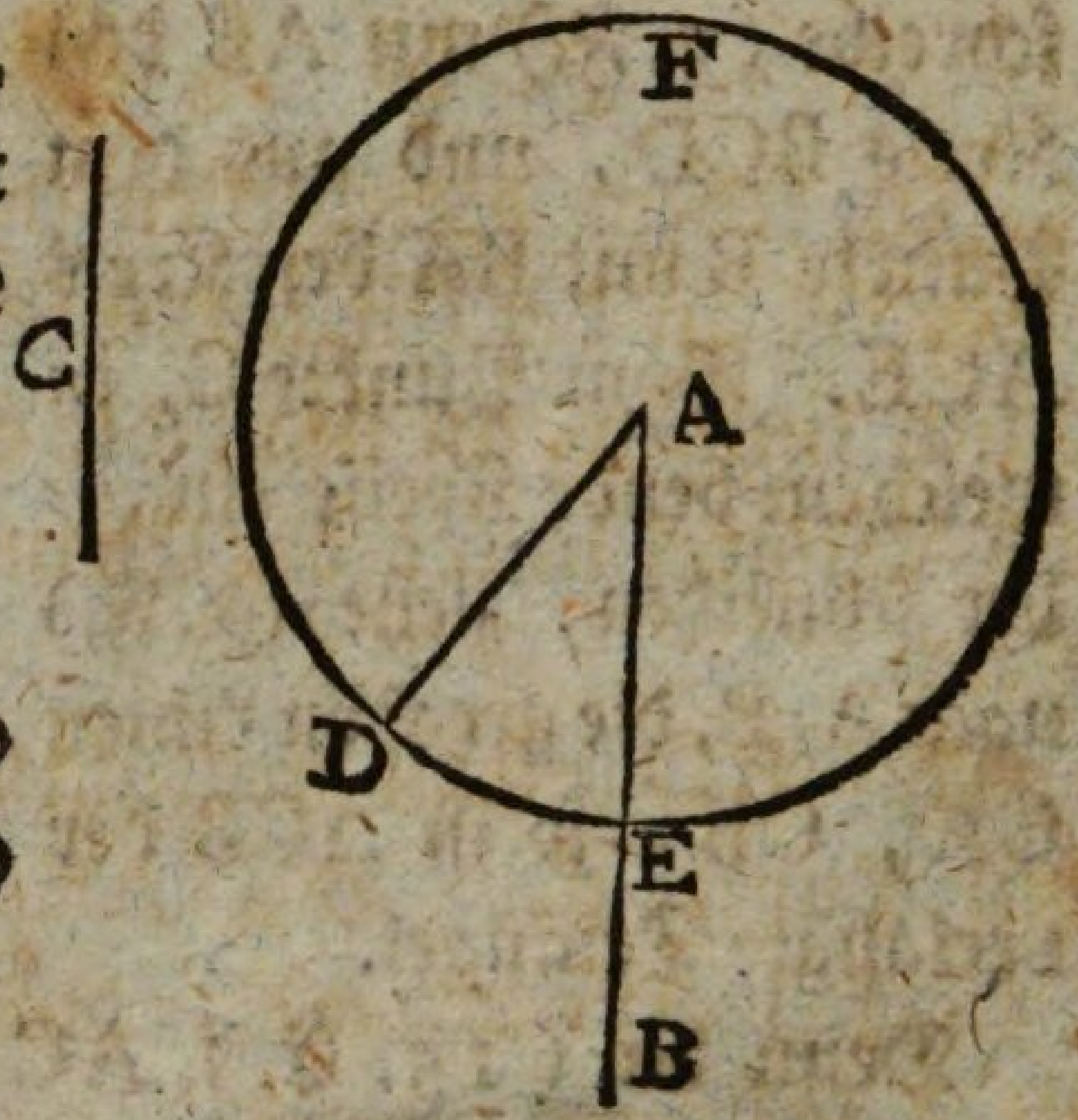
Ziehe von A nach B die gerade Linie AB. Auf dieser errichte (1. S.) den gleichseitigen Triangel DAB. Verlängerte (2. F.) die geraden Linien DA, DB, nach E, F. Aus B beschreibe (3. F.) mit BC den Kreis CGH, und aus D mit DG den Kreis GKL: so ist AL = BC an A gelegt.

Denn da (15. E.) DL = DG, und (24. E.) DA = DB: so ist (3. G.) AL = BG. Nun ist (15. E.) BC = BG. Folglich ist (1. G.) AL = BC.

Der 3. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey ungleiche gerade Linien, AB, C, gegeben; man soll von der größern, AB, eine der kleinern, C, gleiche Linie wegnehmen.

An A lege (2. S.) AD = C, und beschreibe (3. F.) aus A mit AD den Kreis DEF; so ist die von AB weggenommene Linie AE = C.

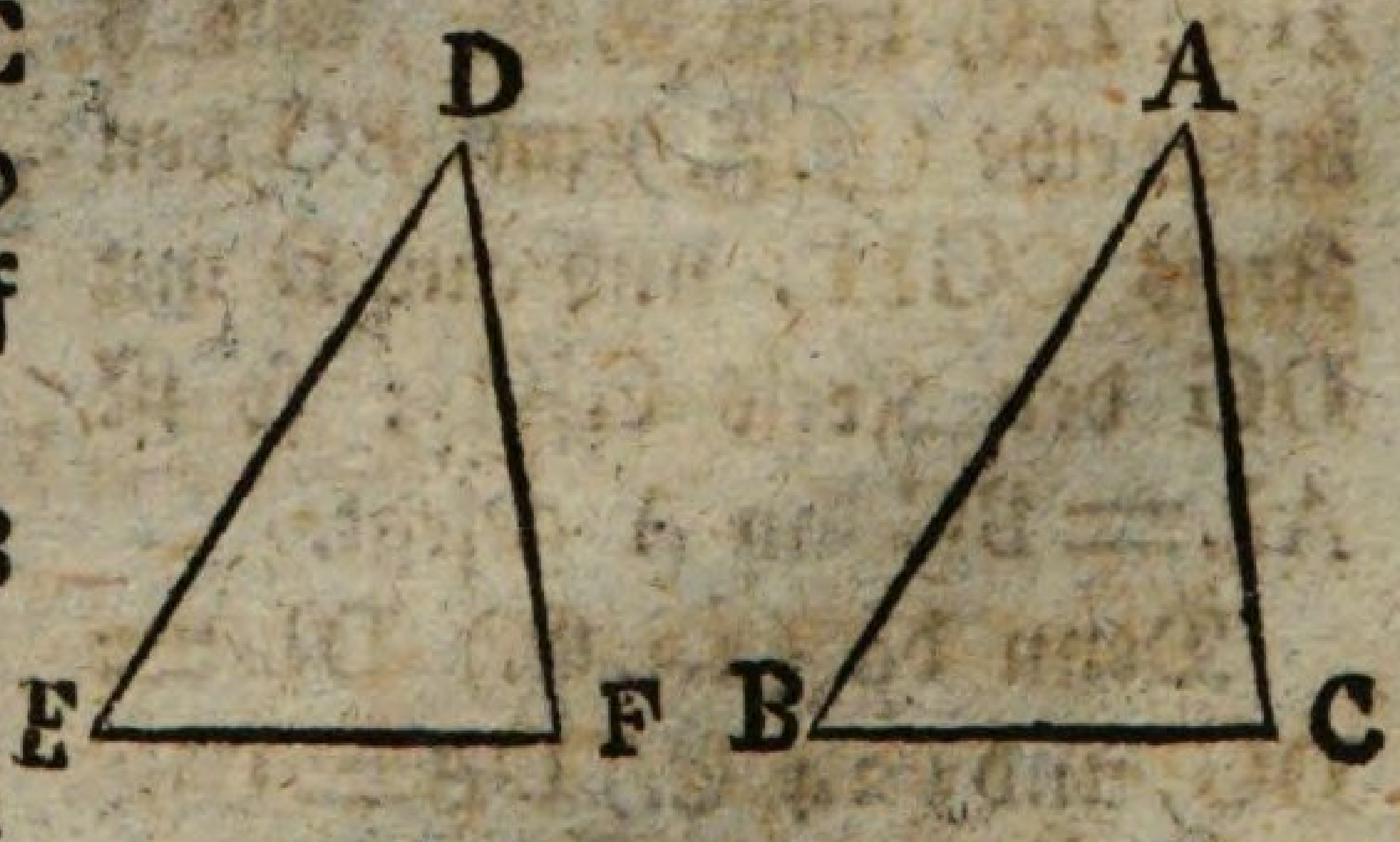


Denn es ist AD = C, und (15. E.) AD = AE, folglich (1. G.) AE = C.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind, (die AB der DE, die AC der DF) und ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen: so ist auch die dritte Seite BC, der dritten EF gleich; auch sind die Triangel, ABC, DEF, selbst einander gleich; und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, ABC, DEF; ACB, DFE, ebenfalls einander gleich.

Bringe den Triangel ABC auf den Triangel DEF, und lege A auf D, und AB auf DE.



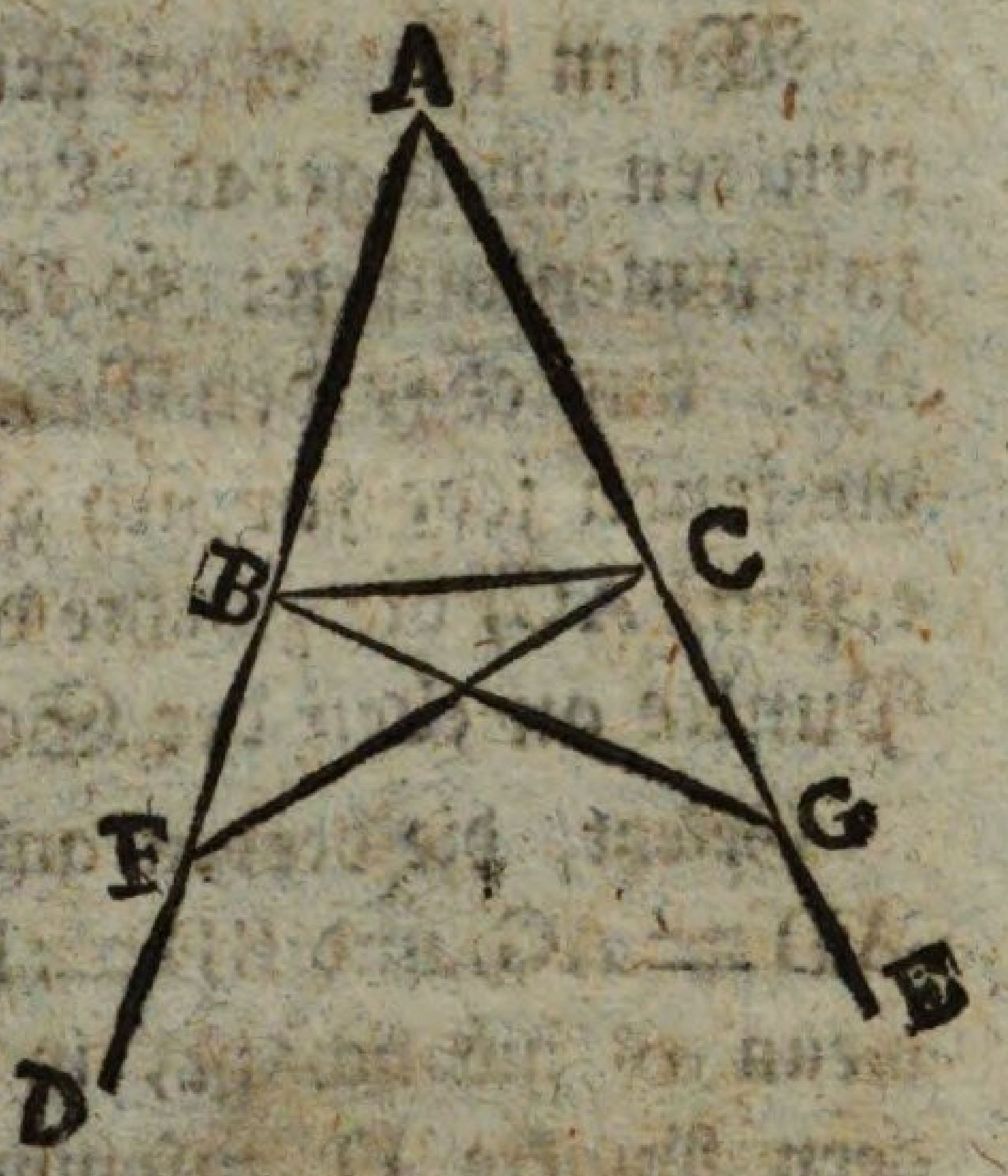
Da AB = DE, so fällt B auf E. Da BAC = EDF, so fällt AC auf DF. Da AC = DF, so fällt C auf F. Nun fällt nach Obigem auch B auf E. Folglich fällt BC auf EF. Denn sollte BC über

oder

oder unter EF fallen, so würden BC, EF, einen Raum einschließen, welches (12. G.) unmöglich ist. Folglich ist (8. G.) BC = EF; △ ABC = △ DEF; ABC = DEF; ACB = DFE.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

In jedem gleichschenkligen Triangel, ABC, sind die Winkel an der Grundlinie, ABC, ACB, einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel, AB, AC, verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.



Auf BD nimm willkührlich einen Punkt F. Von AE nimm (3. S.) AG = AF, und ziehe FC, GB.

In den △ △ ACF, ABG, ist AF = AG, und AC = AB, auch der Winkel bey A beyden gemein; folglich (4. S.) FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB. Nun ist, weil AF = AG und AB = AC, (3. G.) BF = CG. Demnach ist (in den △△ FBC, GCB) BF = CG, FC = GB, AFC = AGB. Folglich ist (4. S.) BCF = CBG, und FBC = GCB, das ist, die Winkel unter der Grundlinie sind gleich.

Da ABG = ACF, und CBG = BCF: so ist (3. G.) ABC = ACB, das ist, die Winkel an der Grundlinie sind gleich.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

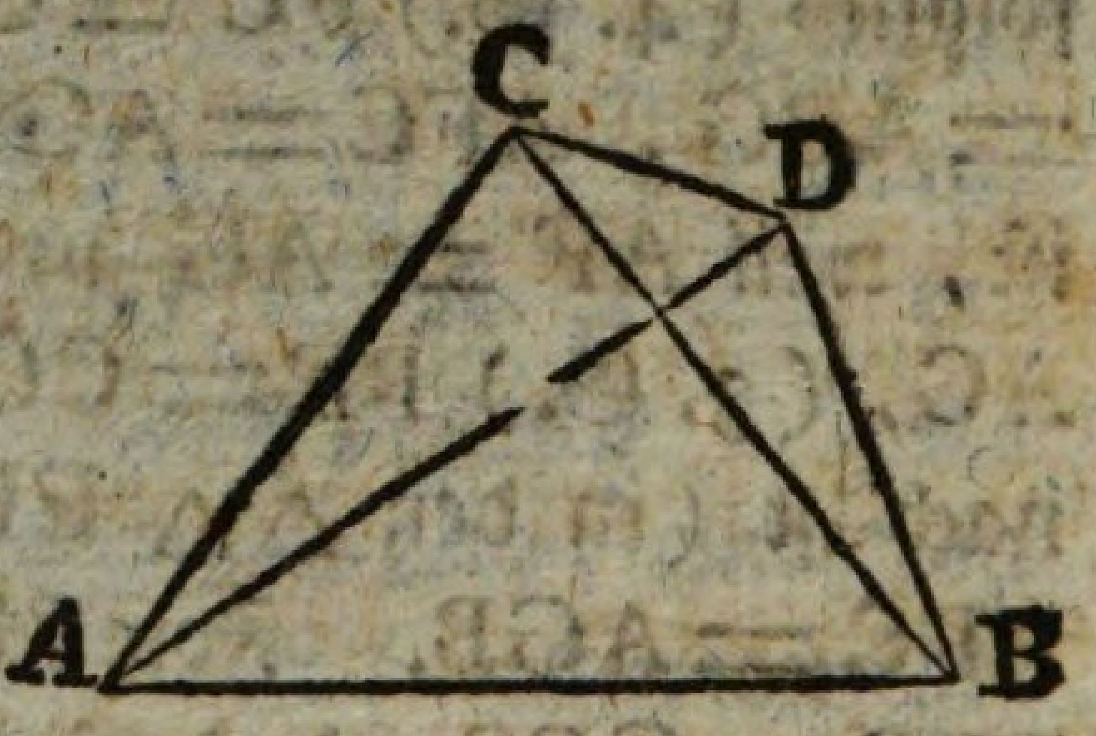
Wenn in einem Triangel, ABC, zwey Winkel, ABC, ACB, einander gleich sind: so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten, AC, AB, einander gleich.

Wären AC, AB, ungleich, so wäre eine davon größer, etwa AB. Es sey daher (3. S.) BD = AC. Ziehe DC.

In den Triangeln ABC, DBC, wäre demnach BD = CA, BC beyden gemein, und DBC = ACB; folglich (4. S.) △ DBC = △ ABC, welches (9. G.) unmöglich ist. Demnach können AC, AB nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wenn über einer geraden Linie, AB, aus ihren Endpunkten zwey gerade Linien, AC, BC, in einem Punkte, C, zusammenlaufen: so können nicht über derselben Linie, AB, aus eben den Punkten, zwey andere gerade Linien, die jenen jede für sich gleich sind, (die erste nämlich der ersten, AC, die zweyte der zweyten, BC) in einem andern Punkte an eben der Seite zusammenlaufen.



Gesetzt, die beyden andern Linien AD = AC, und BD = BC, liefen, wenn es möglich ist, in einem andern Punkte D zusammen. Ziehe CD.

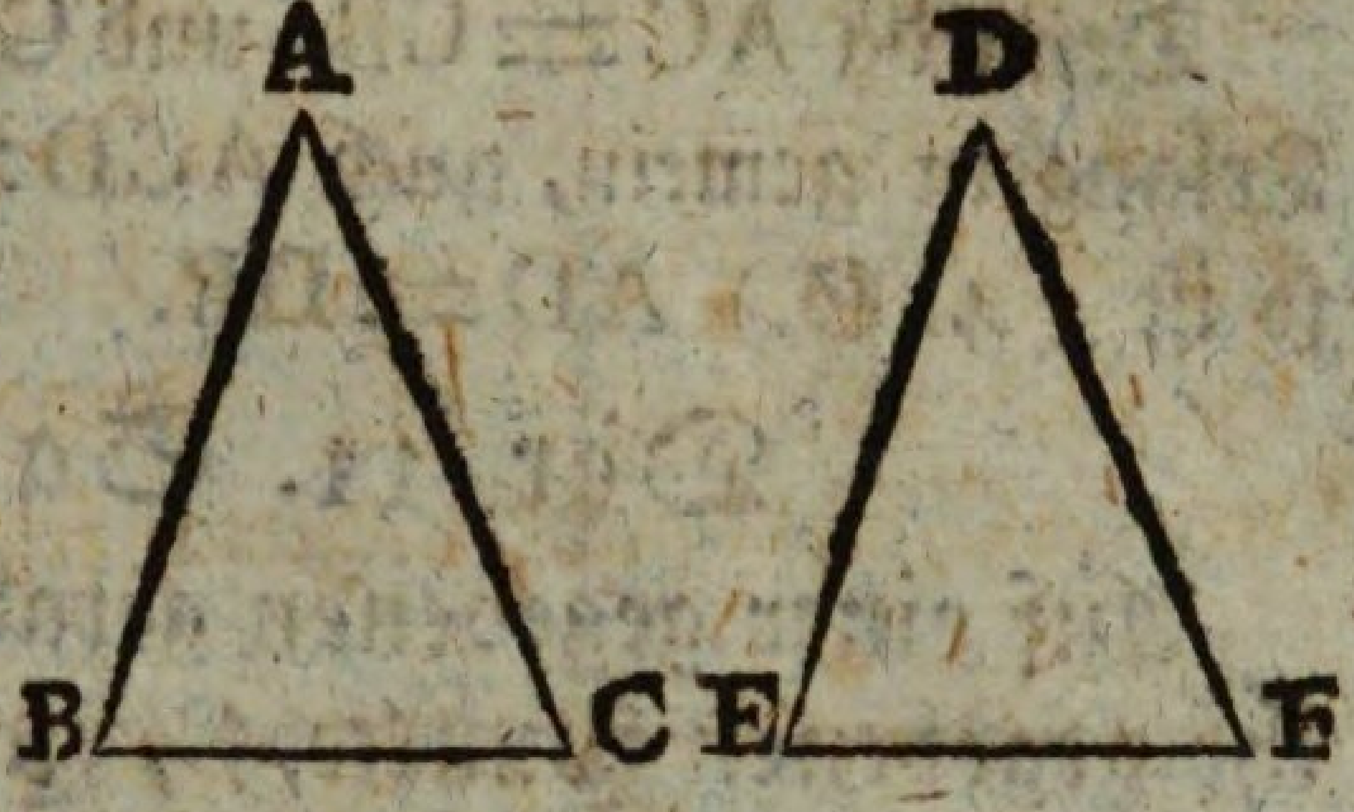
Da AD = AC, so ist (5. S.) ADC = ACD, folglich (9. G.) ADC > BCD, folglich noch vielmehr BDC > BCD. Da aber auch BD = BC, so wäre (5. S.) BDC = BCD, welches mit dem Vorigen unmöglich bestehen kann.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn man den Punkt D innerhalb des △ CAB annähme.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind,

sind, (die AB der DE, die AC der DF) und die dritte Seite, BC, der dritten, EF, gleich ist: so ist auch ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschließen.

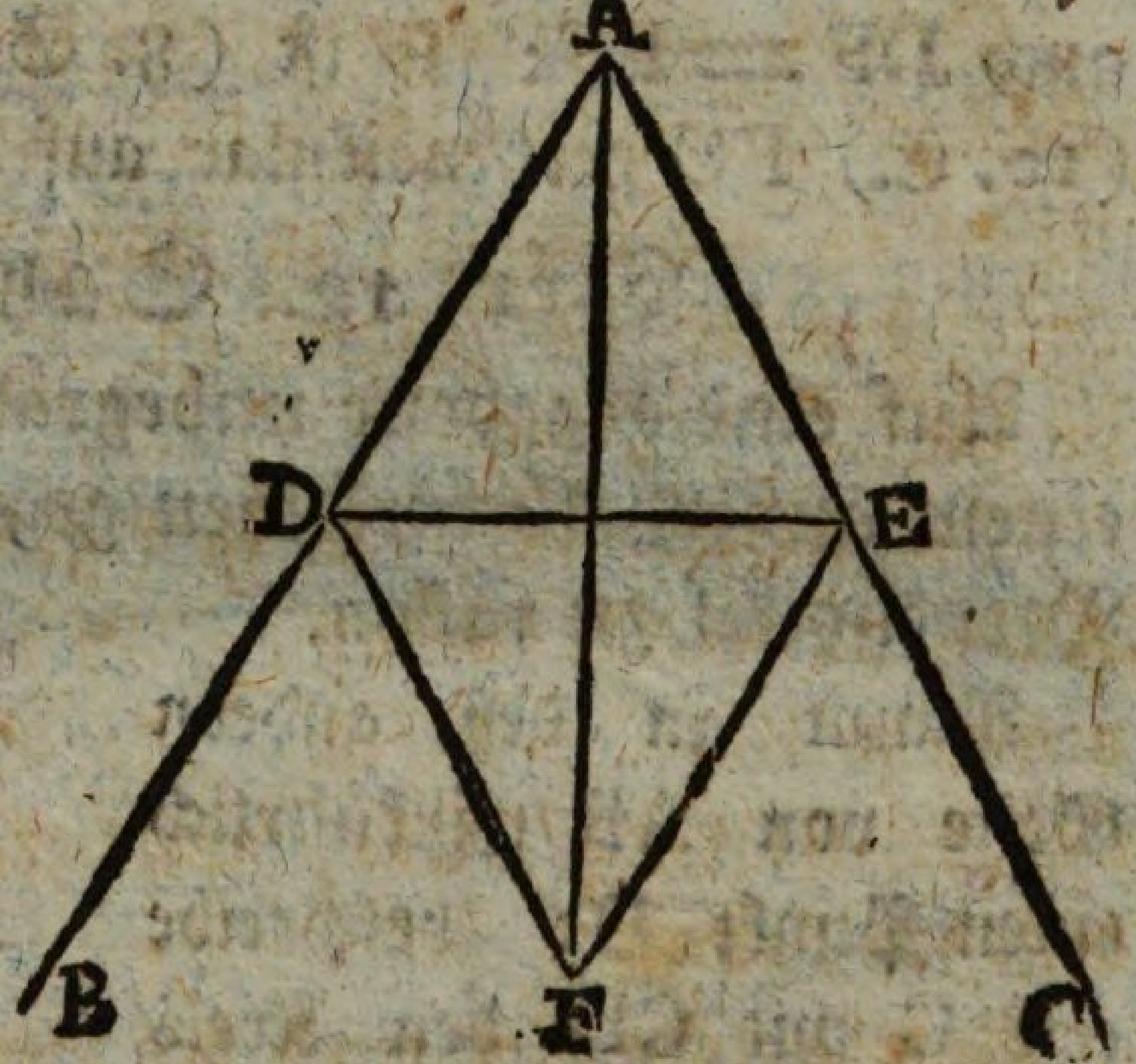


Bringe den Triangel ABC auf den △ DEF, und lege B auf E, und BC auf EF.

Da BC = EF, so fällt C auf F. Nun ist BA = ED, und CA = FD. Folglich fällt (7. S.) A auf D, und daher BA auf ED, und CA auf FD. Folglich ist (8. G.) CAC = EDF.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel, BAC, zu halbiren.

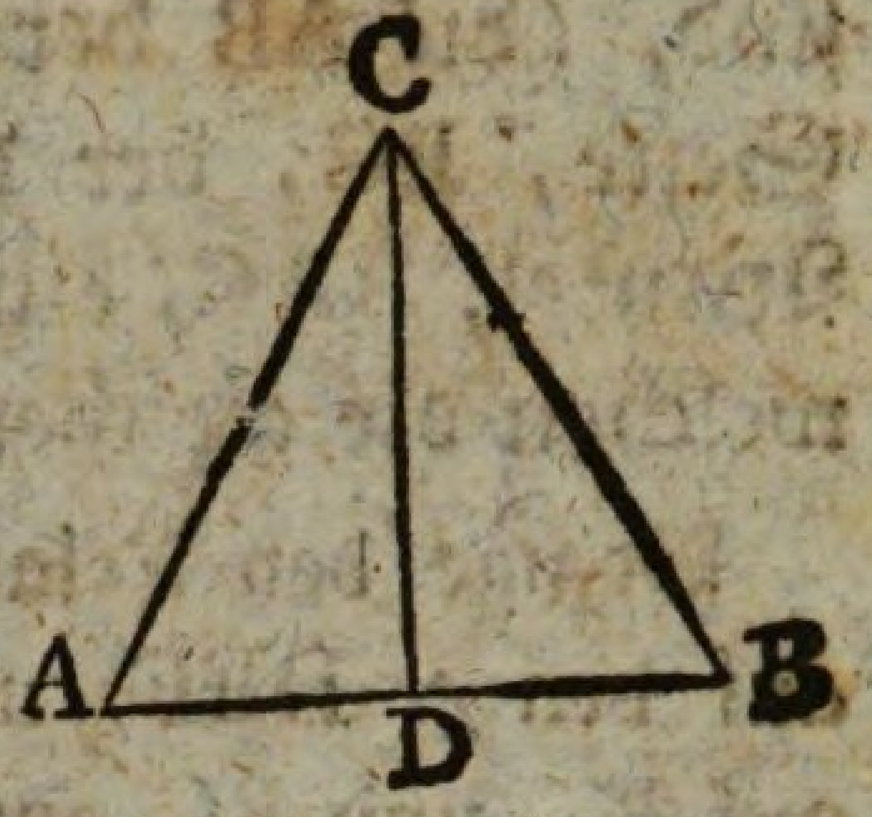


Auf AB nimm willkührlich den Punkt D. Von AC nimm (3. S.) AE = AD. Ziehe DE, und errichte (1. S.) auf derselben den gleichseitigen △ DEF. Ziehe AF: so halbiret diese den Winkel bey A.

Denn da DA = AE, auch AF beyden Triangeln gemein, und DF = FE: so ist (8. S.) DAF = EAF.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie, AB, zu halbiren.

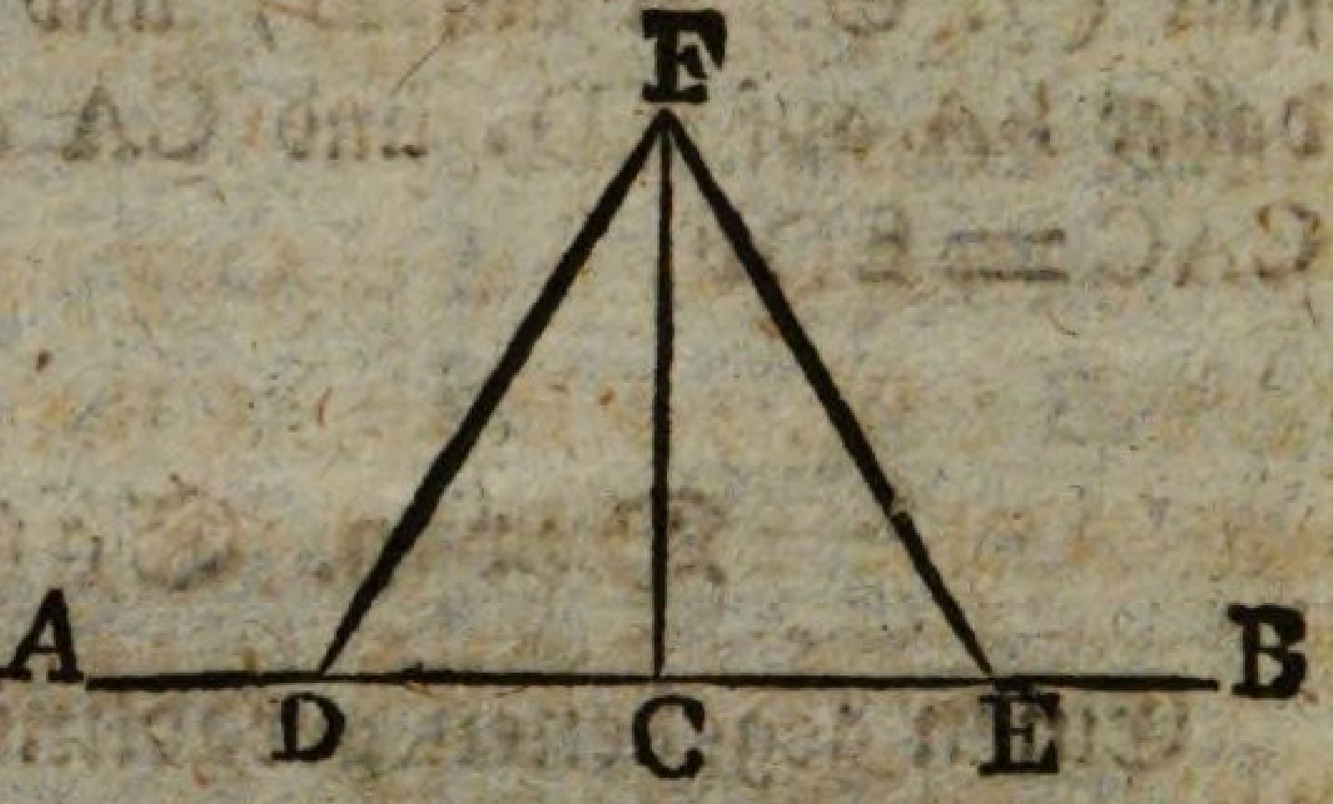


Auf AB errichte (1. S.) den gleichseitigen △ ABC. Halbire (9. S.) den Winkel ACB mit CD: so wird die AB in D halbiret.

Denn da AC = CB, und CD beyden Triangeln gemein, auch ACD = BCD: so ist (4. S.) AD = DB.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, in einem in ihr gegebenen Punkte, C, einen Perpendikel zu errichten.

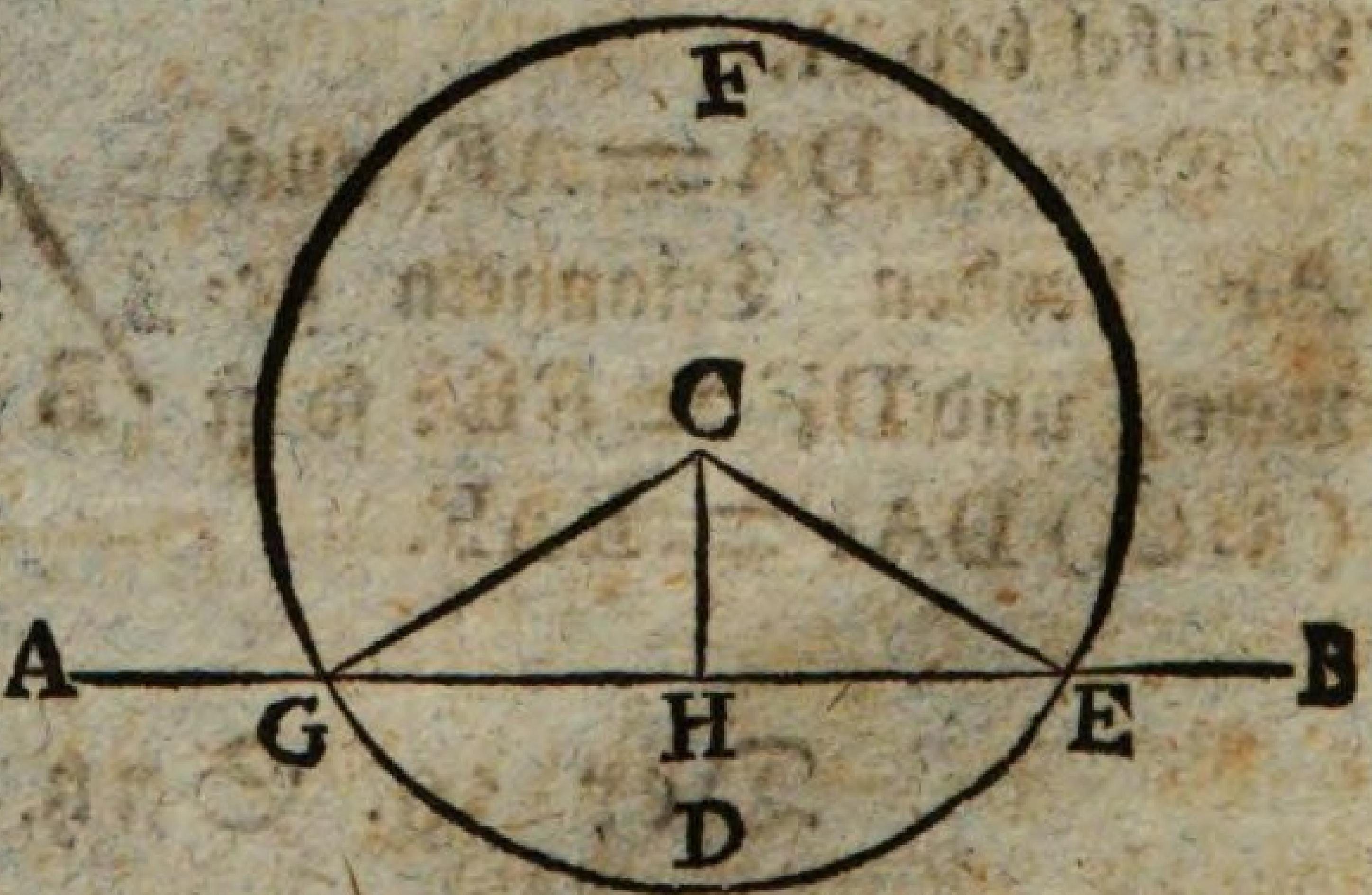


Auf AC nimm willkührlich einen Punkt D. Von CB nimm (3. S.) CE = CD. Auf DE errichte (1. S.) den gleichseitigen △ FDE, und ziehe FC: so ist diese perpendikular auf AB im Punkte C.

Denn da CD = CE, und CF beyden Triangeln gemein, auch DF = EF: so ist (8. S.) DCF = FCE, folglich (10. E.) FC perpendikular auf AB.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene unbegränzte gerade Linie, AB, von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte, C, einen Perpendikel zu fällen.



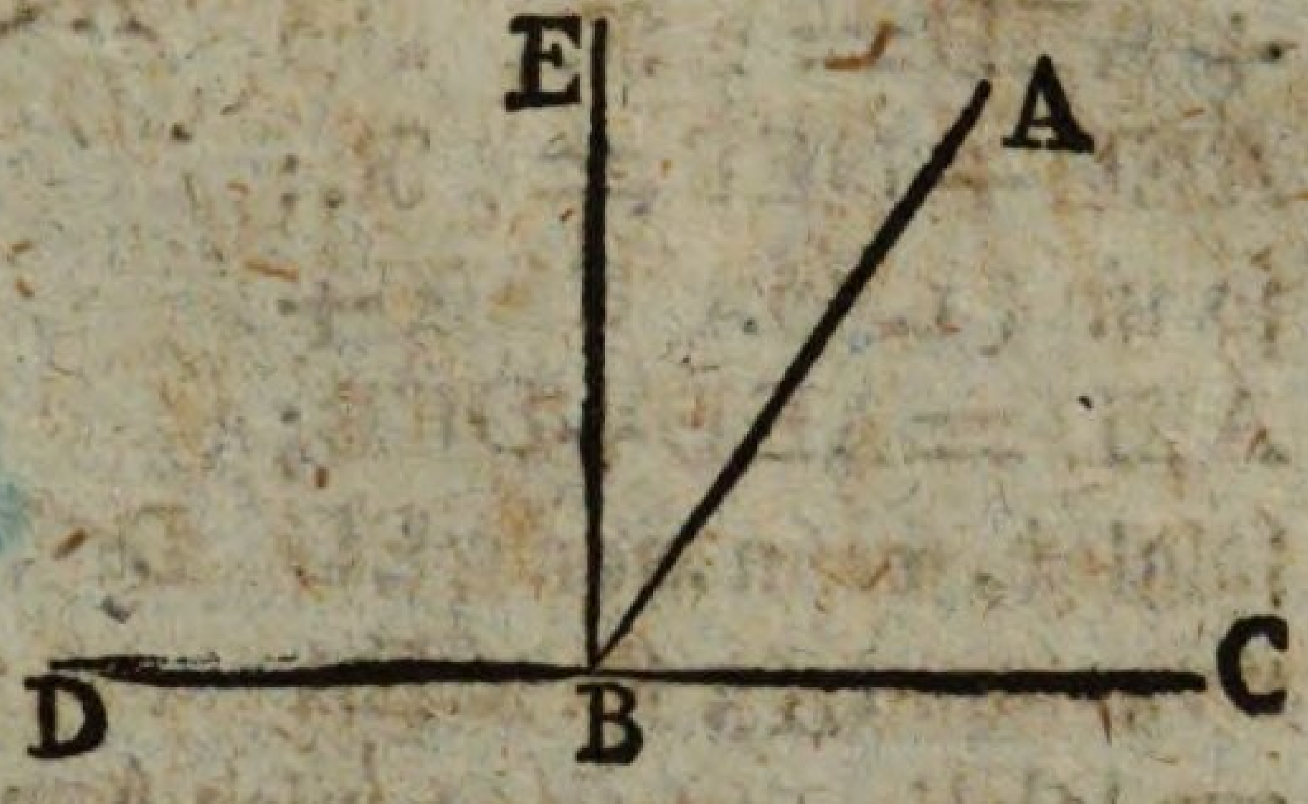
Nimm an der andern Seite von AB willkührlich einen Punkt D; beschreibe aus C mit CD den Kreis EFG; halbire (10. S.) GE in H, und ziehe CH: so ist diese perpendikular auf AB.

Denn ziehet man CG, CE, so ist GH = HE, CH gemeinschaftlich, und (15. E.) GC = CE; folglich (8. S.) GHC = CHE; folglich (10. E.) CH perpendikular auf AB.

Der

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Die Winkel, welche eine gerade Linie, AB, die auf einer andern, CD, stehet, macht, sind entweder zwey rechte, oder zwey rechten gleich.

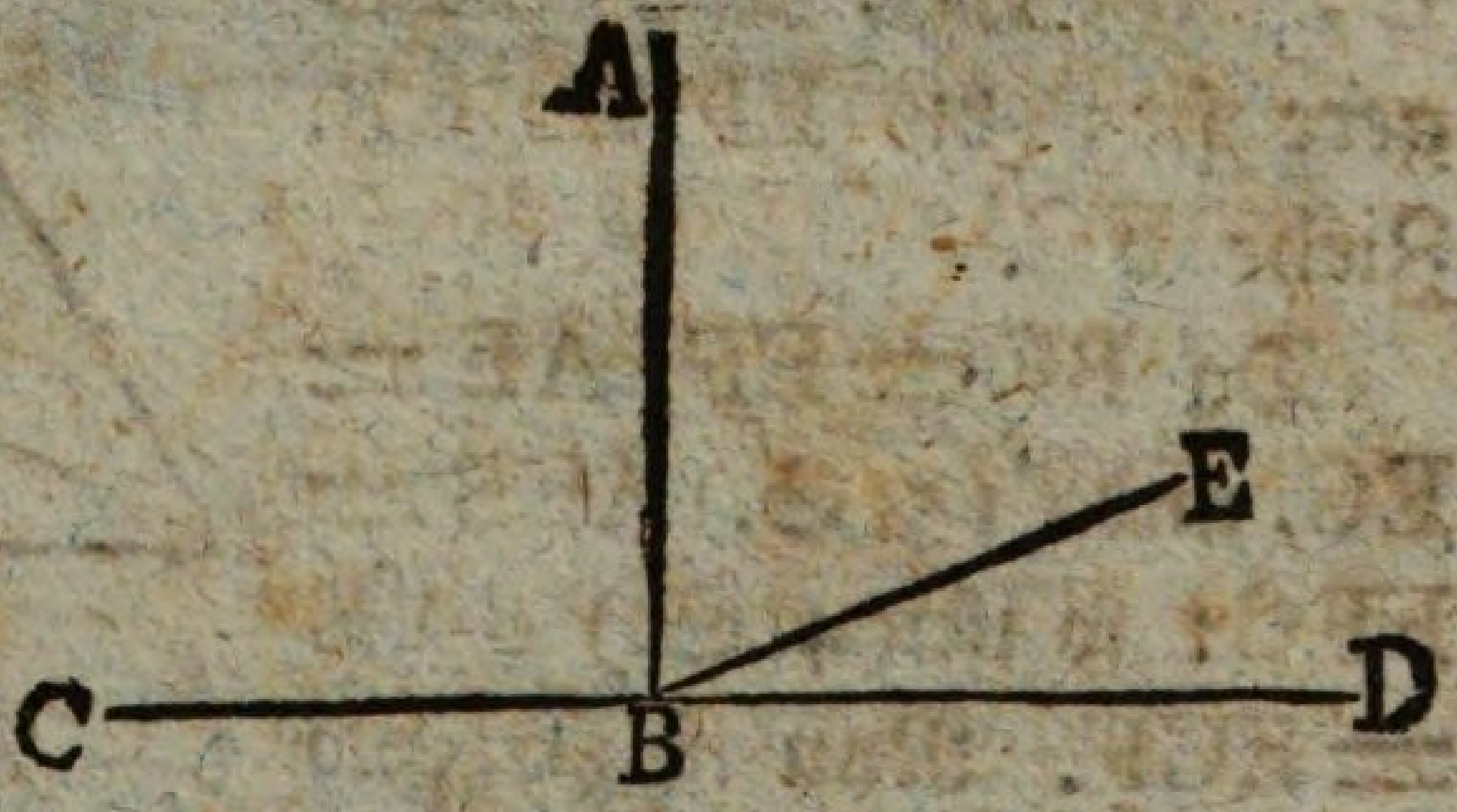


Sind diese Winkel einander gleich, so sind sie (10. E.) zwey rechte. Sind sie aber ungleich, wie ABC, ABD: so errichte (11. S.) auf CD in B den Perpendikel BE. Folglich sind (10. E.) CBE, EBD zwey rechte Winkel.

Da CBE = CBA + ABE, so ist, wenn EBD hinzukommt (2. G.) CBE + EBD = CBA + ABE + EBD. Eben so, weil ABD = DBE + EBA, ist ABD + CBA = DBE + EBA + CBA. Folglich ist (1. G.) ABD + CBA = CBE + EBD, das ist = 2 R.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

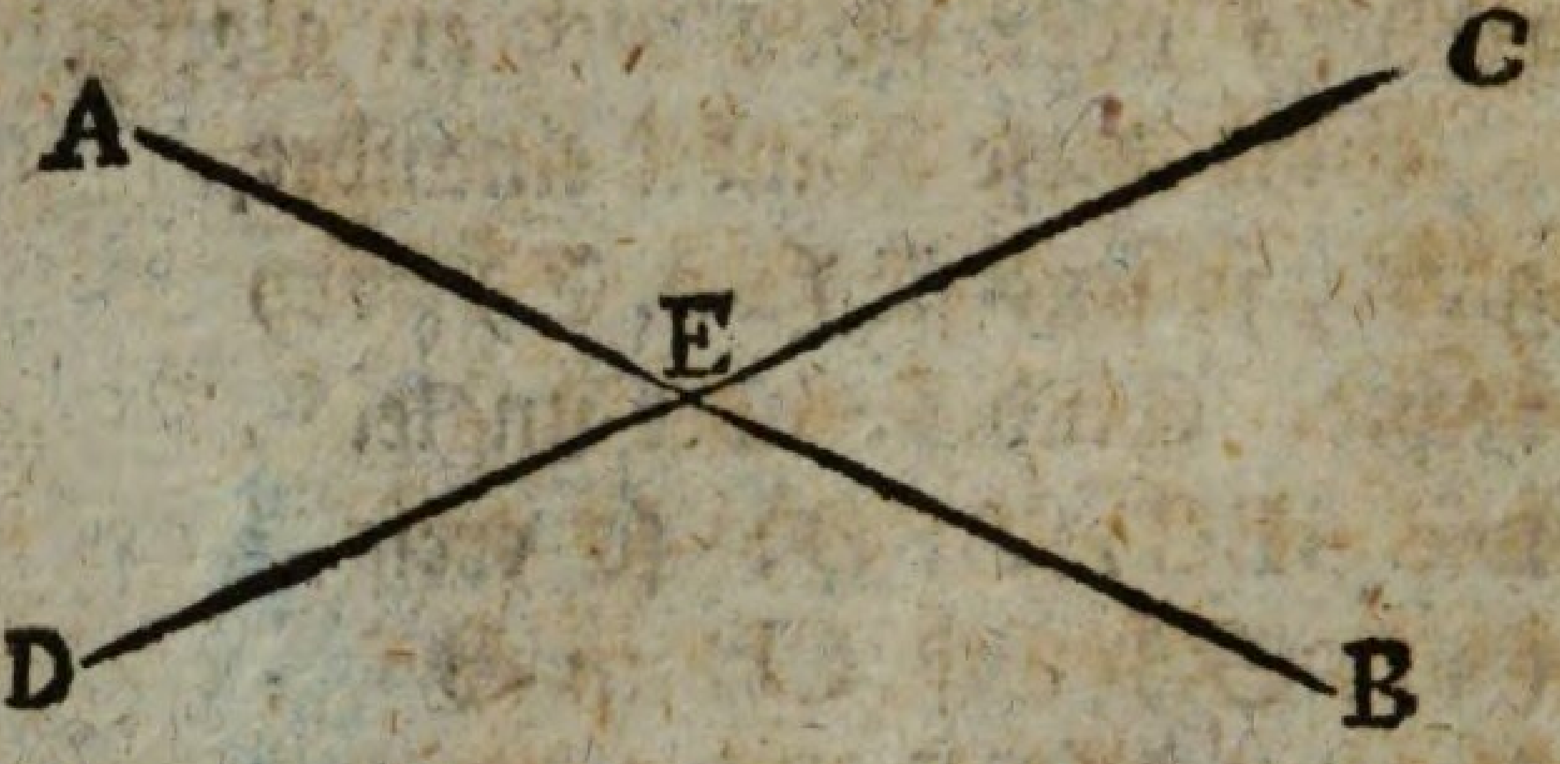
Machen mit einer geraden Linie, AB, in eben demselben Punkte, B, zwey andere, nicht an einerley Seite liegende gerade Linien, BC, BD, Nebenwinkel, CBA, DBA, welche zwey rechten Winkeln gleich sind: so liegen diese Linien in gerader Linie, CBD, an einander.



Wäre CBD keine gerade Linie, so sey es irgend eine andere, welche man will, etwa CBE. Folglich ist (13. S.) ABC + ABE = 2 R. Nun ist auch angenommen ABC + ABD = 2 R. Folglich ist (1. G.) ABC + ABE = ABC + ABD, folglich, wenn man ABC wegnimmt (3. G.) ABE = ABD, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist CBE keine gerade Linie, und aus eben den Gründen auch keine andere außer CBD. Folglich ist CBD eine gerade Linie.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel, CEA, DEB, CEB, AED.



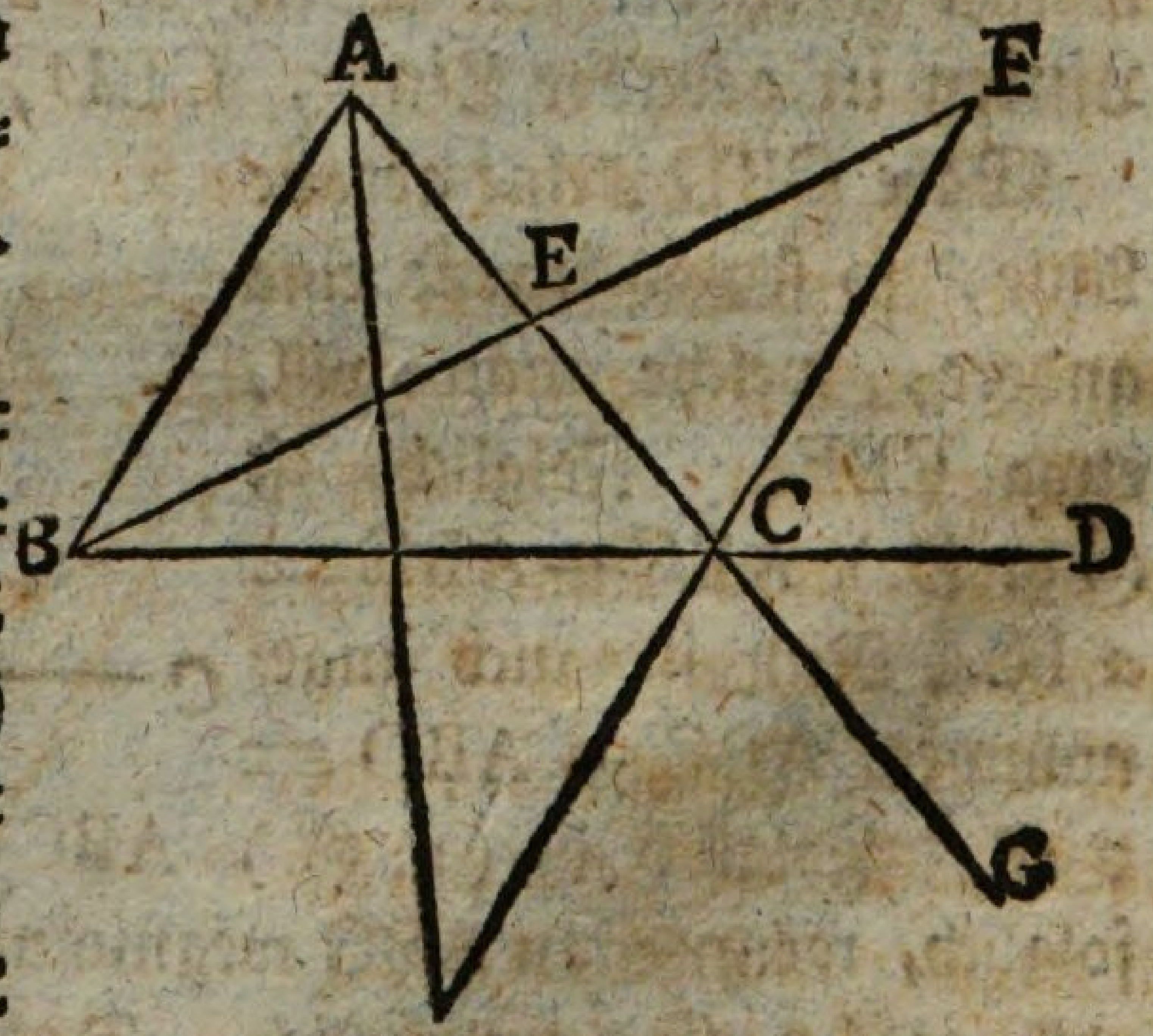
Da (13. S.) CEA + AED = 2 R., und AED + DEB = 2 R.: so ist (1. G.) CEA + AED = AED + DEB; folglich, wenn man AED wegnimmt, (3. G.) CEA = DEB. Eben so wird bewiesen, daß CEB = AED.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn gerade Linien, so viel ihrer seyn mögen, einander schneiden, alle Winkel an dem Durchschnittspunkte zusammen vier rechten Winkeln gleich sind.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

An jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der äußere Winkel, ACD, größer, als jeder der ihm gegenüber liegenden innern Winkel, CBA, BAC.



Halbire (10. S.) AC in E, ziehe BE, und verlängere sie, bis EF = EB. Ziehe FC.

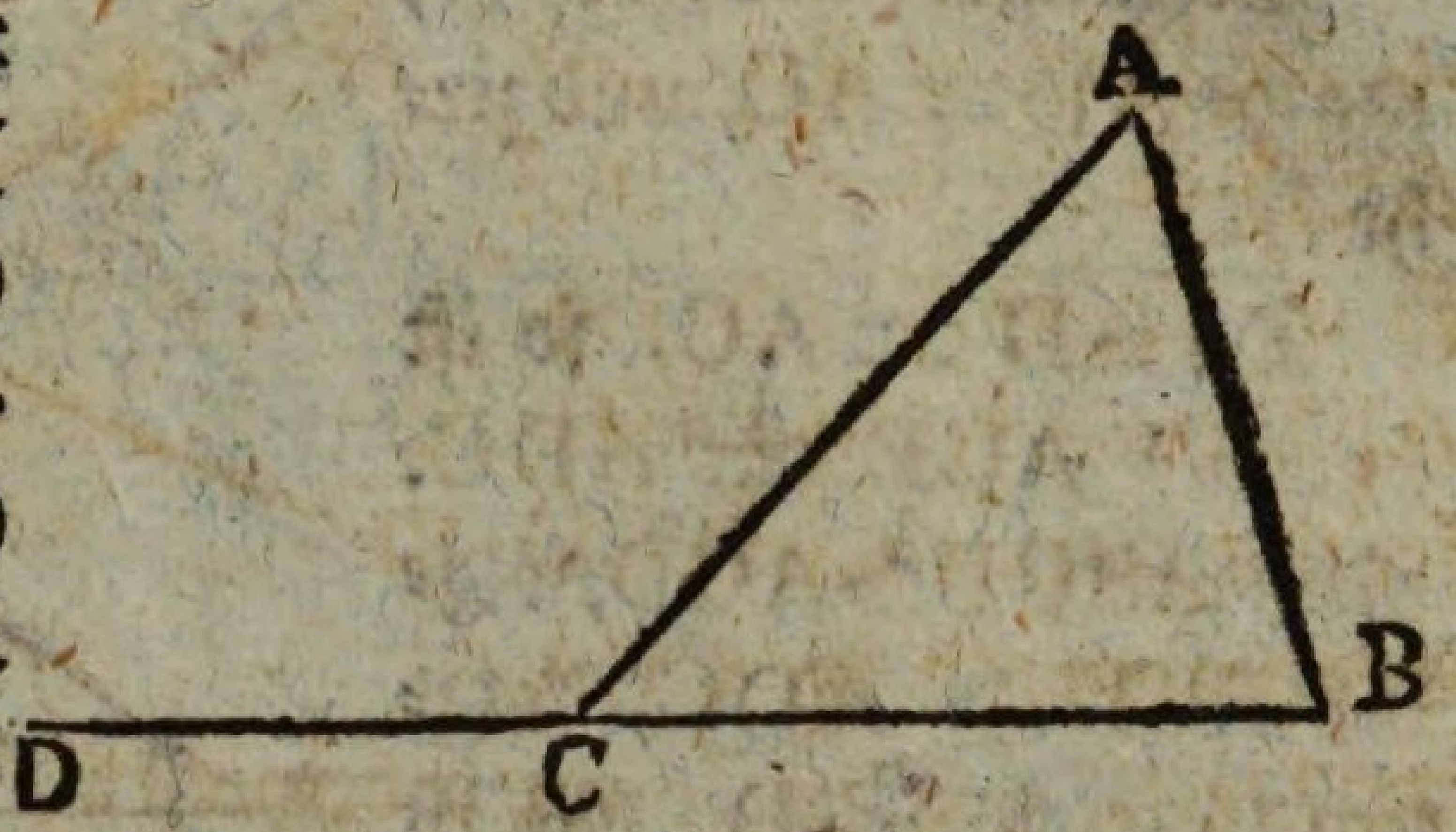
Da BE = EF, AE = EC, und (15. S.) AEB = FEC: so ist (4. S.) BAE = ECF. Nun ist (9. G.) ACD > ECF. Folglich ist ACD > BAE.

Eben so wird auch BC halbiret, und, nachdem AC nach G verlängert worden, bewiesen, daß BCG, das ist (15. S.) ACD > CBA.

Der

Der 17. Satz. Lehrsatz.

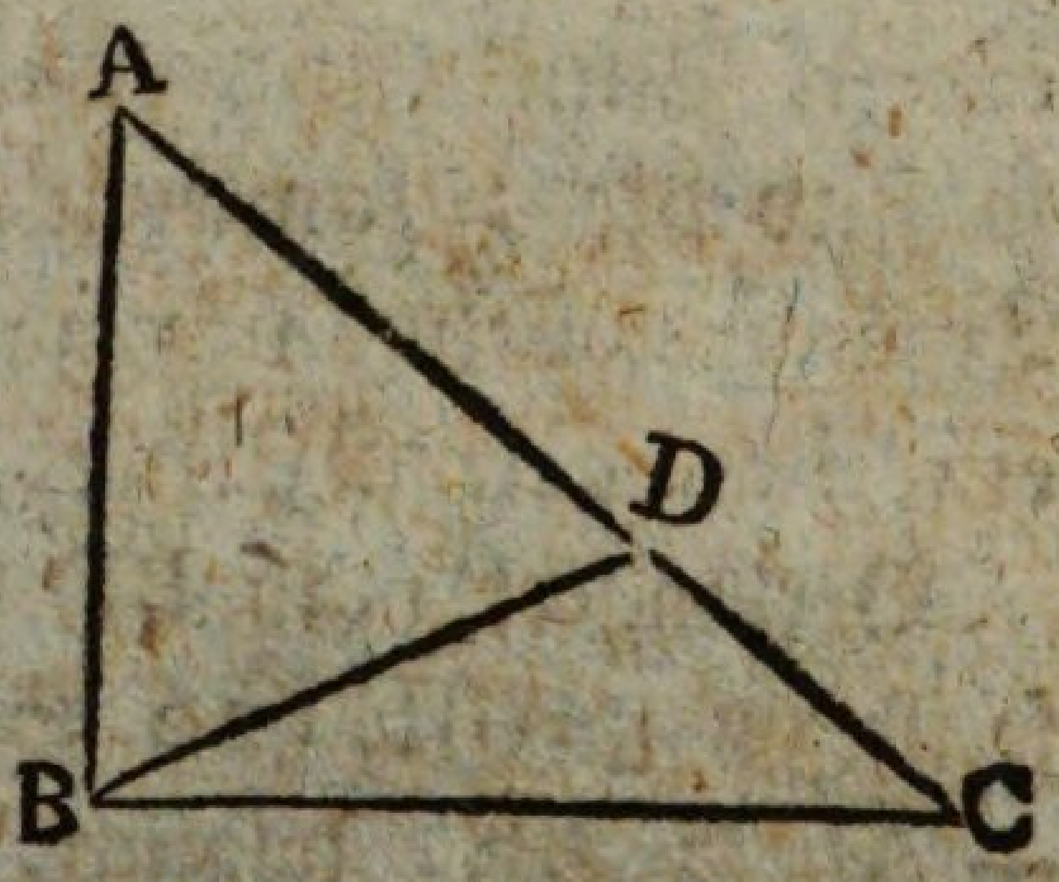
In jedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte.



Verlängere BC nach D: so ist (16. S.) $ABC < ACD$, folglich (4. G.) $ABC + ACB < ACD + ACB$. Nun ist (13. S.) $ACD + ACB = 2$ R. Folglich ist $ABC + ACB < 2$ R. Eben so wird dieses von $BAC + ACB$ und von $CAB + ABC$, bewiesen.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

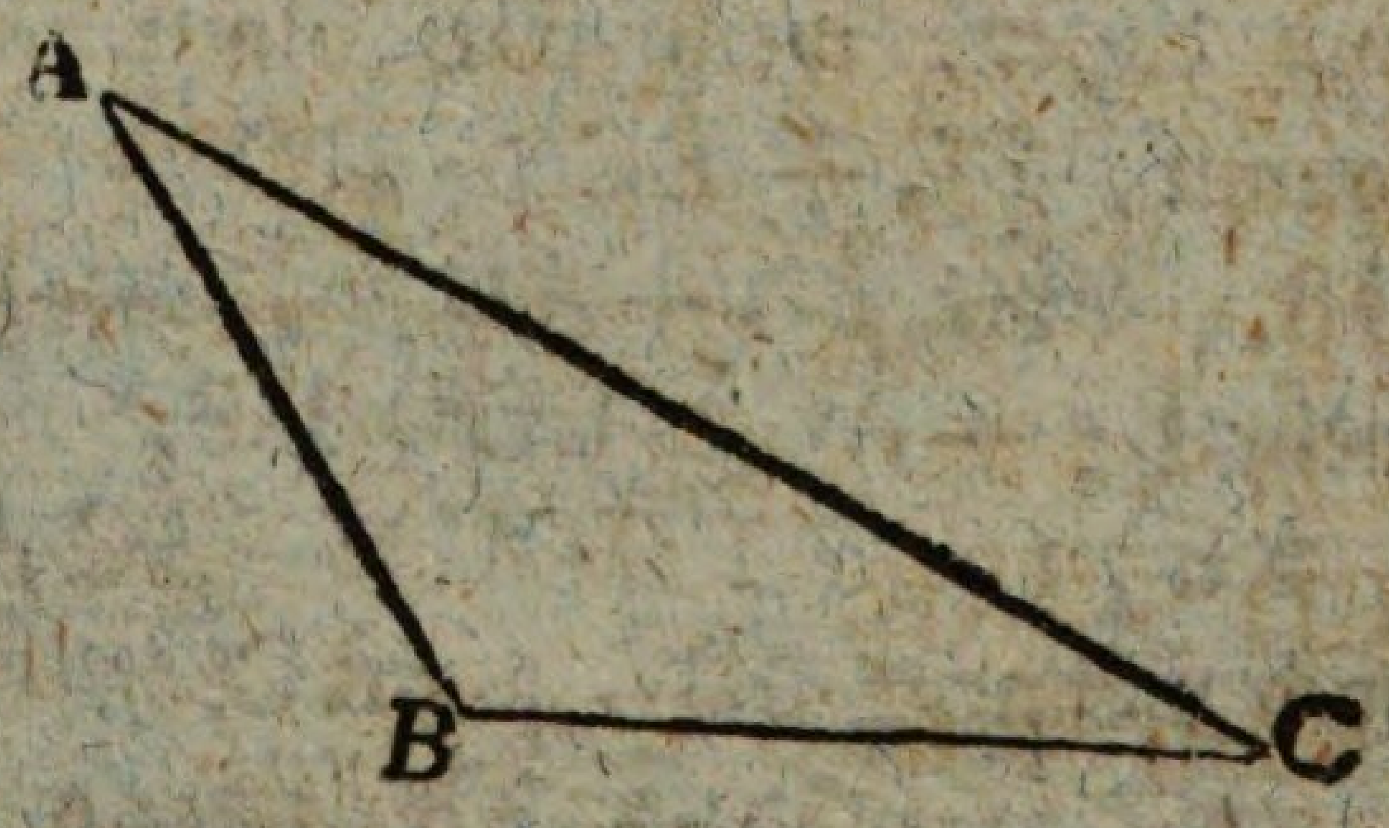
In jedem Triangel, ABC, liegt der größern Seite, AC, auch der größere Winkel, ABC, gegenüber.



Da $AC > AB$: so mache (3. S.) $AD = AB$, und ziehe BD: so ist (5. S.) $ADB = ABD$. Nun ist (16. S.) $ADB > ACB$. Folglich ist auch ABD, also noch mehr ABC, $> ACB$.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

In jedem Triangel, ABC, liegt dem größern Winkel, ABC, auch die größere Seite, AC, gegenüber.

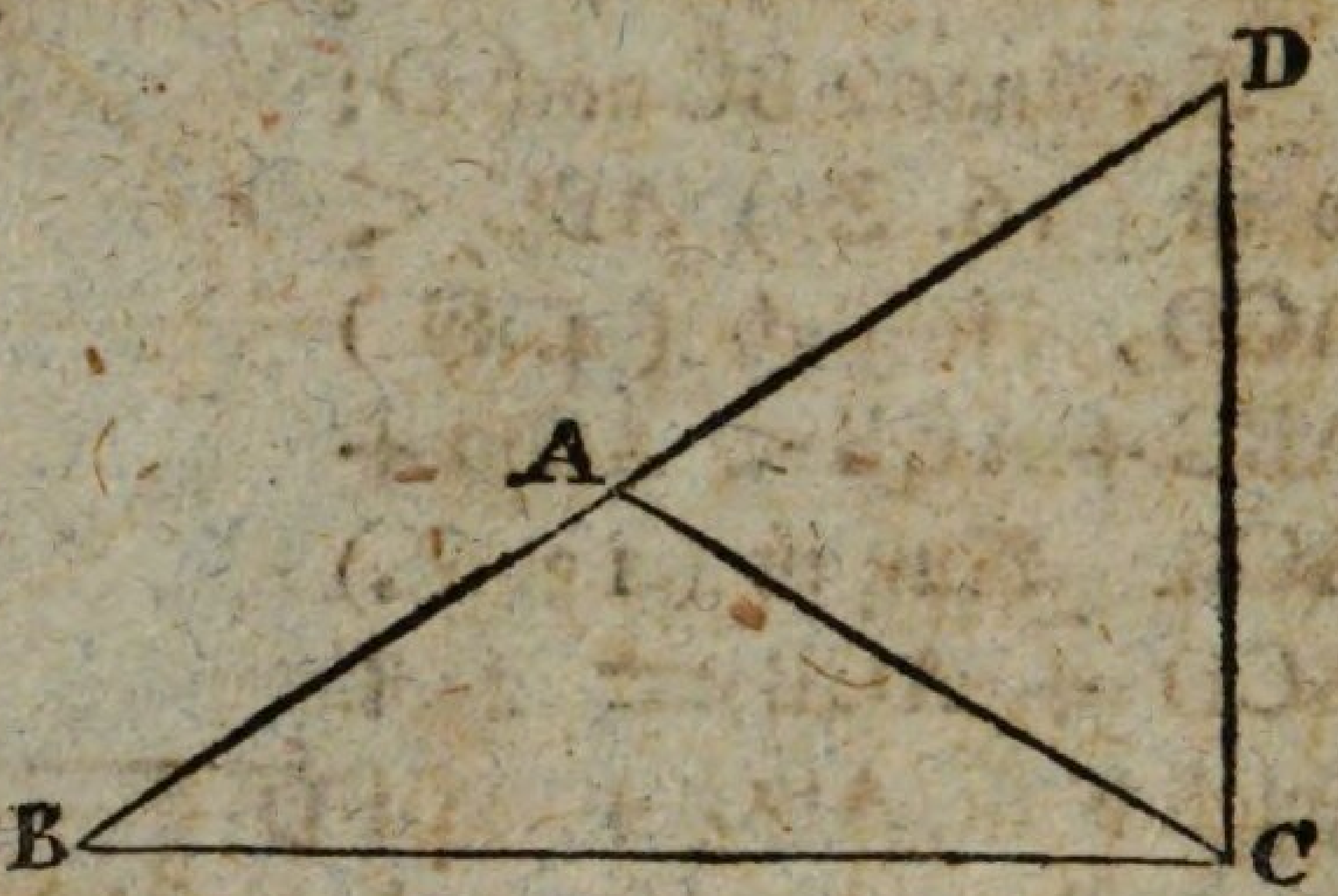


Wäre nicht $AC > AB$: so müßte man annehmen, entweder $AC = AB$, oder $AC < AB$. Im ersten Falle wäre (5. S.) $ABC = ACB$, im zweyten (18. S.) $ABC < ACB$; welches beydes dem Angenommenen, $ABC > ACB$, offenbar widerspricht. Folglich ist $AC > AB$.

Der

Der 20. Satz. Lehrsatz.

In jedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Seiten zusammen größer, als die dritte.

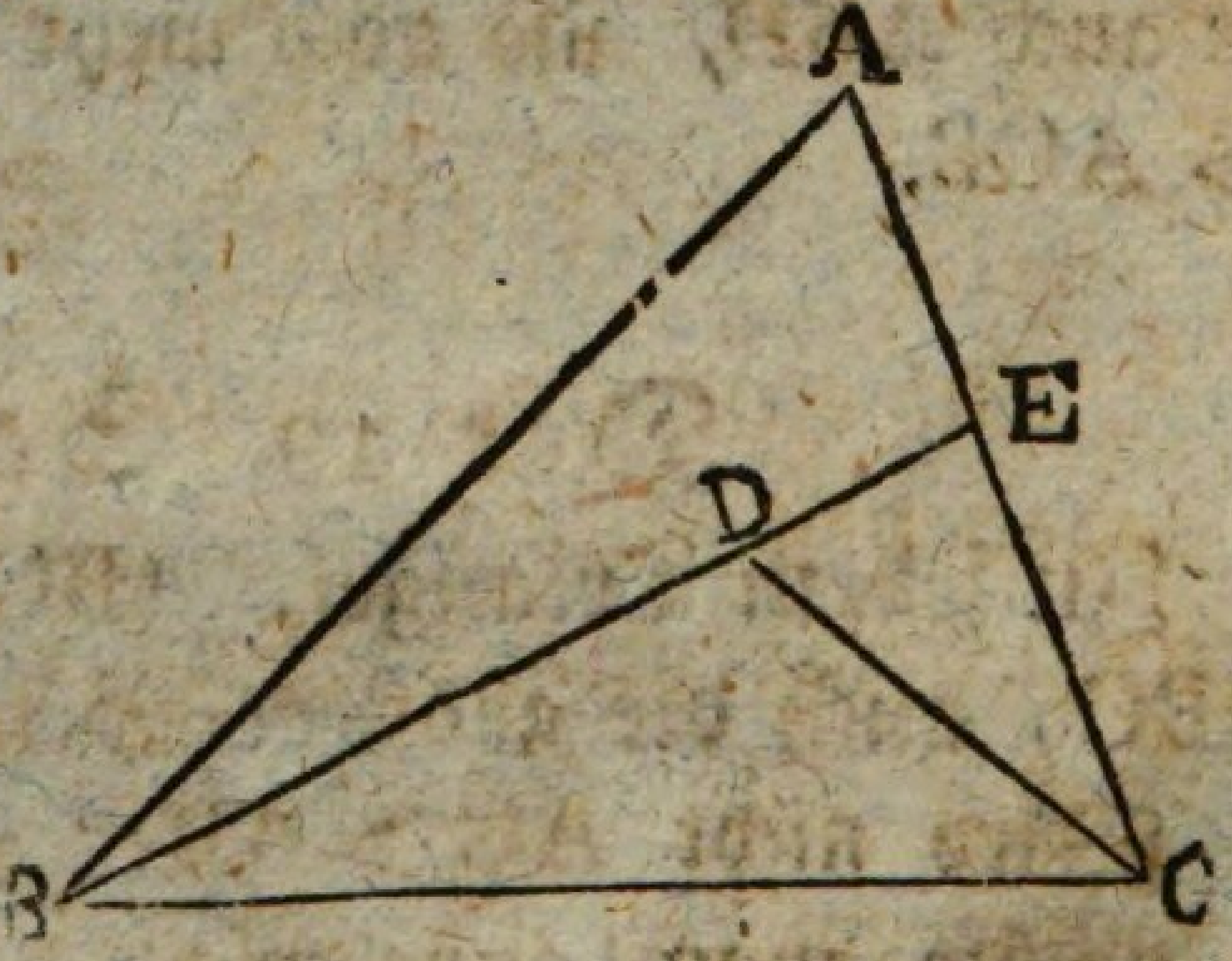


Verlängere BA nach D, mache AD=AC, und ziehe DC.

Da AD = AC, so ist (5. S.) ACD = ADC. Nun ist BCD > ACD, folglich BCD > ADC, folglich (19. S.) BD, das ist BA + AC > BC. Eben so wird bewiesen, daß AB + BC > AC, und daß BC + CA > AB.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Wenn von den Endpunkten B, C einer der Seiten eines Triangels, ABC, zwey gerade Linien BD, CD in einem Punkte innerhalb desselben, D, zusammenlaufen; so sind die zusammenlaufenden Linien kleiner, als des Triangels beyde übrige Seiten, AB, AC, schließen aber einen größern Winkel, BDC, ein.



Verlängert man BD bis E, so ist im △ ABE (20. S.) BA + AE > BE, folglich, wenn EC hinzukommt, BA + AC > BE + EC. Nun ist im △ CDE (20. S.) DE + EC > CD, und daher, wenn DB hinzukommt, BE + EC > CD + DB. Aber BA + AC > BE + EC, folglich ist noch vielmehr BA + AC > CD + DB.

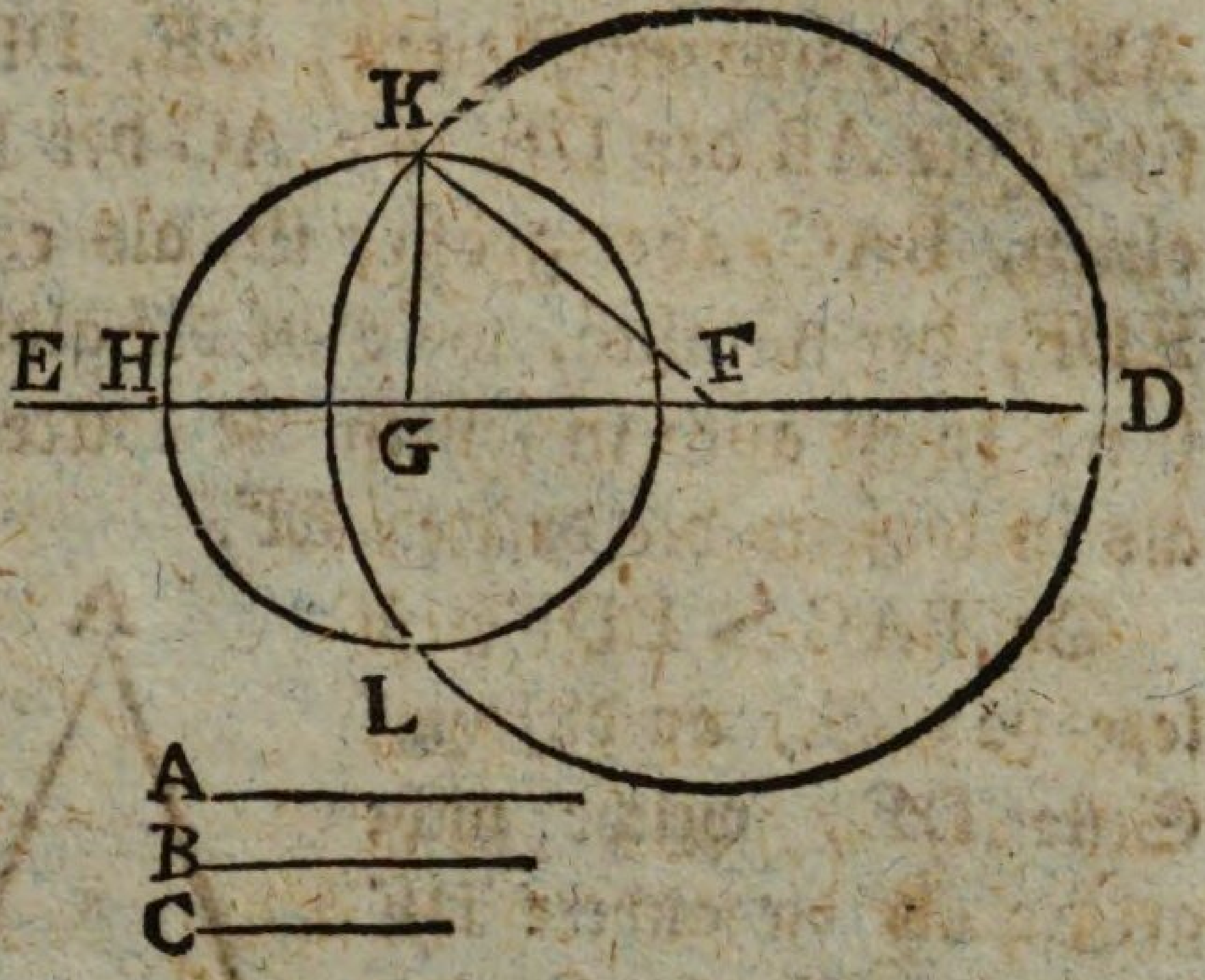
Da (16. S.) BDC > BEC, und BEC > BAC: so ist noch vielmehr BDC > BAC.

Der 22. Satz. Aufgabe.

Einen Triangel zu beschreiben, dessen Seiten drey gegebenen geraden Linien A, B, C gleich sind, wovon jedoch

doch je zwey zusammen genommen größer seyn müssen, als die dritte.

Ziehe eine gerade Linie, DE, welche in D begränzt, nach E zu aber unbegränzt sey. Mache DF = A, FG = B, GH = C. Aus F beschreibe mit FD den Kreis DKL, und aus G mit GH den Kreis KLH. Von K, wo beyde Kreise einander schneiden, ziehe KF, KG: so ist KFG der verlangte Triangel.

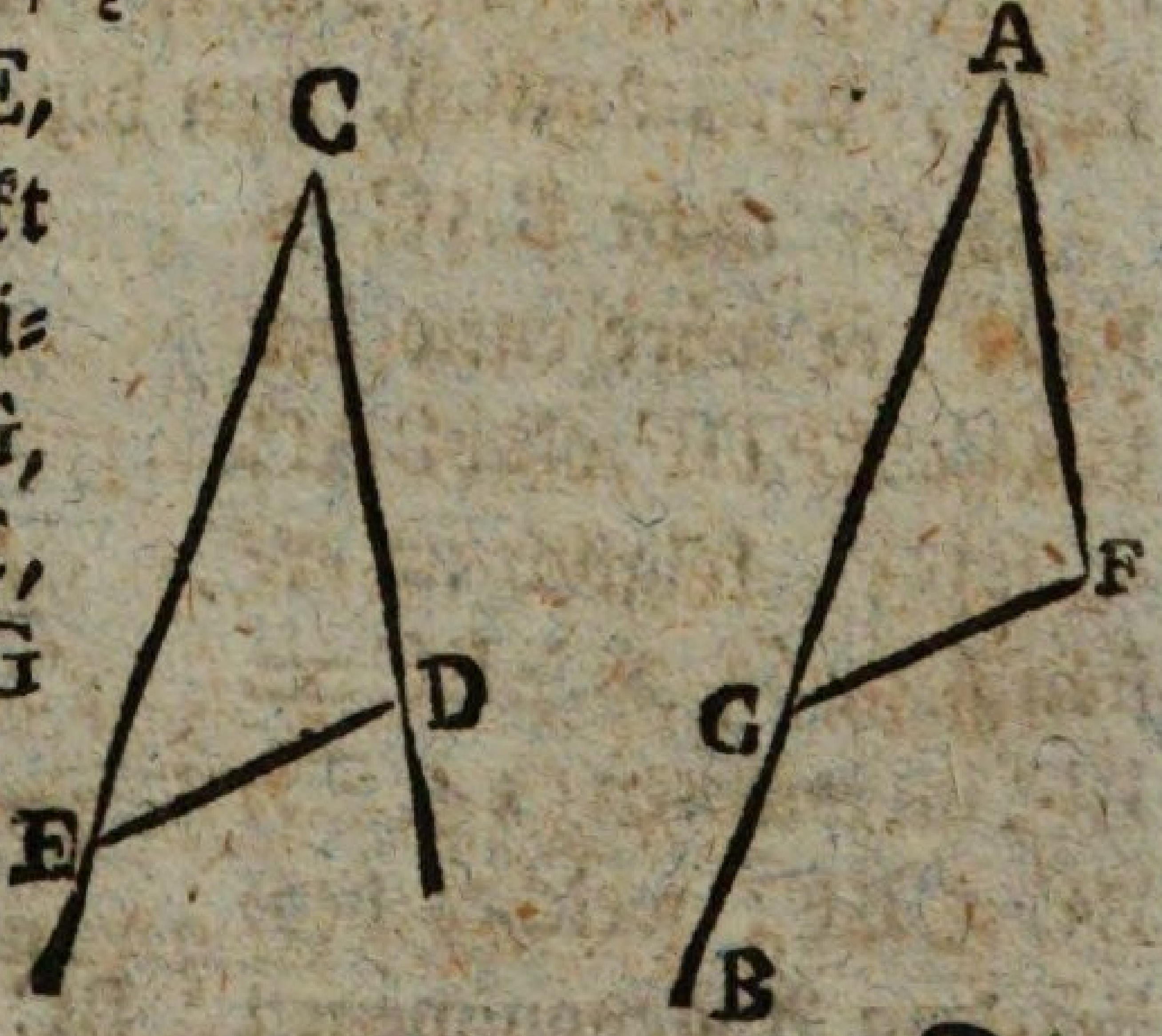


Denn da (15. E.) FD = FK, aber FD = A: so ist (1. G.) FK = A. Eben so, weil GH = GK und GH = C, ist GK = C. Nun war auch FG = B. Demnach sind die Seiten des △ KFG den gegebenen Linien, A, B, C, gleich.

Der 23. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie, AB, an einen in ihr gegebenen Punkt, A, einen dem gegebenen, DCE, gleichen geradlinigen Winkel zu setzen.

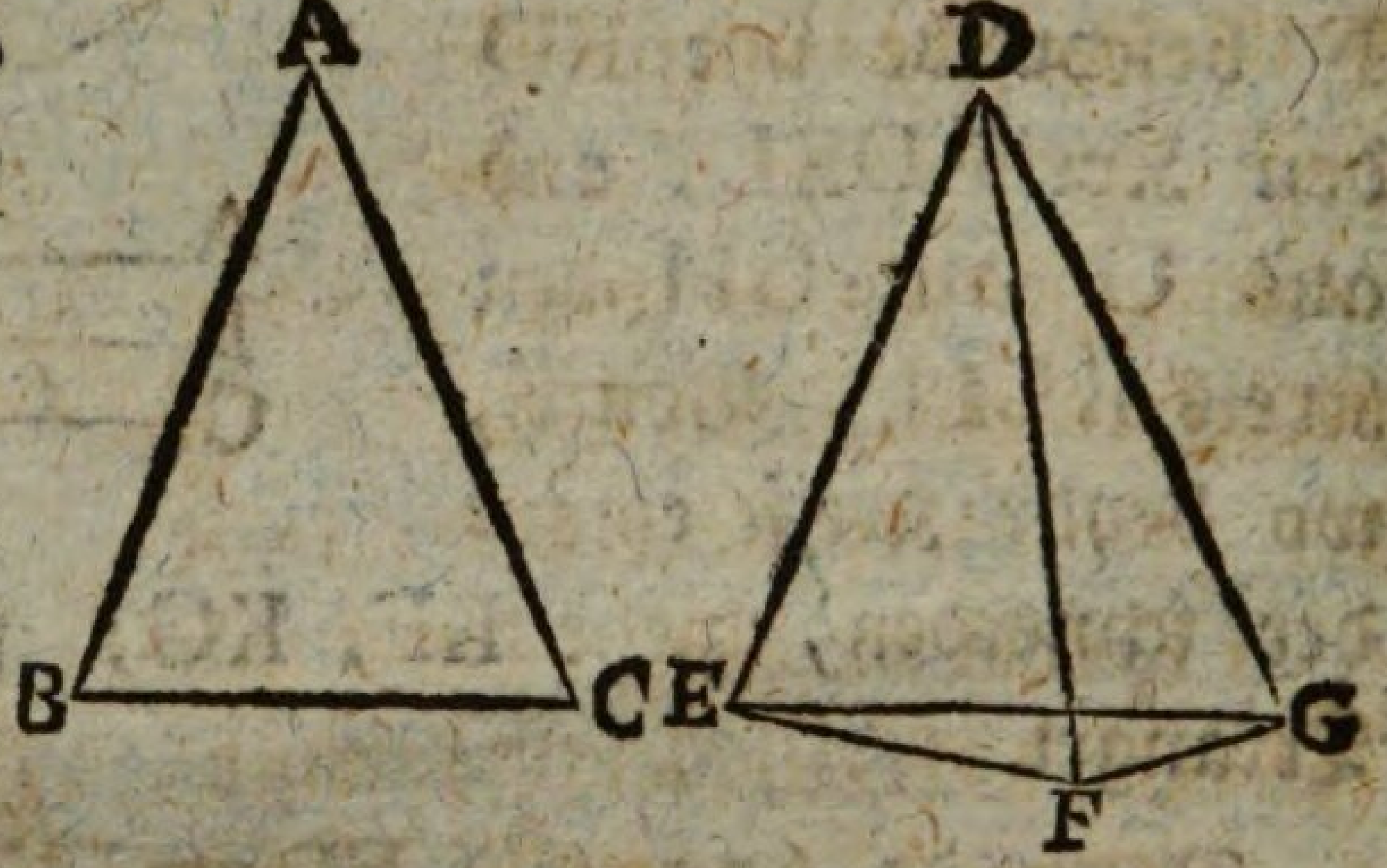
Auf CD sowohl, als CE, nimm willkührlich einen Punkt D, E, und ziehe DE. Beschreibe (22. S.) den Triangel AFG, daß AF = CD, AG = CE, FG = DE: so ist (8. S.) FAG = DCE.



Der

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind (die AB der DE, die AC der DF); ein Winkel des einen, BAC, aber größer ist, als ein Winkel des andern, EDF, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschließen: so ist auch in jenem die dritte Seite, BC, größer, als in diesem die dritte, EF.

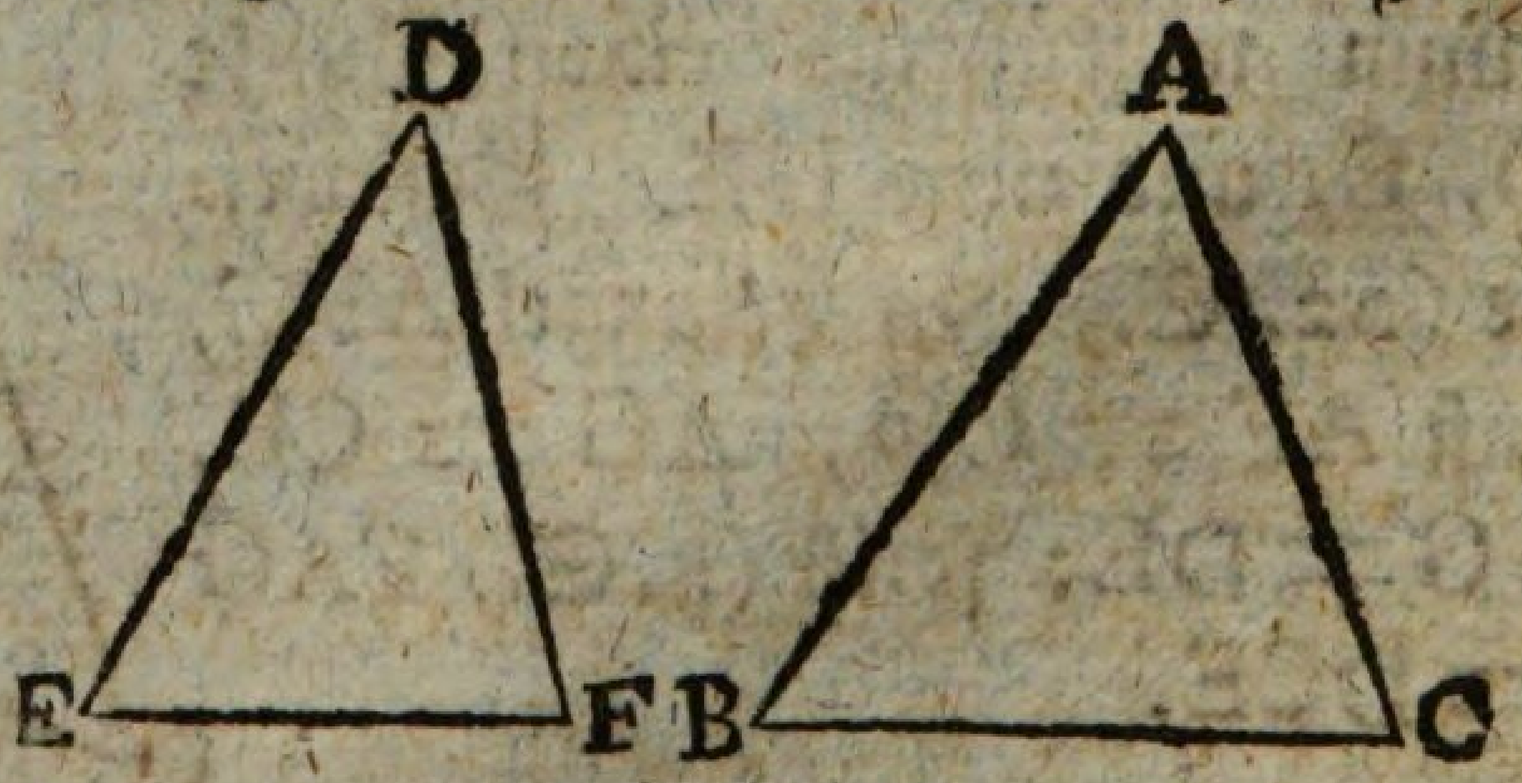


Da BAC > EDF, so lege (23. S.) an diejenige Seite DE, welche nicht größer als die andere DF ist, in dem Punkte D, den Winkel EDG = BAC; mache DG = AC = DF, und ziehe GE, GF.

Da AB = DE, AC = DG, und BAC = EDG: so ist (4. S.) BC = EG. Nun ist DG = DF, und daher (5. S.) DFG = DGF. Folglich ist DFG > EGF, folglich noch vielmehr EFG > EGF, folglich (19. S.) EG, das ist BC > EF.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind, (die AB der DE, die AC der DF); die dritte Seite des einen, BC, aber größer ist, als die dritte des andern, EF; so ist auch in jenem ein Winkel, BAC, größer, als in diesem einer, EDF, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen.

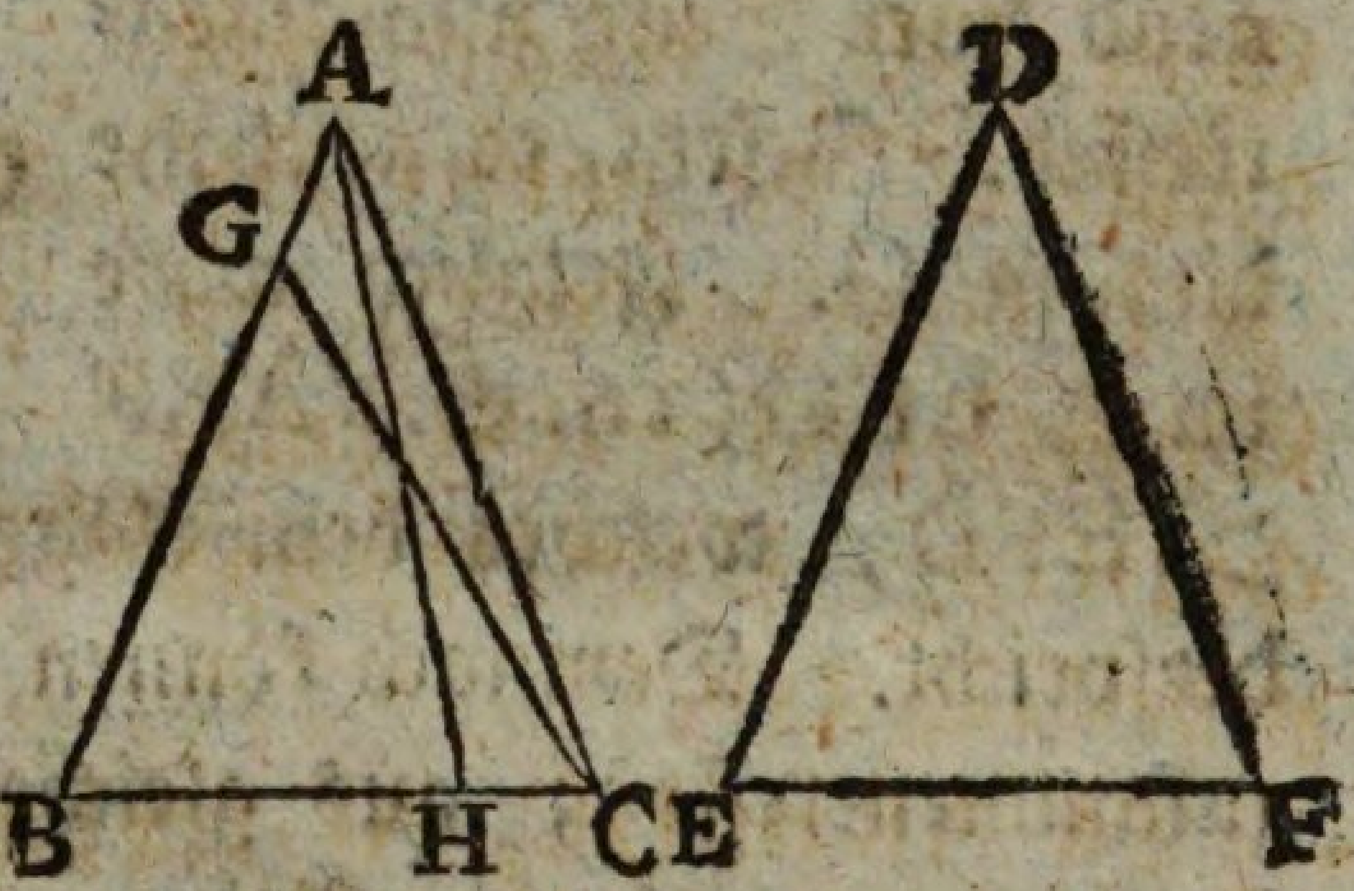


Wäre nicht BAC > EDF, so wäre entweder BAC = EDF, oder BAC < EDF, folglich im ersten Falle (4. S.) BC = EF, im zweyten (24. S.) BC < EF; welches beydes dem Angenommenen, BC > EF, widerspricht. Folglich ist BAC > EDF.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Winkel, ABC, BCA, zweyen Winkeln, DEF, EFD, jeder für sich, gleich sind (ABC dem DEF, und BCA dem EFD); und eine Seite einer Seite gleich ist, sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem derselben gegenüber liegen: so sind auch die beyden übrigen Seiten den beyden übrigen, jede für sich, auch der dritte Winkel, BAC, dem dritten, EDF, gleich.

Erster Fall.



Wenn die an den gleichen Winkeln liegenden Seiten, BC, EF, einander gleich sind: so ist

1) AB = DE. Denn wären AB, DE, ungleich, so müßte eine davon, etwa AB, größer seyn. Es sey daher BG = ED. Ziehe GC. Da also BG = ED, BC = EF, GBC = DEF: so ist (4. S.) BCG = EFD. Nun war angenommen, BCA = EFD. Folglich wäre BCA = BCG, welches (9. G.) unmöglich ist. Demnach können AB, DE, nicht ungleich seyn, folglich ist AB = DE.

2) Da AB = DE, BC = EF, ABC = DEF: so ist (4. S.) AC = DF, und BAC = EDF.

Zweyter Fall.

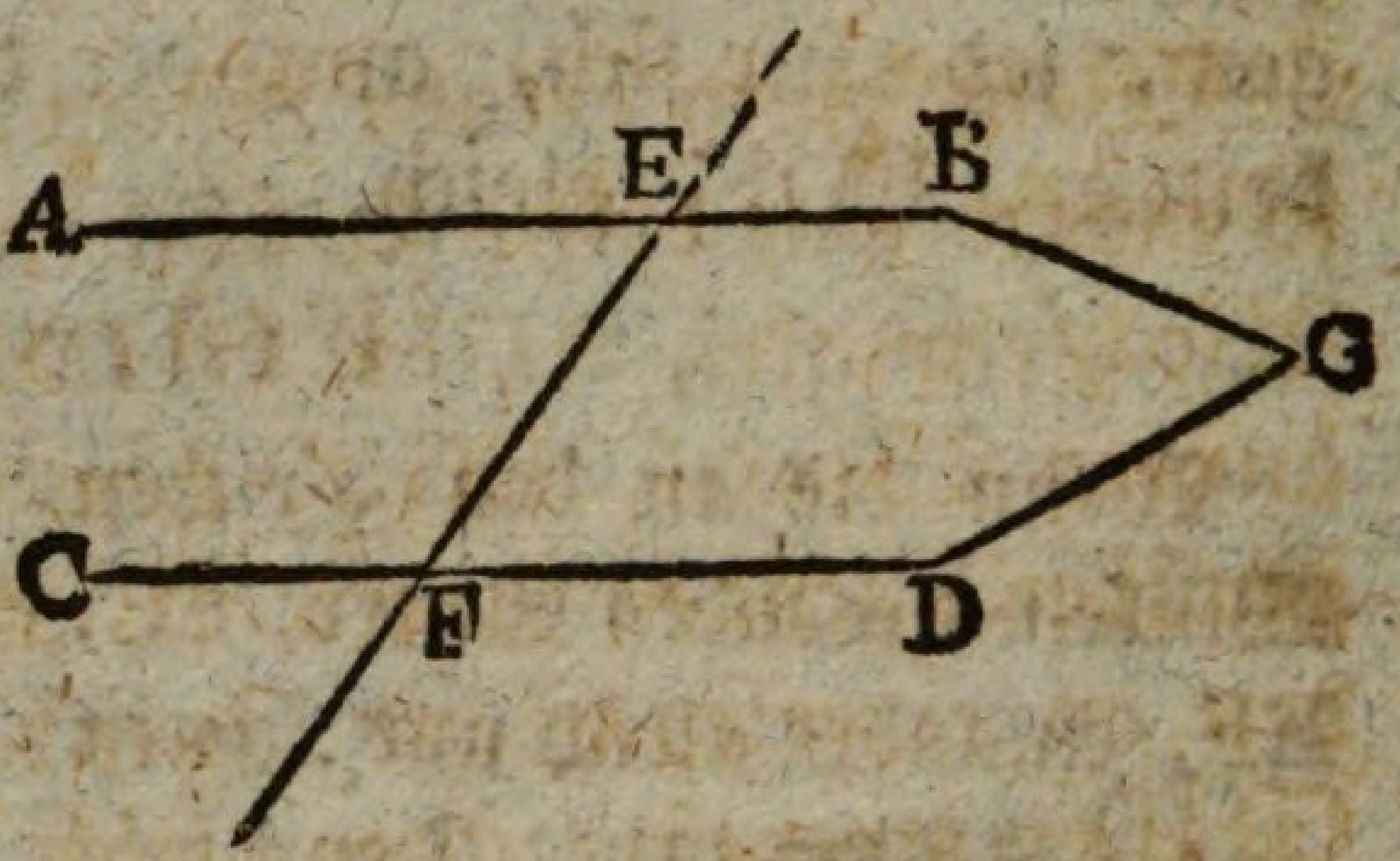
Wenn die einem der gleichen Winkel gegenüber liegenden Seiten, AB, DE, einander gleich sind: so ist

1) BC = EF. Denn wären BC, EF, ungleich, so müßte eine davon, etwa BC, größer seyn. Es sey daher BH = EF. Ziehe AH. Da also BH = EF, AB = DE, ABC = DEF: so ist (4. S.) BHA = EFD. Nun war angenommen BCA = EFD. Folglich wäre BHA = BCA, welches (16. S.) unmöglich. Demnach können BC, EF, nicht ungleich seyn. Folglich ist BC = EF.

2) Da BC=EF, AB=DE, ABC=DEF: so ist (4. S.) AC=DF, und BAC=EDF.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte sie schneidende, EF, gleiche Wechselwinkel, AEF, EFD, macht, sind parallel.

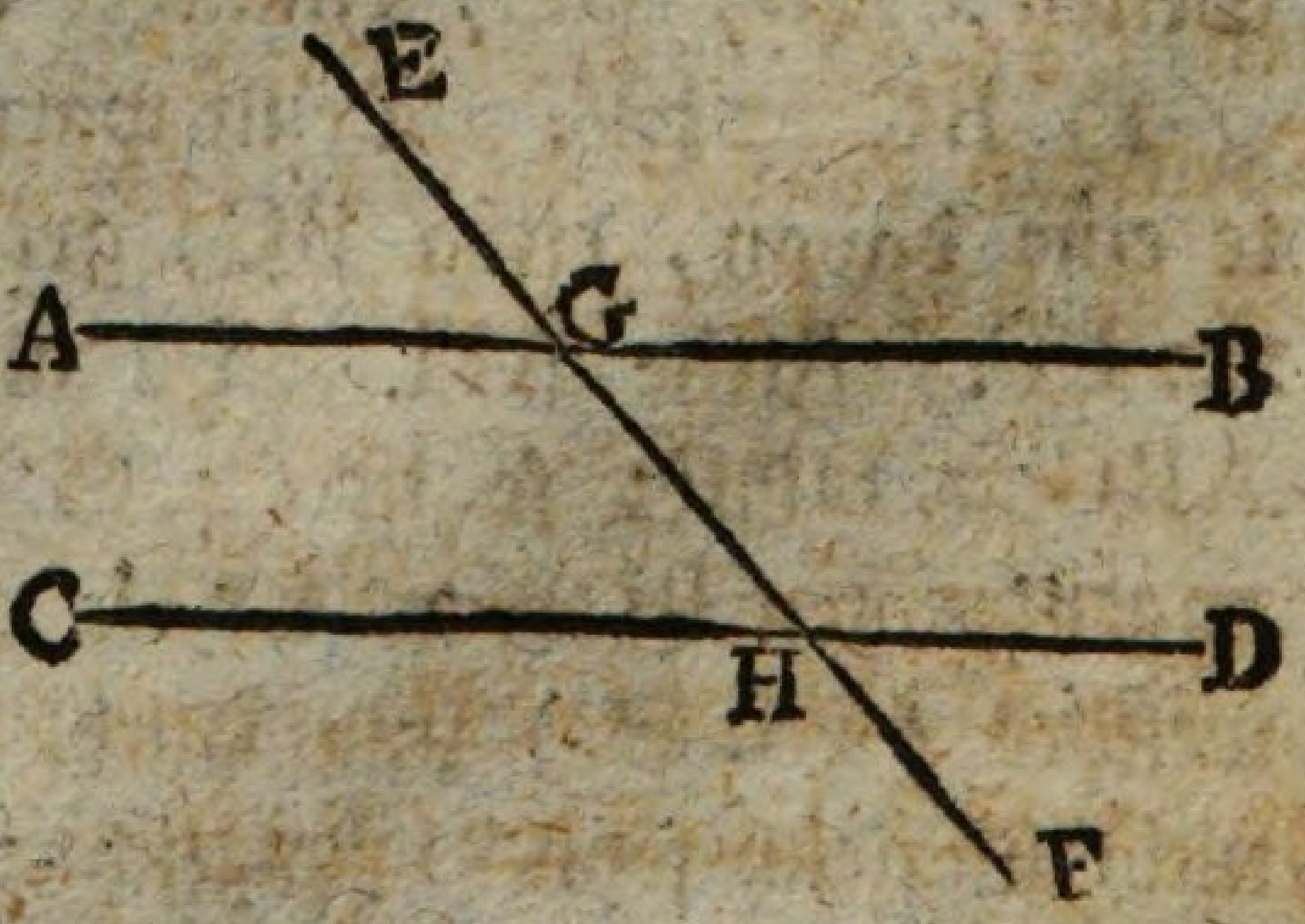


Wären AB, CD, nicht parallel, so würden sie, genugsam verlängert, an irgend einer Seite zusammentreffen. Gesetzt, es geschähe dies in G. Folglich wäre im △ EFG (16. S.) AEF > EFD, welches dem Angenommenen AEF=EFD, widerspricht. Demnach können AB, CD an dieser Seite nicht zusammentreffen; aus gleichen Gründen aber auch nicht an der entgegengesetzten Seite. Folglich sind (35. E.) AB, CD, parallel.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte sie schneidende, EF, den äußern Winkel EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüber liegenden innern Winkel GHD, oder die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten gleich macht, sind parallel.

Erster Theil.



Da EGB=GHD, und (15. S.) EGB=AGH: so ist (1. G.) AGH=GHD. Folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.

Zwey-

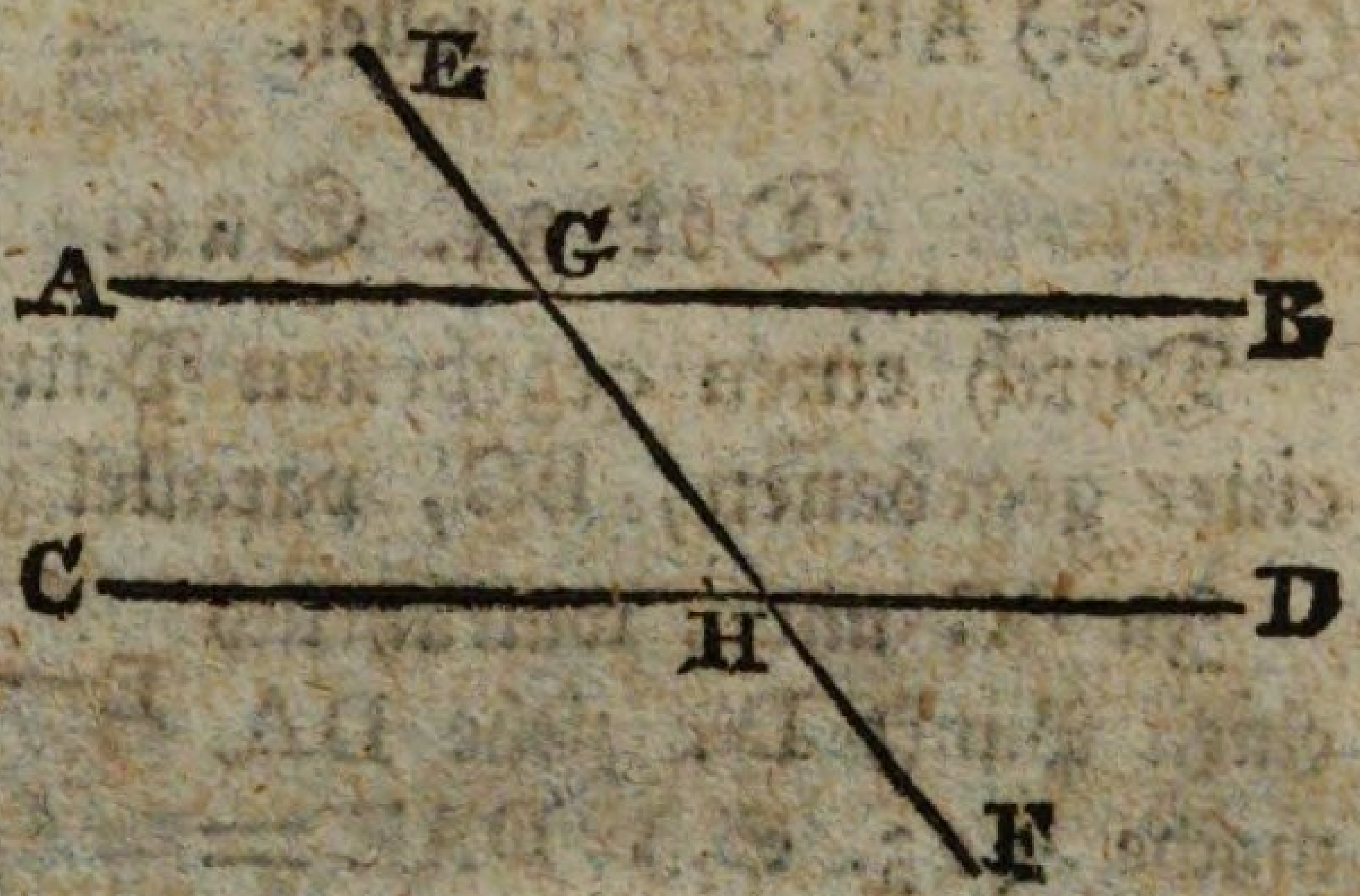
Zweyter Theil.

Da BGH + GHD = 2 R., und (13. S.) AGH + BGH = 2 R.: so ist (1. G.) AGH + BGH = BGH + GHD; folglich, wenn man BGH wegnimmt, (3. G.) AGH = GHD: folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.

Der 29. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind, so macht eine dritte sie schneidende, EF, mit ihnen die Wechselwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den äußern Winkel, EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel, GHD; ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten gleich.

Erster Theil.



Wären die Winkel AGH, GHD, ungleich, so müßte einer davon, etwa AGH, größer seyn. Folglich ist, wenn BGH, hinzukommt, (4. G.) AGH + BGH > BGH + GHD. Nun ist (13. S.) AGH + BGH = 2 R. Folglich ist BGH + GHD < 2 R. Folglich müßten (11. G.) AB, CD, verlängert zusammentreffen, und wären (45. E.) nicht parallel, gegen das Angenommene. Demnach können AGH, GHD, nicht ungleich seyn. Folglich ist AGH = GHD.

Zweyter Theil.

Da AGH = GHD, und (15. S.) AGH = EGB: so ist (1. G.) EGB = GHD.

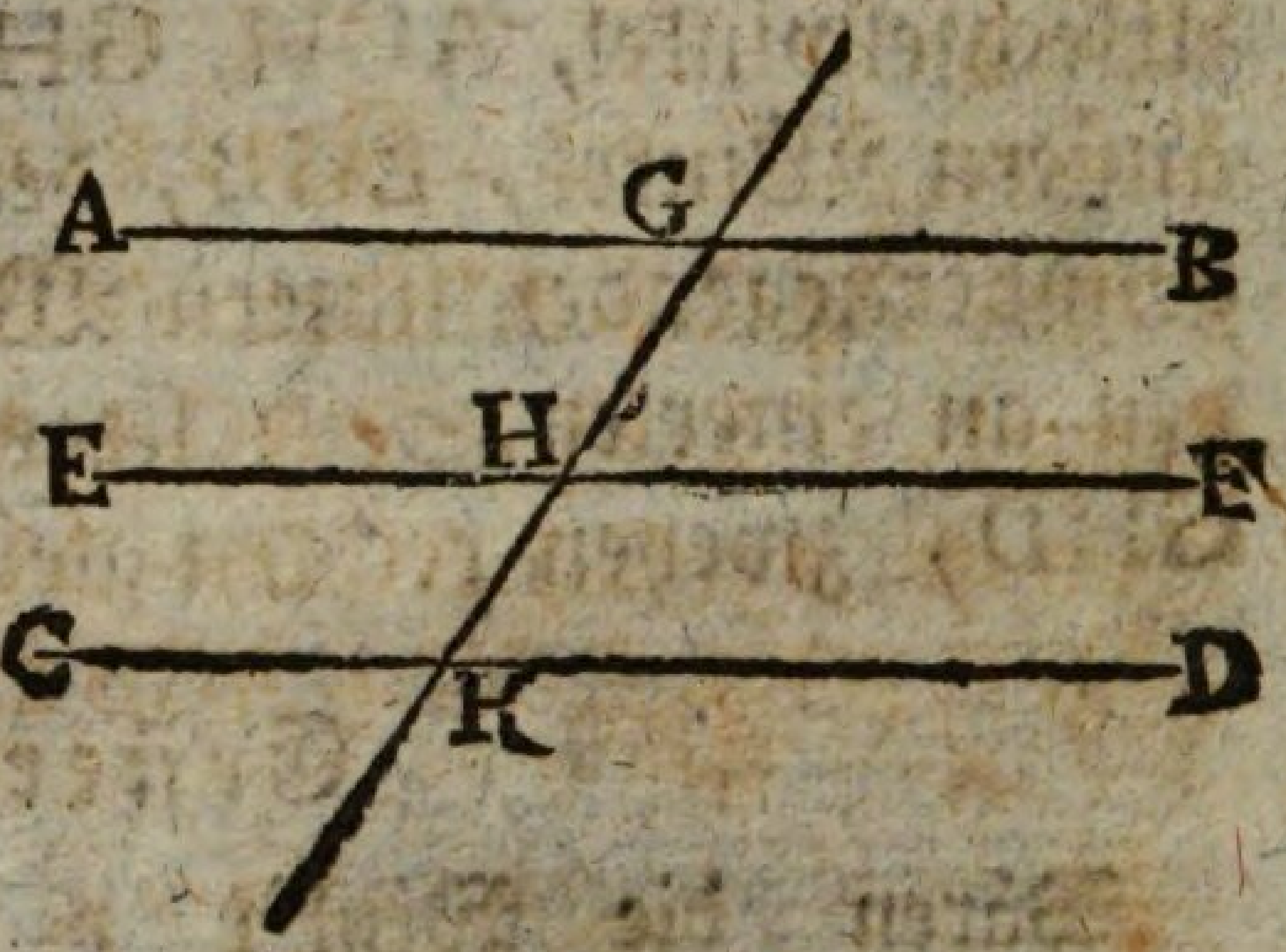
Dritter Theil.

Da EGB = GHD, so ist, wenn BGH hinzukommt, (2. G.) EGB + BGH = BGH + GHD. Nun ist (13. S.) EGB + BGH = 2 R. Folglich ist (1. G.) BGH + GHD = 2 R.

Der 30. Satz. Lehrsatz.

Gerade Linien, AB, CD, welche Einer dritten, EF, parallel sind, sind einander selbst parallel.

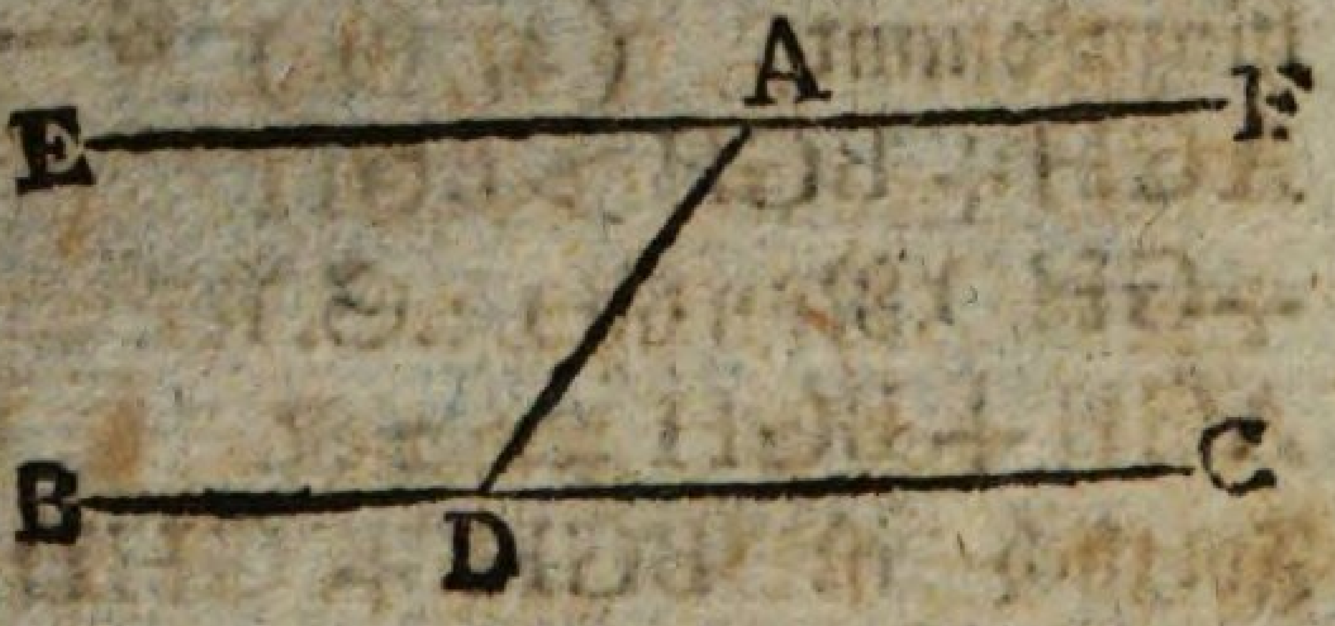
Es schneide sie die gerade Linie, GK. Da AB, EF, parallel, so ist (29. S.) AGH = GHF. Nun ist, weil EF, CD, parallel, (29. S.) GHF = GKD. Folglich ist (1. G.) AGH = GKD. Folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.



Der 31. Satz. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebenen, BC, parallel zu ziehen.

In BC nimm willkührlich einen Punkt D, ziehe DA, mache (23. S.) DAE = ADC, und verlängere EA nach F: so ist (27. S.) EF der BC parallel.

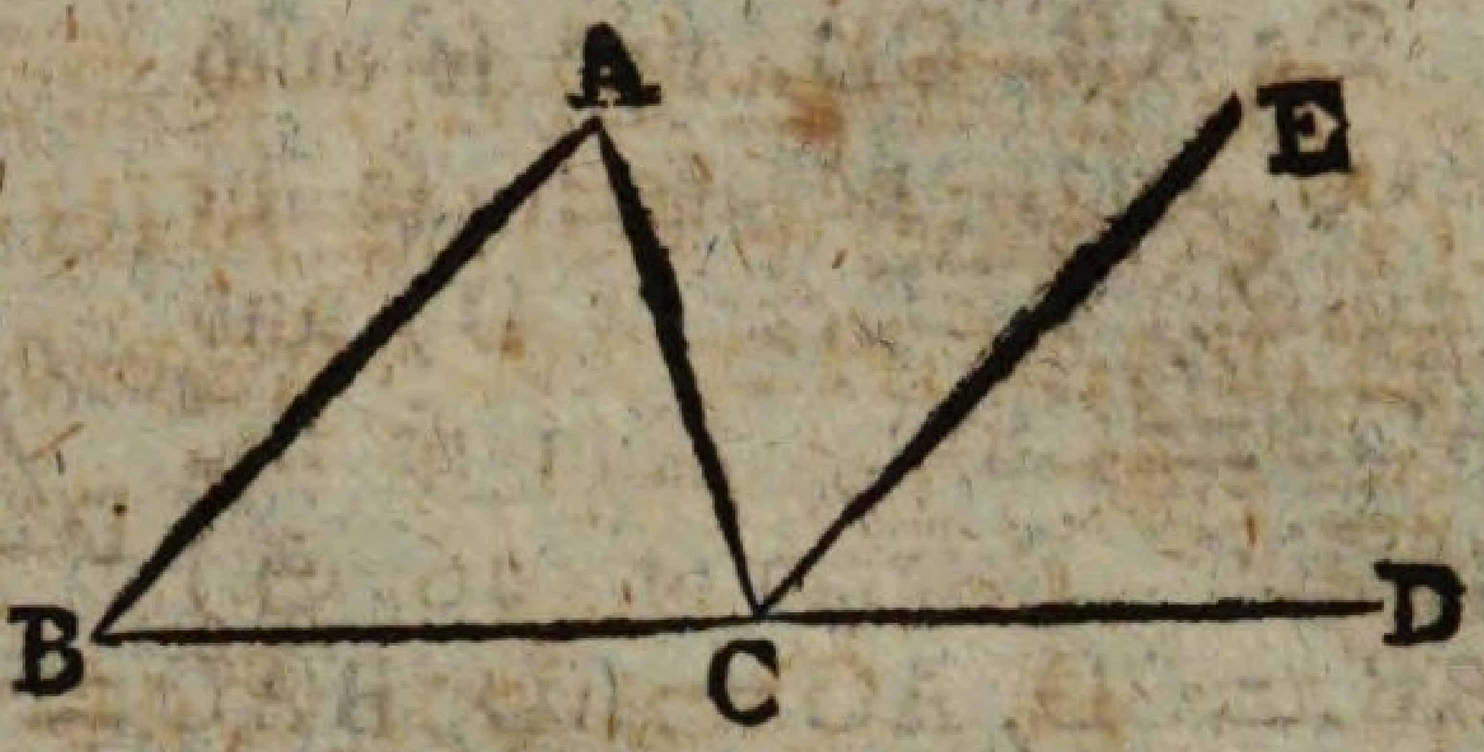


Der 32. Satz. Lehrsatz.

An jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der äußere Winkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkeln, CAB, ABC, gleich; auch sind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

Erster

Erster Theil.



Durch C ziehe (31. S.) der AB, die CE parallel.

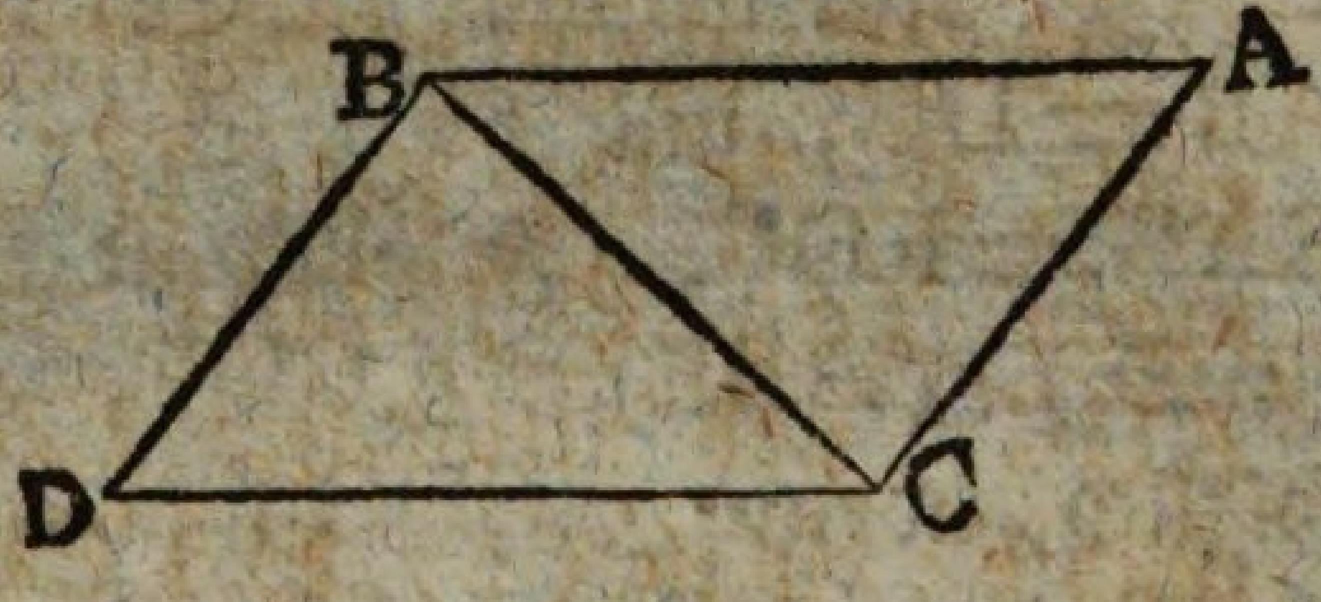
Da AB, CE, parallel sind: so ist (29. S.), weil AC sie schneidet, BAC = ACE, und weil auch BD sie schneidet, ABC = ECD. Folglich ist (2. G.) BAC + ABC = ACD.

Zweyter Theil.

Da BAC + ABC = ACD, so ist, wenn ACB hinzukommt, (2 G.) BAC + ABC + ACB = ACD + ACB. Nun ist (13. S.) ACD + ACB = 2. R. Folglich ist (1. G.) auch BAC + ABC + ACB = 2 R.

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Die geraden Linien AC, BD, welche die Endpunkte gleicher und paralleler gerader Linien AB, CD an einerley Seite verbinden, sind selber gleich und parallel.

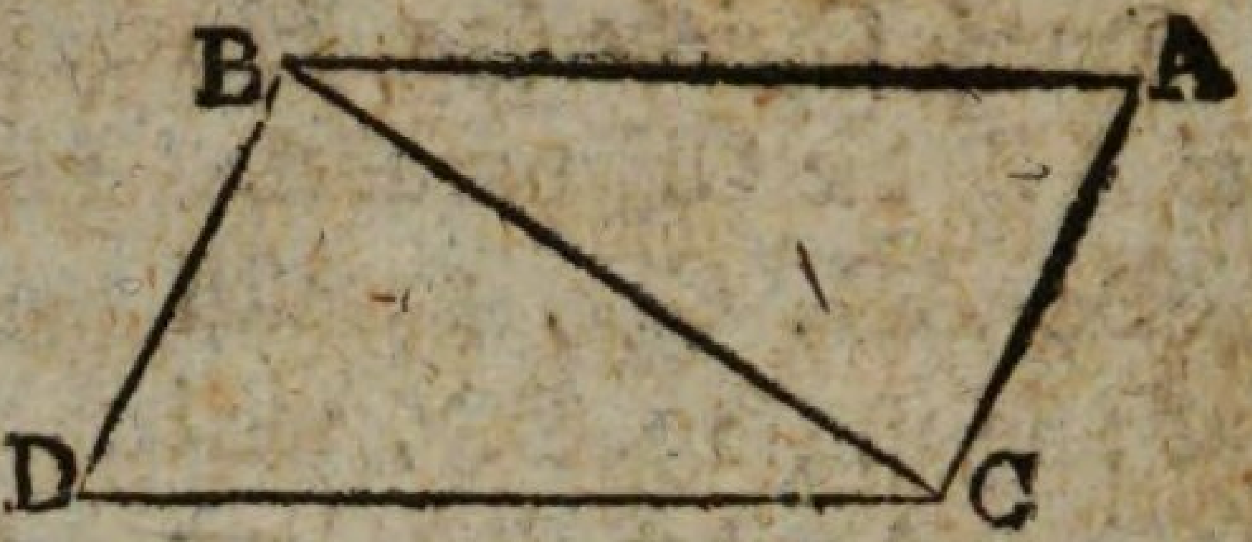


Ziehe BC, so ist, weil AB, CD, parallel, (29. S.) ABC = BCD, folglich, weil AB = CD, und BC gemein (4. S.) AC = BD; auch ACB = CBD, und daher (27. S.) AC der BD parallel.

Der 34. Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ACDB, sind die gegenüberliegenden Seiten so wohl als Winkel einander gleich; auch wird das Parallelogramm von der Diagonale, BC, halbiret.

Erster Theil.



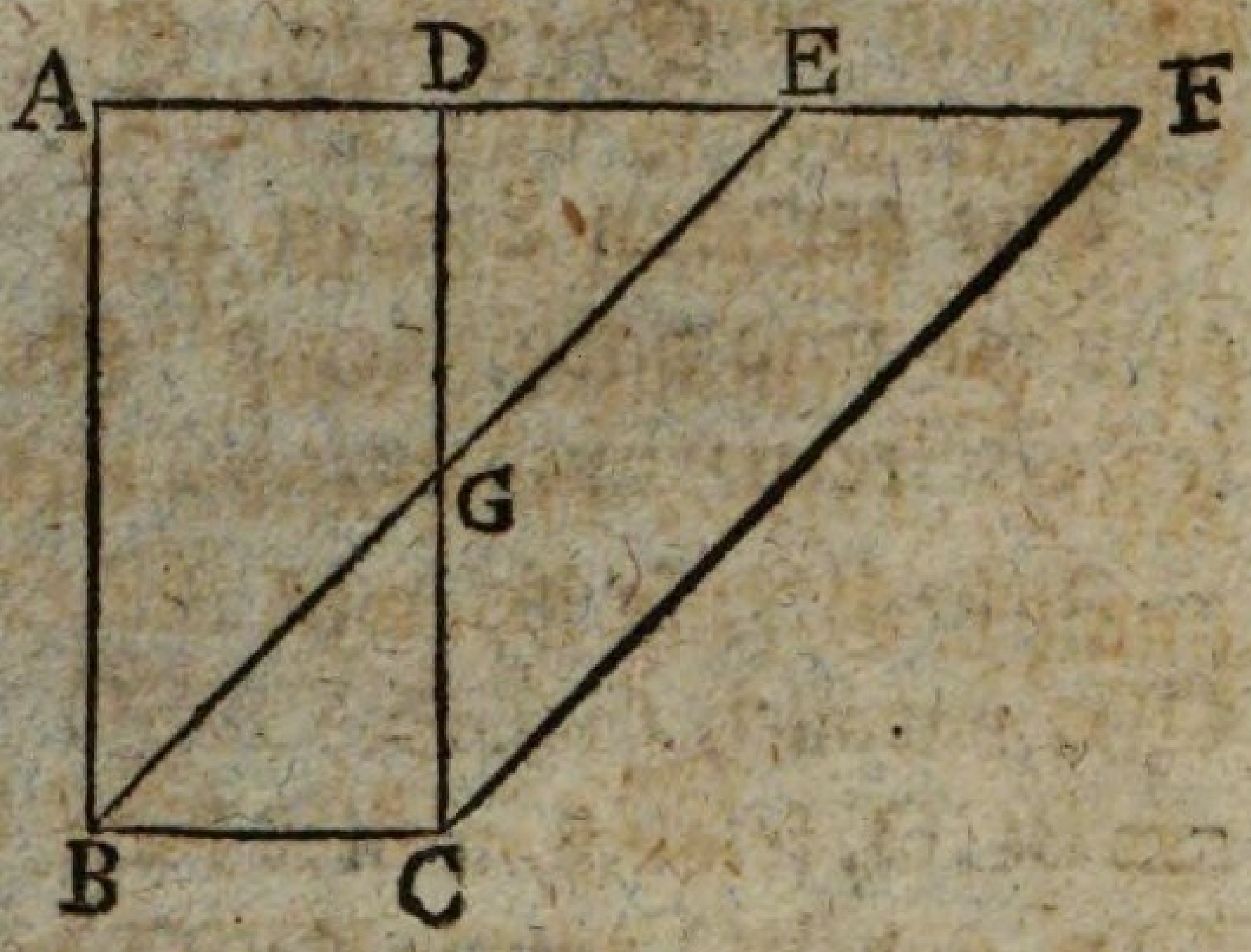
Da AB, CD, und so auch AC, BD, parallel: so ist (29. S.) ABC = BCD, und ACB = CBD. Nun ist BC gemein. Folglich ist (26. S.) AB = CD, AC = BD, BAC = BDC. Auch ist, weil ABC = BCD, und CBD = ACB, (2. G.) ABC + CBD = BCD + ACB, das ist, ABD = ACD.

Zweyter Theil.

Da AB = CD, und BC gemein, auch ABC = BCD: so ist (4. S.) △ ABC = △ CBD.

Der 35. Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme, ABCD, EBCF, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallellinien, AF, BC, sind einander gleich.



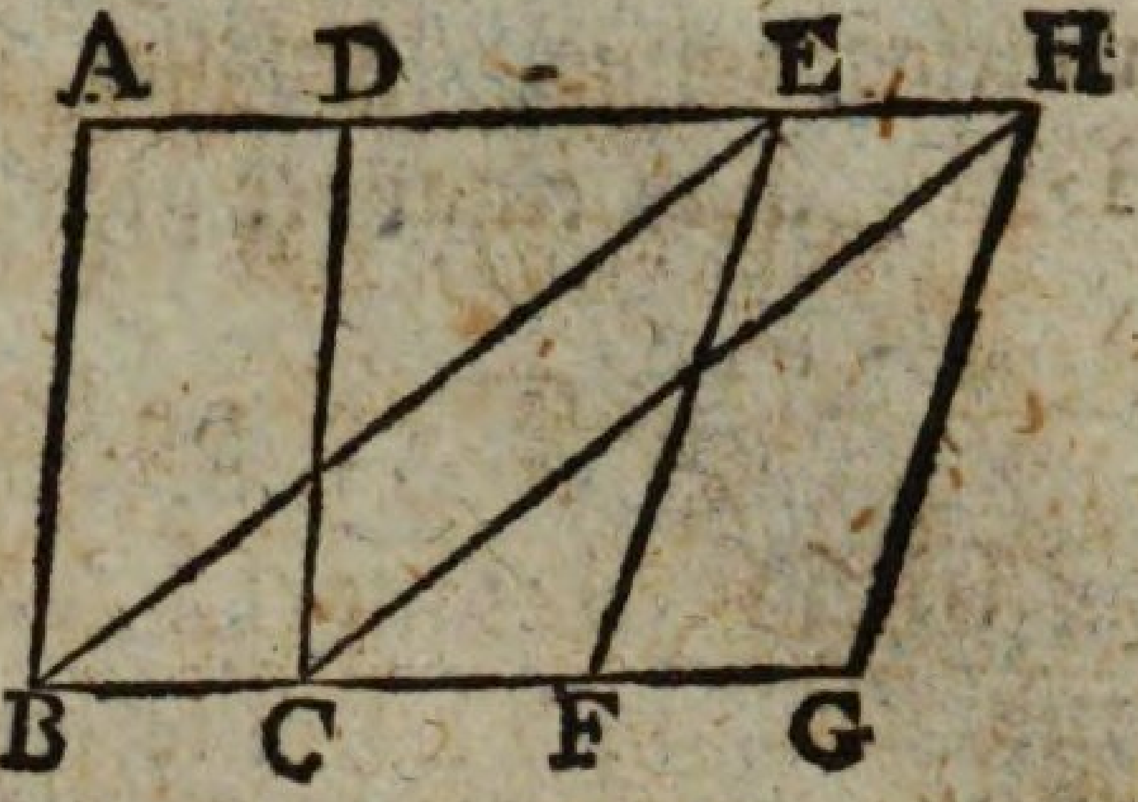
Da (34. S.) AD = BC, und EF = BC: so ist (1. G.) AD = EF; folglich, wenn DE hinzukommt, (2. G.) AE = DF. Nun ist auch (34. S.) AB = DC, und (29. S.) EAB = FDC. Folglich ist (4. S.) △ ABE = △ CDF, folglich, wenn △ EDG hinwegkommt, (3. G.) das Trapez ABGD = EGCF, folglich, wenn △ GBC hinzukommt, (2. G.) das Parallelogramm ABCD = EBCF.

Auf ähnliche Art, und noch leichter wird der Beweis geführt, wenn E in D, oder zwischen D und A liegt.

Der 36. Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme, ABCD, EFGH, auf gleichen Grundlinien, BC, FG, und in einerley Parallellinien, AH, BG, sind einander gleich.

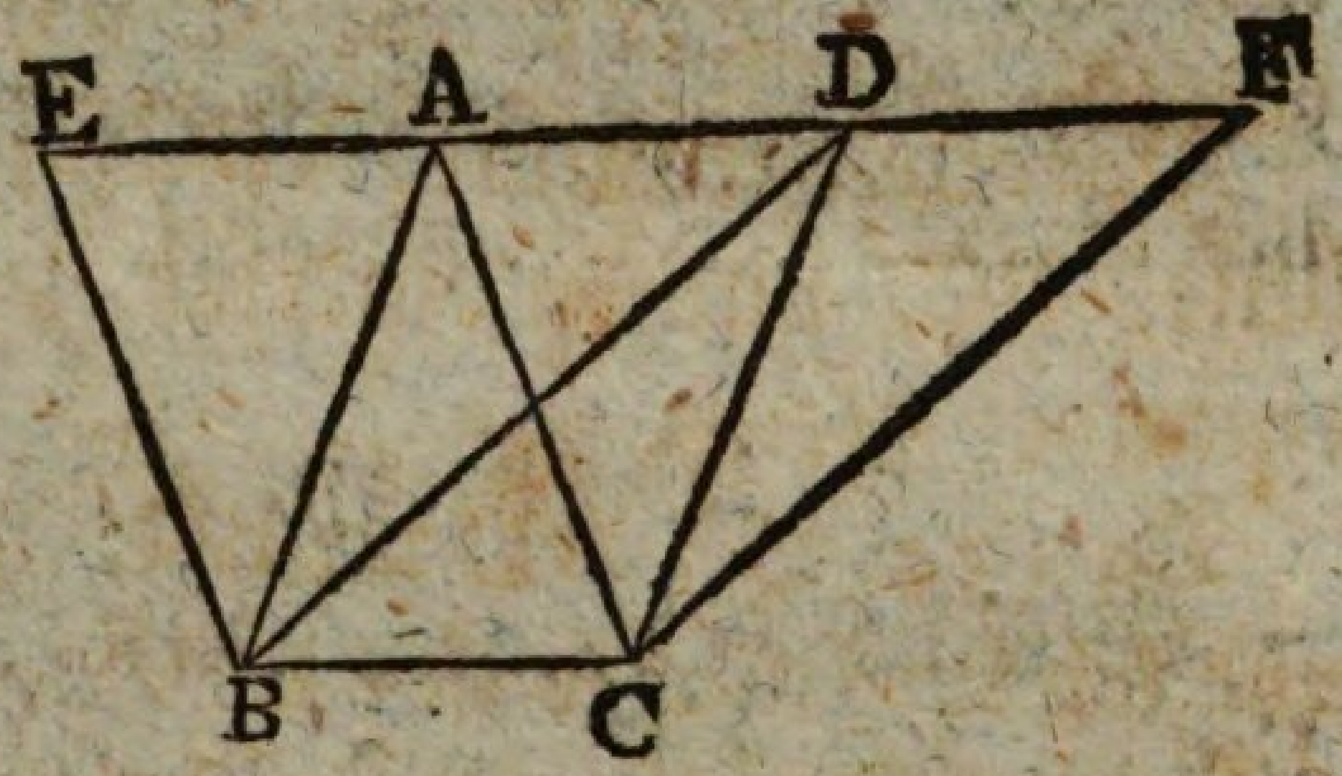
Ziehe



Ziehe BE, CH. Da BC = FG, und (34. S.) FG = EH: so ist (1. G.) BC = EH. Nun sind BC, EH, auch parallel. Folglich sind (33. S.) EB, CH gleich, und parallel. Folglich ist EBCH ein Parallelogramm, folglich (35. S.) ABCD = EBCH, und EFGH = EBCH, folglich (1. G.) ABCD = EFGH.

Der 37. Satz. Lehrsatz.

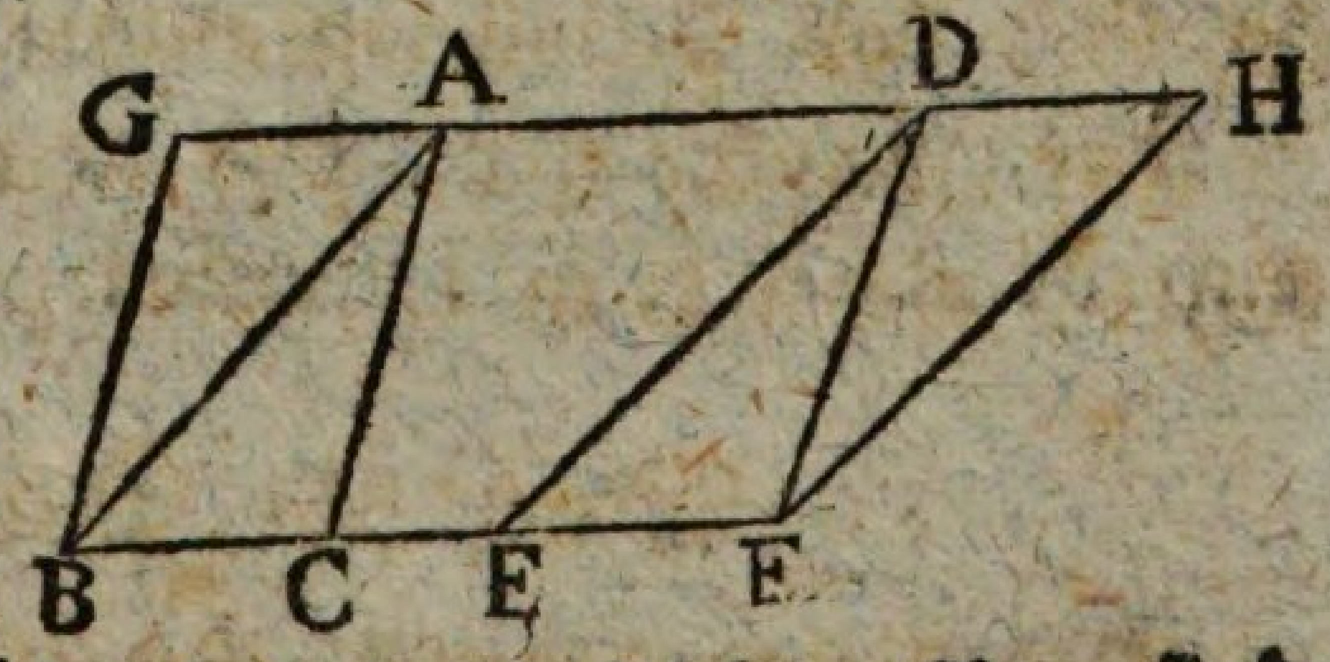
Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallellinien, AD, BC, sind einander gleich.



Verlängert man AD an beyden Seiten, und ziehet (31. S.) durch B der AC die BE, und durch C der BD die CF parallel: so sind EBCA, DBCF, Parallelogramme, und (35. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DBC, die Hälften dieser Parallelogramme. Folglich sind (7. G.) die Triangel ABC, DBC auch einander gleich.

Der 38. Satz. Lehrsatz.

Triangel, ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien, BC, EF, und in einerley Parallellinien, AD, BF, sind einander gleich.

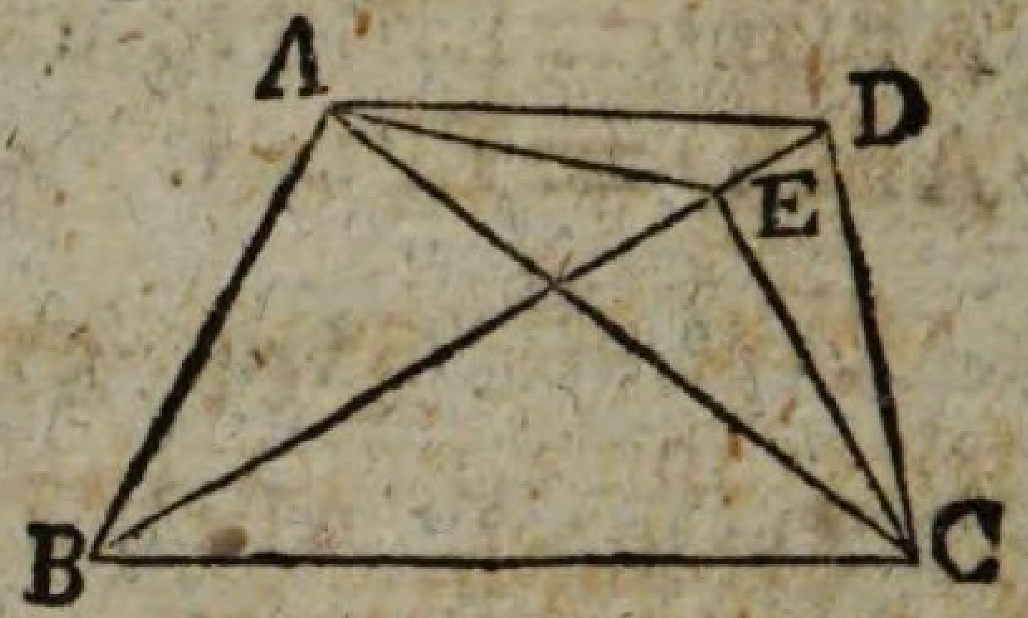


Verlängert man AD an beyden Seiten, und ziehet (31. S.) durch B der AC die BG, und durch F der ED die FH parallel: so sind GBCA, DEFH, Parallelogramme, und (36. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DEF, die Hälften dieser Paralle-

rallelogramme. Folglich sind (7. G.) die Triangel ABC, DEF, auch einander gleich.

Der 39. Satz. Lehrsatz.

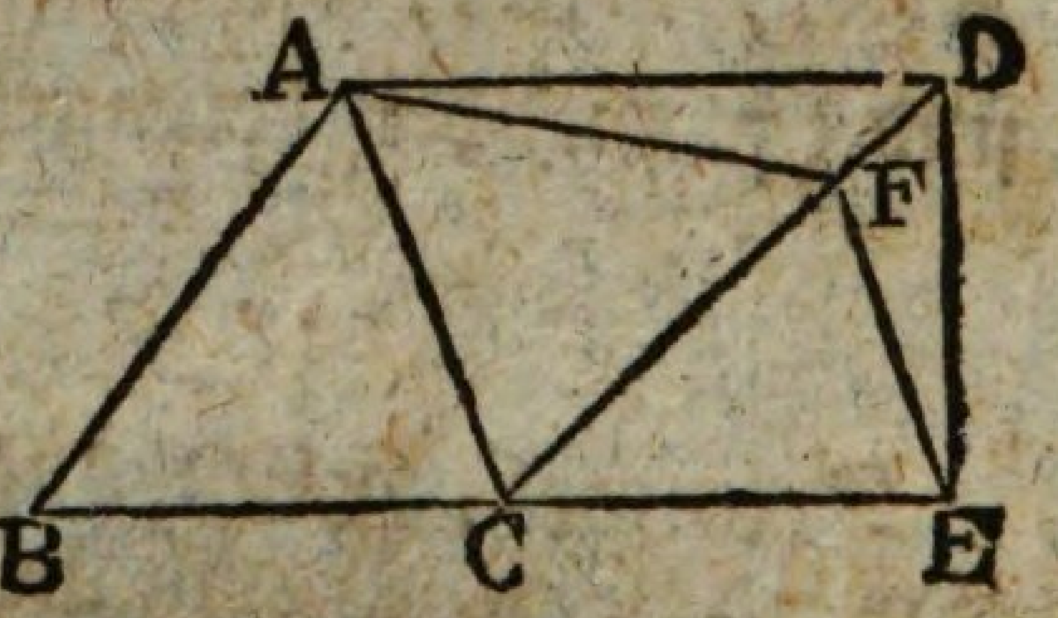
Gleiche Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und an einerley Seite sind in einerley Parallellinien, AD, BC.



Wäre der BC die AD nicht parallel, so sey es eine andere, etwa AE. Ziehet man EC, so ist (37. S.) △ABC = △EBC. Nun war angenommen, △ABC = △DBC. Folglich wäre (1. G.) △DBC = △EBC, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist AE der BC nicht parallel, und aus gleichen Gründen auch keine andere Linie außer AD. Folglich ist AD der BC parallel.

Der 40. Satz. Lehrsatz.

Gleiche Triangel, ABC, DCE, auf gleichen Grundlinien, BC, CE, und an einerley Seite, sind in einerley Parallellinien, AD, BE.



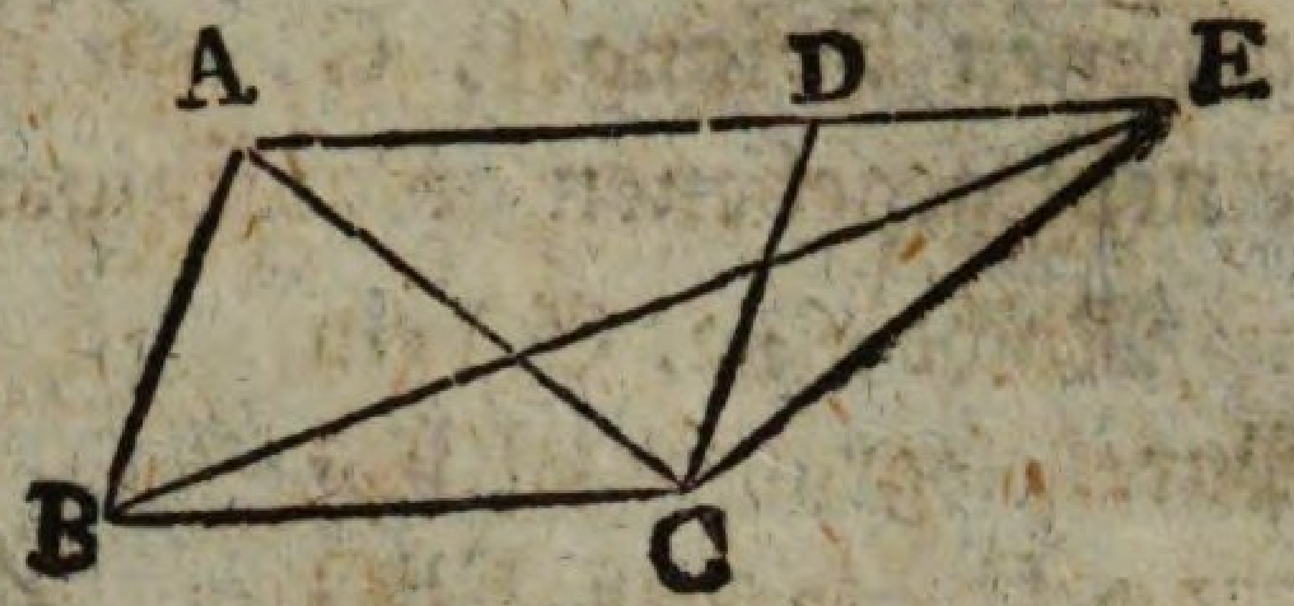
Wäre der BE die AD nicht parallel, so sey es eine andere, etwa AF. Ziehet man FE, so ist (38. S.) △ABC = △FCE. Nun ist angenommen, △ABC = △DCE. Folglich wäre (1. G.) △DCE = △FCE, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist AF der BE nicht parallel, und aus gleichen Gründen auch keine andere Linie außer AD. Folglich ist AD der BE parallel.

Der 41. Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm, ABCD, und ein Triangel, EBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Paral-

Parallellinien, BC, AE, sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als der Triangel.

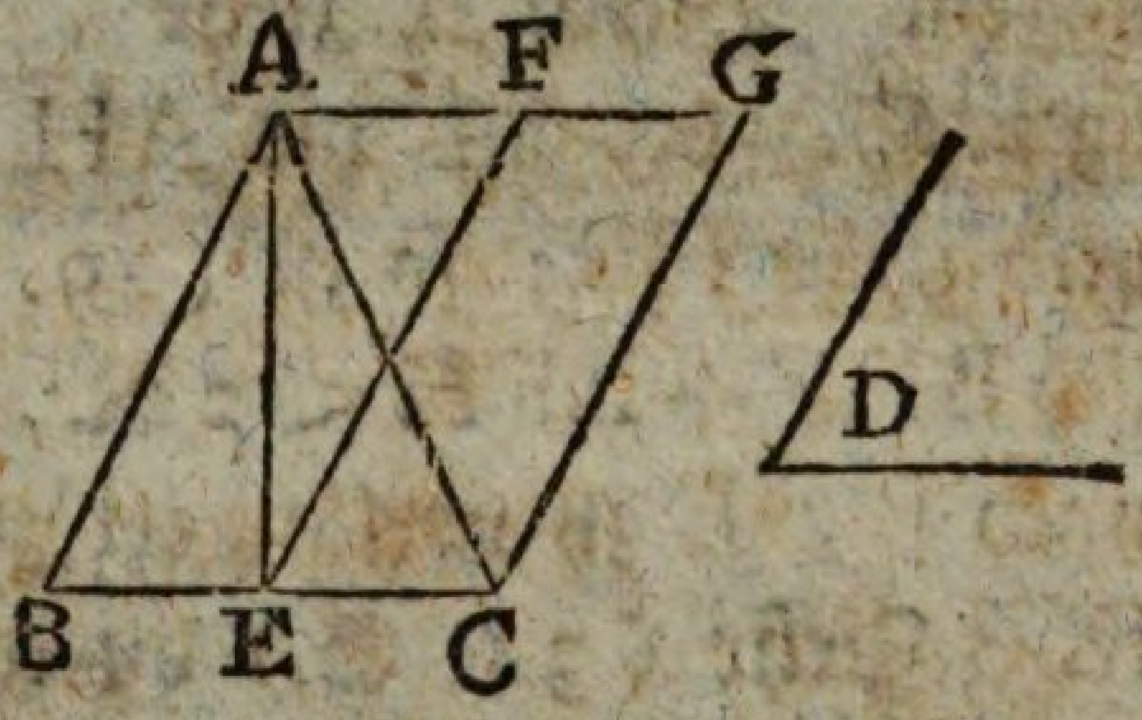
Ziehet man AC, so ist (37. S.) △ ABC = △ EBC. Nun ist (34. S.) ABCD = 2 △ ABC. Folglich ist auch ABCD = 2 △ EBC.



Der 42. Satz. Aufgabe.

Ein dem gegebenen Triangel, ABC, gleiches Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, D, zu beschreiben.

Halbire (10. S.) BC in E, und ziehe AE. Auf CE setze in E (23. S.) CEF = D. Ziehe (31. S.) durch A der BC die AG, und durch C der EF die CG parallel: so ist FECG das verlangte Parallelogramm.

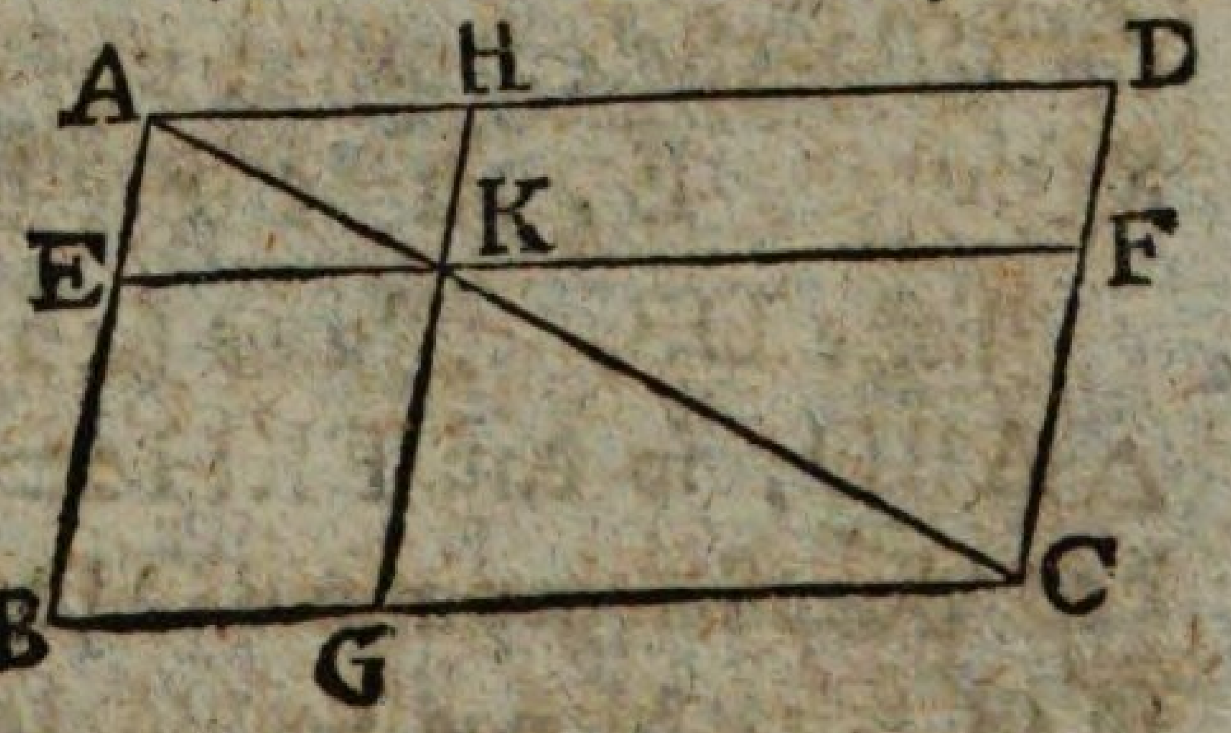


Denn es ist FECG ein Parallelogramm unter dem Winkel CEF = D, auch (41. S.) FECG = 2 △ AEC. Nun ist (38. S.) △ ABE = △ AEC, und daher △ ABC = 2 △ AEC. Folglich ist (6. G.) FECG = ABC.

Der 43. Satz. Lehrsatz.

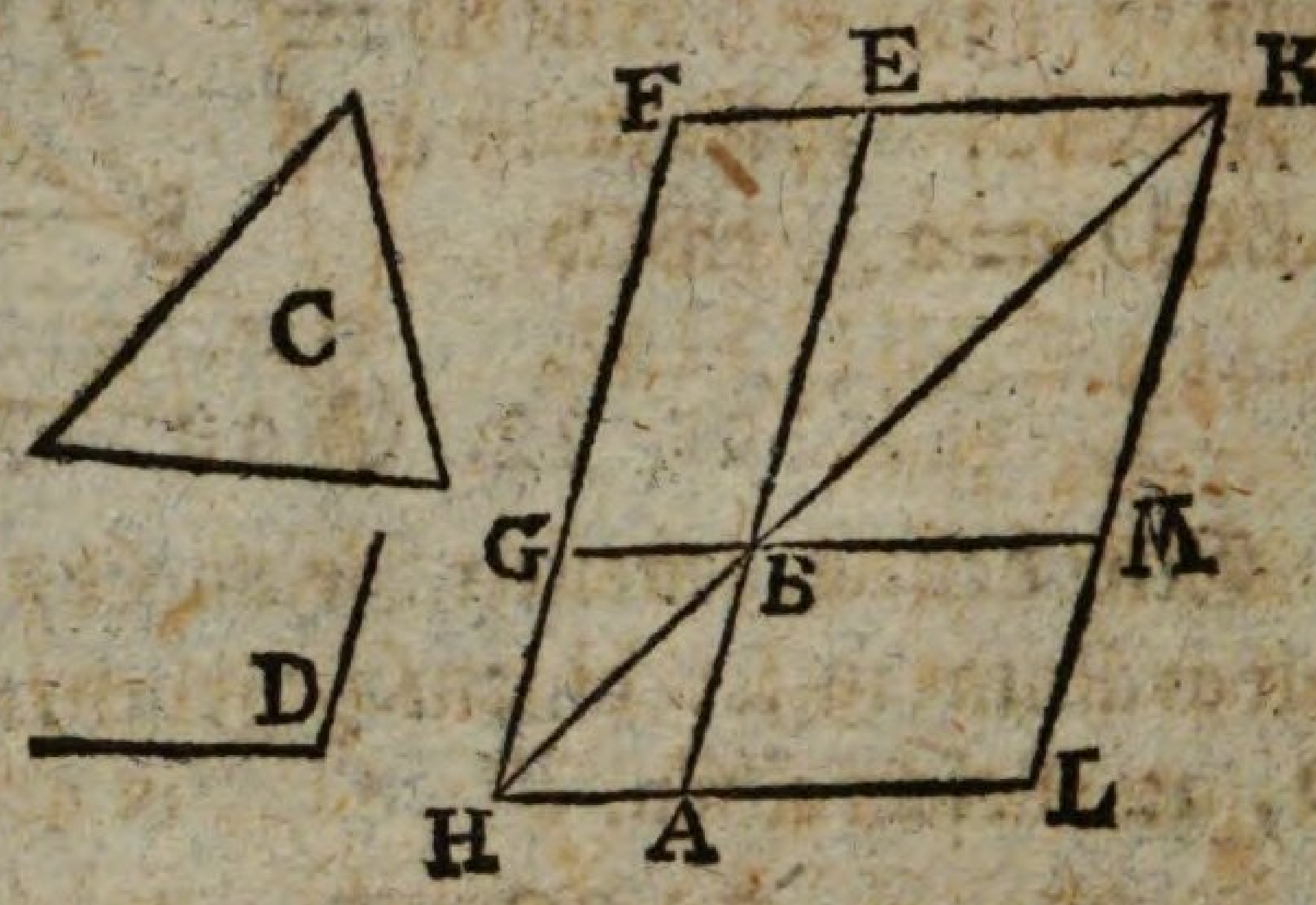
In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die Ergänzungen, BK, KD, der um die Diagonale, AC, herumliegenden Parallelogramme, EH, FG, einander gleich.

Da (34. S.) △ ABC = △ CAD, und △ AEK = △ AHK: so ist (3. G.) EKCB = KHDC. Nun ist (34. S.) △ KGC = △ KCF. Folglich ist (3. G.) BK = KD.



Der 44. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, ein, dem gegebenen Triangel, C, gleiches Parallelogramm, unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, D, zu beschreiben.



Mache (42. S.) ein Parallelogramm BEFG $=\triangle C$, so daß EBG $=$ D, und bringe solches an die gegebene Linie AB, dergestalt, daß AB, BE, in gerader Linie an einander liegen. Durch A ziehe (31. S.) der EF die AH parallel. Verlängere FG bis H, und ziehe HB: so ist (29. S.) AHF + EFH = 2 R. Folglich BHF + EFH < 2 R., folglich werden (11. G.) HB, FE, nach B, E zu verlängert zusammentreffen. Dieß geschehe in K. Ziehe (31. S.) durch K der EA oder FH die KL parallel, und verlängere HA, GB, nach L, M: so ist LB das verlangte Parallelogramm.

Denn hiernach ist HLKF ein Parallelogramm, dessen Diagonale HK, folglich (43. S.) LB = BF. Auch ist (15. S.) ABM = GBE. Nun war BF $=\triangle C$, und GBE = D. Folglich ist (1. G.) LB $=\triangle C$, und ABM = D.

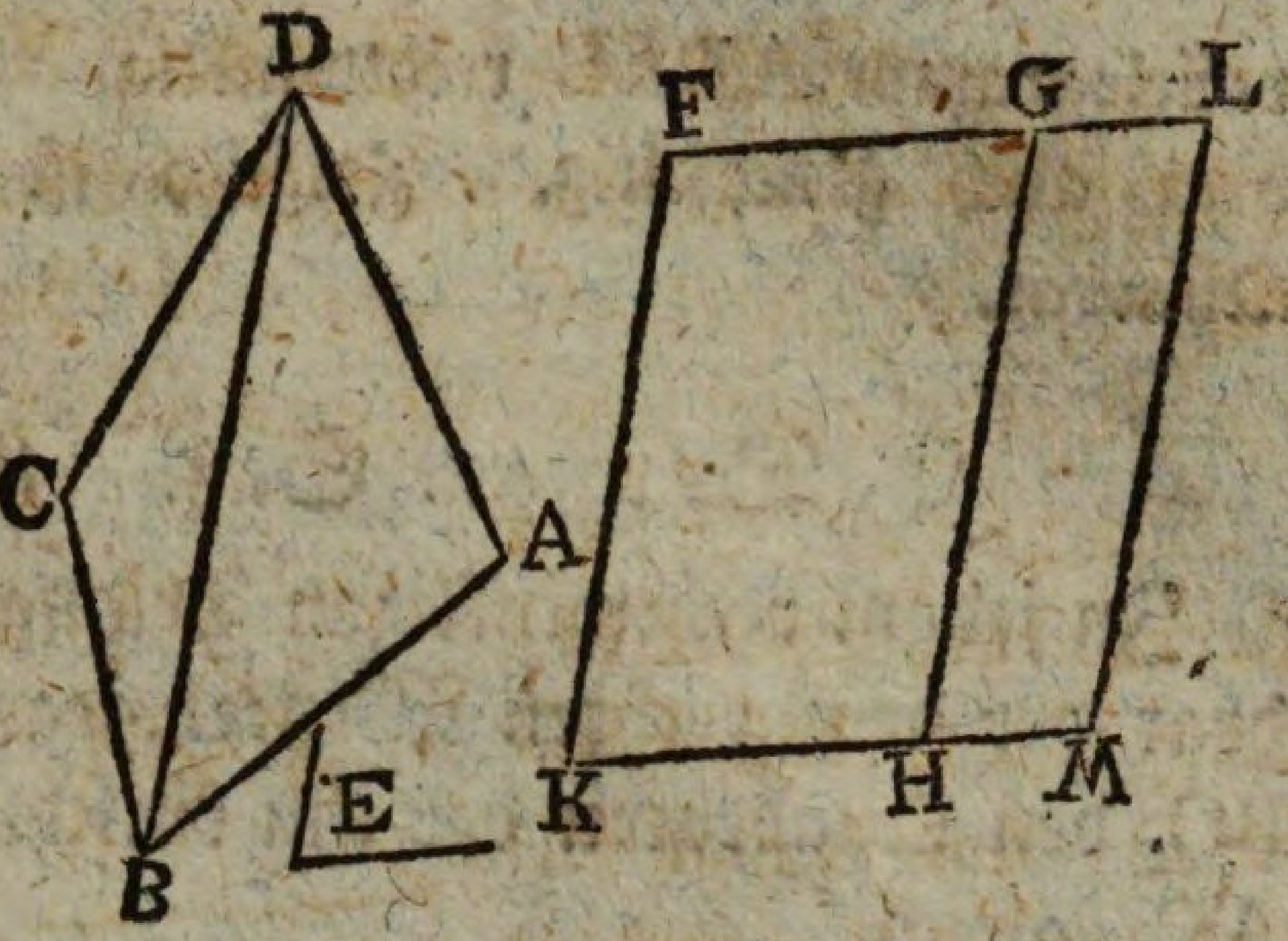
Der 45. Satz. Aufgabe.

Ein der gegebenen geradlinigen Figur, ABCD, gleiches Parellelogramm unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, E, zu beschreiben.

Ziehe DB. Mache (42. S.) das Parallelogramm FH $=$ $\triangle$ ABD, so daß FKH = E. Auf GH beschreibe (44. S.) das Parallelogramm GM $=\triangle$ DBC, so daß GHM = E: so ist KFLM das verlangte Parallelogramm.

Denn

Denn hiernach ist (1. G.) GHM = E = FKH, folglich, wenn GHK hinzukommt, (2. G.) GHM + GHK = FKH + GHK = (29. S.) 2 R. Folglich sind (14. S.) KH, HM, in gerader Linie.



Da FG, KM, parallel: so ist (29. S.) FGH = GHM, folglich FGH + LGH = GHM + LGH = (29. S.) 2 R. Folglich sind (14. S.) FG, GL, in gerader Linie.

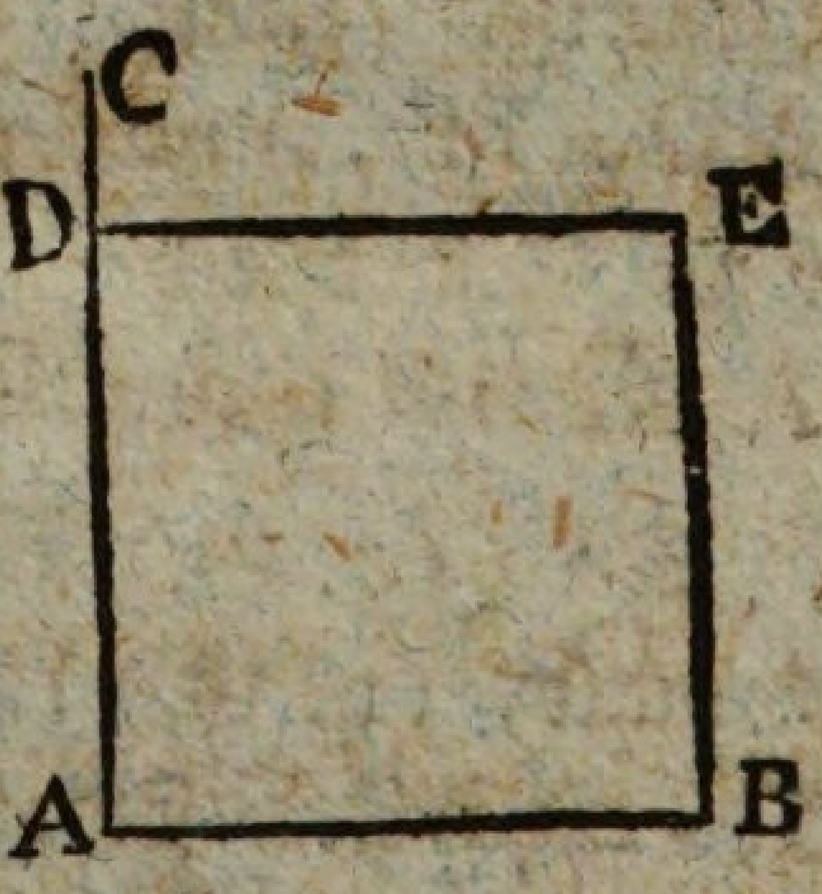
Da (34. S.) FK der GH, und GH der LM gleich und parallel: so ist (1. G. u. 30. S.) FK, der LM, gleich und parallel. Folglich sind (33. S.) FL, KM, auch gleich und parallel; folglich ist KFLM ein Parallelogramm, dessen Winkel FKM = E.

Da FH = △ ABD, und GM = △ DBC: so ist (2. G.) KFLM = ABCD.

Der 46. Satz. Aufgabe.

Einer gegebenen geraden Linie, AB, Quadrat zu beschreiben.

Auf AB errichte (11. S.) in A den Perpendikel AC. Mache AD = AB. Ziehe (31. S.) durch D der AB die DE, und durch B der AD die BE parallel; so ist ADEB das verlangte Quadrat.



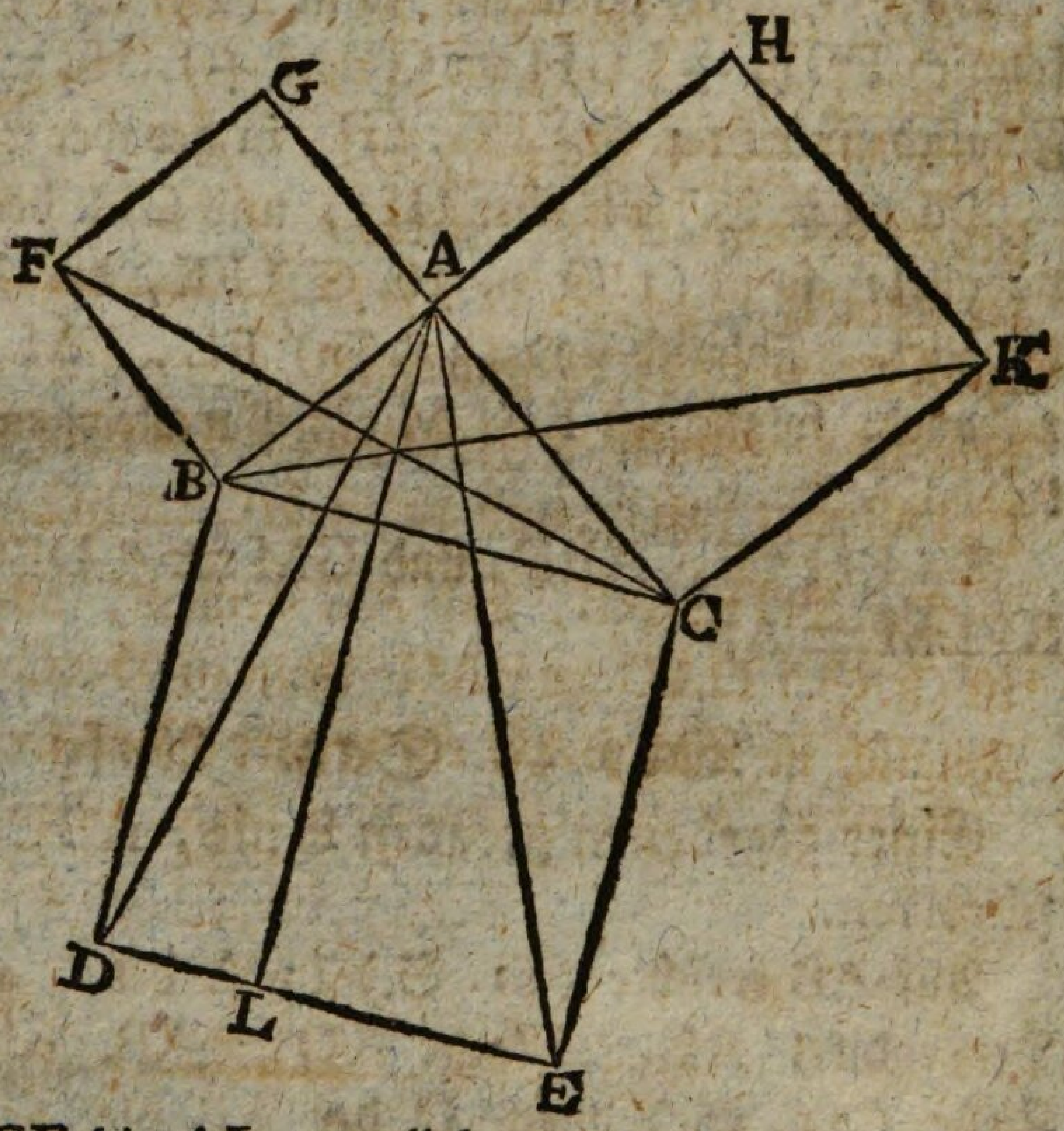
Denn hiernach ist ADEB ein Parallelogramm, folglich (34. S.) die gegenüberliegenden Seiten einander gleich. Nun ist AB = AD. Folglich ist das Parallelogramm ADEB gleichseitig.

Da AB, DE, parallel: so ist (29. S.) A + D = 2 R., folglich, da A = R., auch D = R. Nun sind (34. S.) die gegenüberliegenden Winkel gleich. Folglich ist das Parallele-

rallelogramm ADEB rechtwinklig. Nun war es nach Obigem auch gleichseitig. Folglich ist ADEB (30. E.) ein Quadrat.

Der 47. Satz. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einschließenden Seiten, BA, AC, gleich.



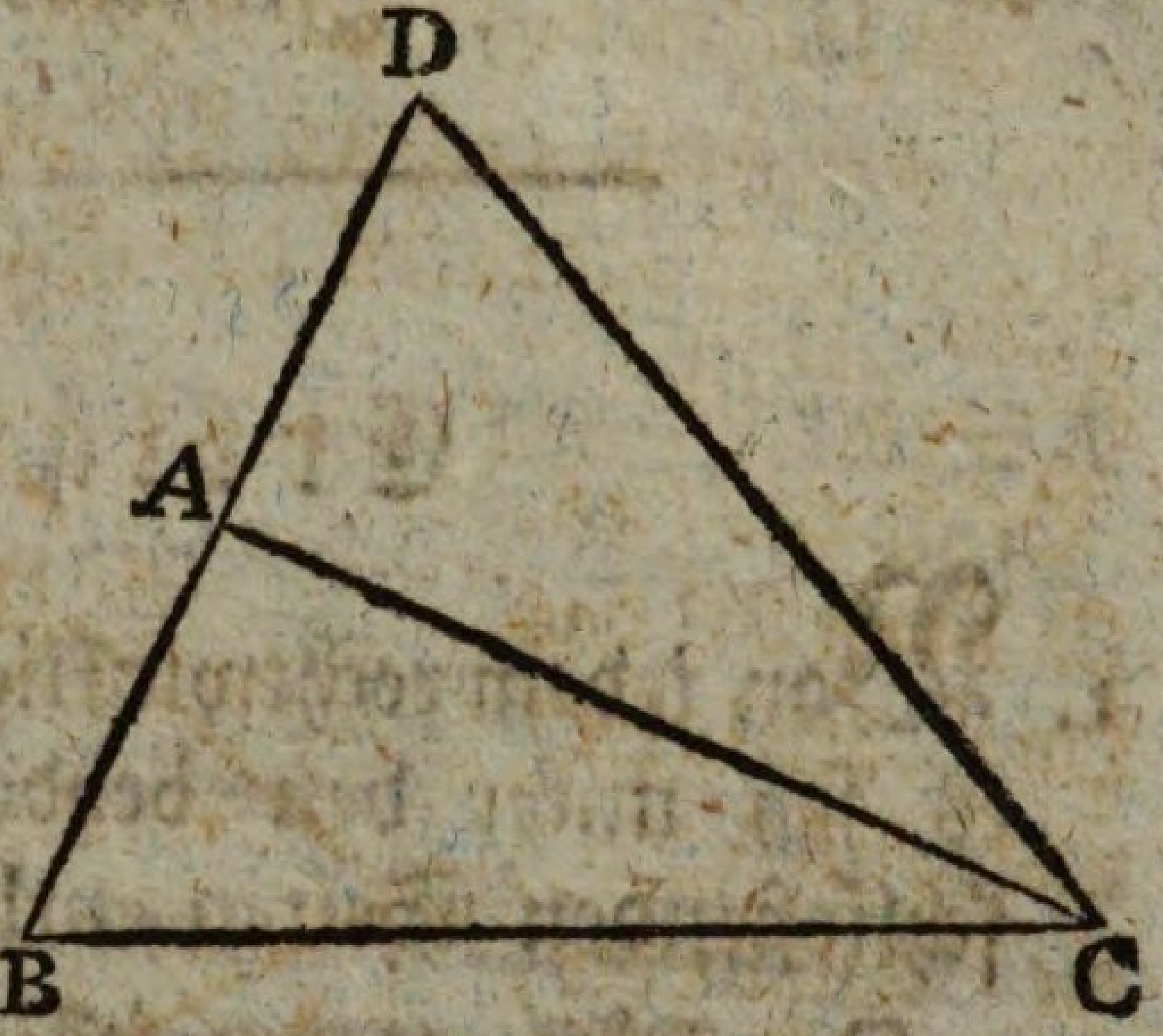
Beschreibe (46. S.) von BC das Quadrat BDEC, und von BA, AC, die Quadrate, GB, HC: so sind BAC, BAG, CAH, rechte Winkel, daß also (14. S.) sowohl CA mit AG, als auch BA mit AH, in gerader Linie ist. Ziehe AD, FC, und (31. S.) durch A der BD oder CE die AL parallel.

Da (10. G.) DBC = FBA, so ist, wenn CBA hinzukommt, (2. G.) DBA = FBC. Nun ist AB = BF, und DB = BC. Folglich ist (4. S.) △ ABD = △ FBC. Nun ist, weil AL der BD, und GC der FB parallel, (41. S.) BL = 2 △ ABD, und GB = 2 △ FBC. Folglich ist (6. G.) BL = GB. Nun ist, wenn man AE, BK, ziehet, aus eben den Gründen, CL = CH. Folglich ist (2. G.) BDEC = GB + CH.

Der

Der 48. Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel, ABC, das Quadrat einer seiner Seiten, BC, den Quadraten der beyden übrigen Seiten, BA, AC, gleich ist: so ist der von diesen beyden übrigen Seiten eingeschlossene Winkel, BAC, ein rechter.



Errichte (11. S.) auf AC in A den Perpendikel AD. Mache AD = AB, und ziehe DC: so ist auch □ AD = □ AB, folglich, wenn □ AC hinzukommt, (2. G.) □ AD + □ AC = □ AB + □ AC. Nun ist, weil DAC ein rechter Winkel, (47. S.) □ AD + AC = □ DC, und nach dem Angenommenen □ AB + □ AC = □ BC. Folglich ist □ DC = □ BC, und daher DC = BC.

Da AD = AB, und AC gemein, auch DC = BC: so ist (8. S.) DAC = BAC. Nun ist DAC ein rechter Winkel. Folglich ist auch BAC ein rechter Winkel.

Euklid's Elemente

Zweytes Buch.

Erklärungen.

1. Von jedem rechtwinkligen Parallelogramm sagt man, es sey unter den beyden den rechten Winkel einschließenden Seiten enthalten.

Der Kürze wegen soll in der Folge ein rechtwinkliges Parallelogramm ein **Rectangel** heißen, und wenn es z. E. unter den Seiten AB, BC, enthalten ist, durch AB ⨯ BC angedeutet werden.

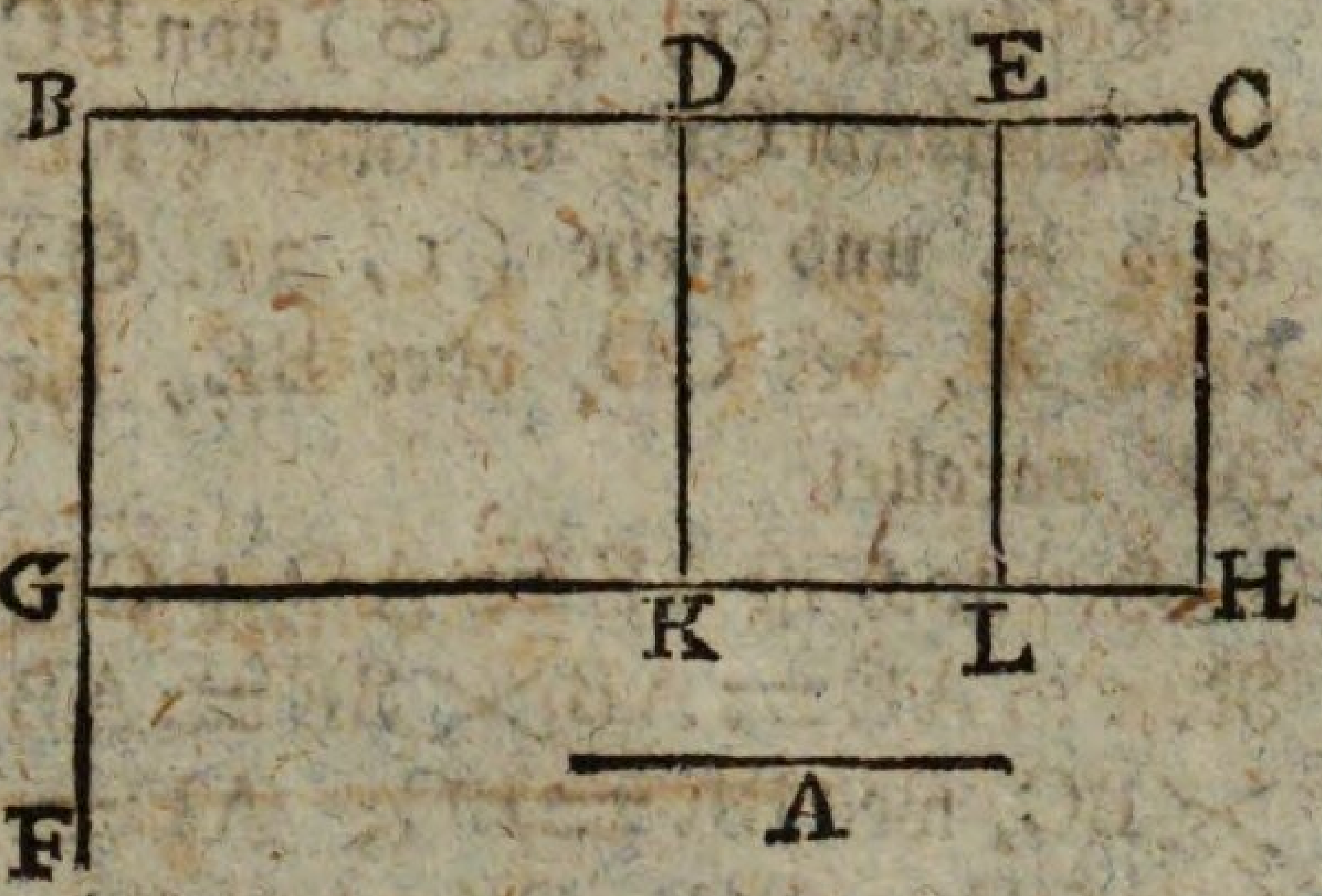
2. In einem Parallelogramm heiße ein jedes der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme mit den beyden Ergänzungen zusammen ein **Gnomon**.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Wird von zwey geraden Linien, A, BC, die eine, BC, in beliebig viele Abschnitte, BD, DE, EC, getheilt: so ist das unter den beyden Linien enthaltene Rectangel, dem unter der Ungetheilten, A, und jedem der Abschnitte, BD, DE, EC, enthaltenen Rectangeln gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf BC in B den Perpendikel BF, mache BG = A, ziehe (1, 31. S.) durch G der BC die GH, und durch D, E, C, der BG die DK, EL, CH, parallel.

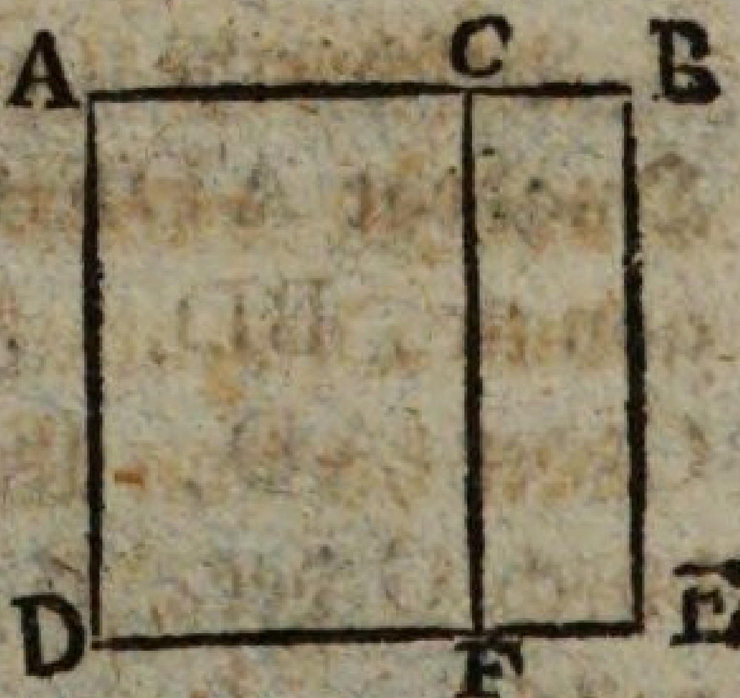
Hier-



Hiernach ist das Rectangel BH = BK + DL + EH. Nun ist BH = GB × BC = A × BC, weil GB = A; BK = GB × BD = A × BD; weil GB = A; DL = KD × DE = A × DE, weil KD = GB = A; EH = LE × EC = A × EC, weil LE = GB = A. Folglich ist A × BC = A × BD + A × DE + A × EC.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so sind die unter der Ganzen, AB, und jedem der beyden Abschnitte, AC, CB, enthaltenen Rectangel, dem Quadrate der Ganzen, AB, gleich.



Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, oder BE, die CF parallel.

Hiernach ist ADEB = AF + CE. Nun ist ADEB = □ AB; AF = DA × AC = AB × AC, weil DA = AB; CE = BE × CB = AB × CB, weil BE = AB. Folglich ist □ AB = AB × AC + AB × CB.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das unter der Ganzen, AB, und einem der beyden Abschnitte, BC, enthaltene Rectangel, dem unter beyden Abschnitten, AC, CB, enthaltenen Rectangel samt dem Quadrate des vorgedachten Abschnittes, BC, gleich.

Be-

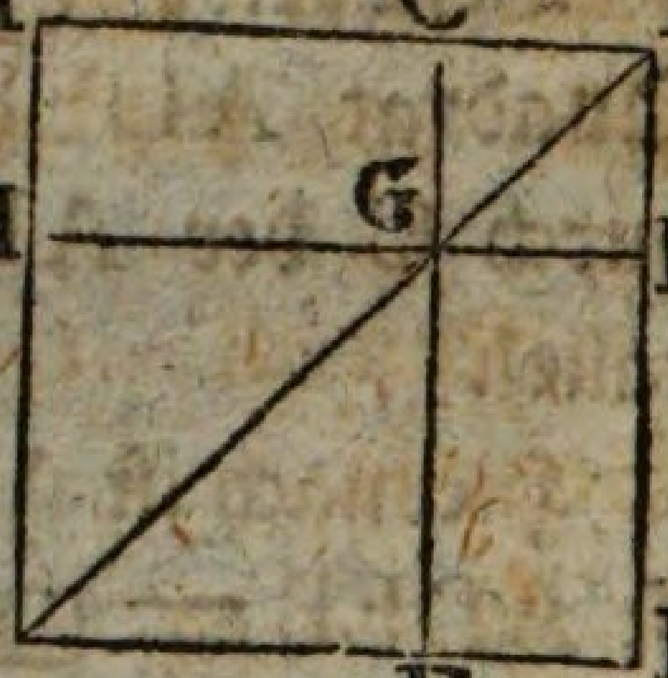
Beschreibe (1, 46. S.) von BC das Quadrat CE, verlängere ED nach F, und ziehe (1, 31. S.) durch A, der CD, oder BE, die AF parallel.

Hiernach ist AE = AD + CE. Nun ist AE = AB × BE = AB × BC, weil BE = BC; AD = AC × CD = AC × BC, weil CD = BC; CE = □ BC. Folglich ist AB × BC = AC × BC + □ BC.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten; so ist das Quadrat der Ganzen, AB, den Quadraten beyder Abschnitte, AC, CB, samt dem zwiefachen unter beyden Abschnitten, AC, CB, enthaltenen Rectangel, gleich.

Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe dessen Diagonale, BD. Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, oder BE, die CGF, und durch G der AB, oder DE, die HK parallel.



Da CF, AD parallel, so ist (1, 29. S.) BGC = BDA. Nun ist, weil AD = AB, (1, 5. S.) BDA = ABD. Folglich ist (1, 1. G.) BGC = ABD, folglich (1, 6. S.) BC = CG. Nun ist (1, 34. S.) BC der GK und CG der KB gleich. Folglich ist CK gleichseitig.

Da CG, BK, parallel: so ist (1, 29. S.) KBC + GCB = 2. R. Nun ist KBC, folglich auch GCB ein rechter Winkel, mithin auch (1, 34. S.) die ihnen gegenüberliegenden Winkel CGK, GKB rechte. Folglich ist CK rechtwinklig. Nun war es auch gleichseitig. Folglich ist (1, 30. E.) CK ein Quadrat, dessen Seite BC.

Auf

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch HF ein Quadrat, dessen Seite HG = AC.

Da (1, 43. S.) AG = GE, aber AG = AC × CG = AC × CB, weil CG = CB: so ist auch GE = AC × CB, folglich AG + GE = 2 (AC × CB). Nun ist HF + CK + AG + GE = ADEB = □ AB, und nach dem Erwiesenen HF = □ AC; CH = □ CB; AG + GE = 2 (AC × CB). Folglich ist □ AB = □ AC + □ CB + 2 (AC × CB).

Anderer Beweis.

Da AB = AD: so ist ABD = ADB = $\frac{1}{2}$ R., weil ABD + ADB + BAD = 2 R., und BAD = R. Nun ist (1, 29. S.) BCG = BAD = R. Folglich ist auch BGC = $\frac{1}{2}$ R. = ABD, folglich (1, 6. S.) BC = CG, folglich CK gleichseitig; aber, wegen BCG = R., auch rechtwinklig; folglich ein Quadrat, dessen Seite BC. Eben so wird bewiesen, daß HF ein Quadrat, dessen Seite AC.

Nun ist (1, 43. S.) AG = GE u. s. w., wie im ersten Beweise.

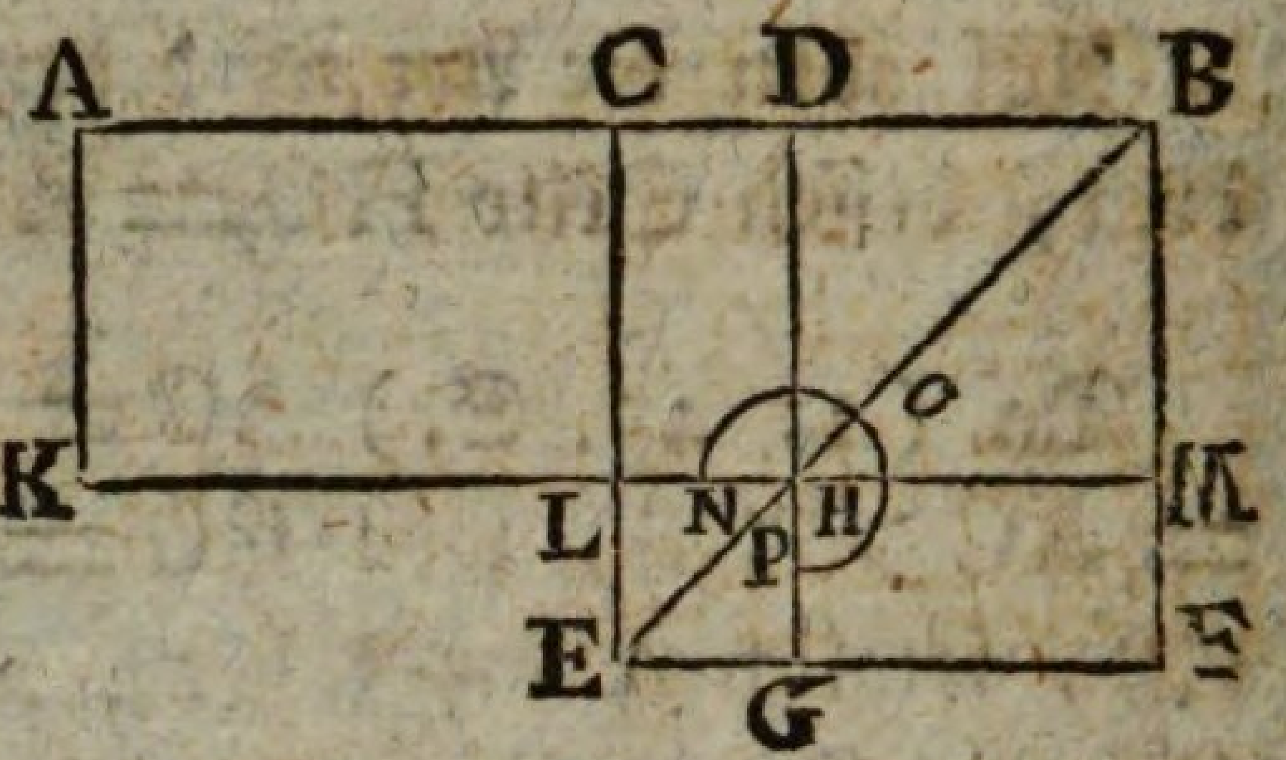
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale liegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, bey C, in gleiche, und, bey D, in ungleiche Stücke geschnitten: so ist das unter den ungleichen Stücken, AD, DB, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks, CD, dem Quadrate der halben Linie, CB, gleich.

Beschreibe (1, 46. S.) von CB das Quadrat CEFB, dessen Diagonale EB. Ziehe (1, 31. S.) durch D der CE, oder BF, die DHG, durch H der CB, oder EF, die KLM, und durch A der CE, oder BM, die AK parallel.

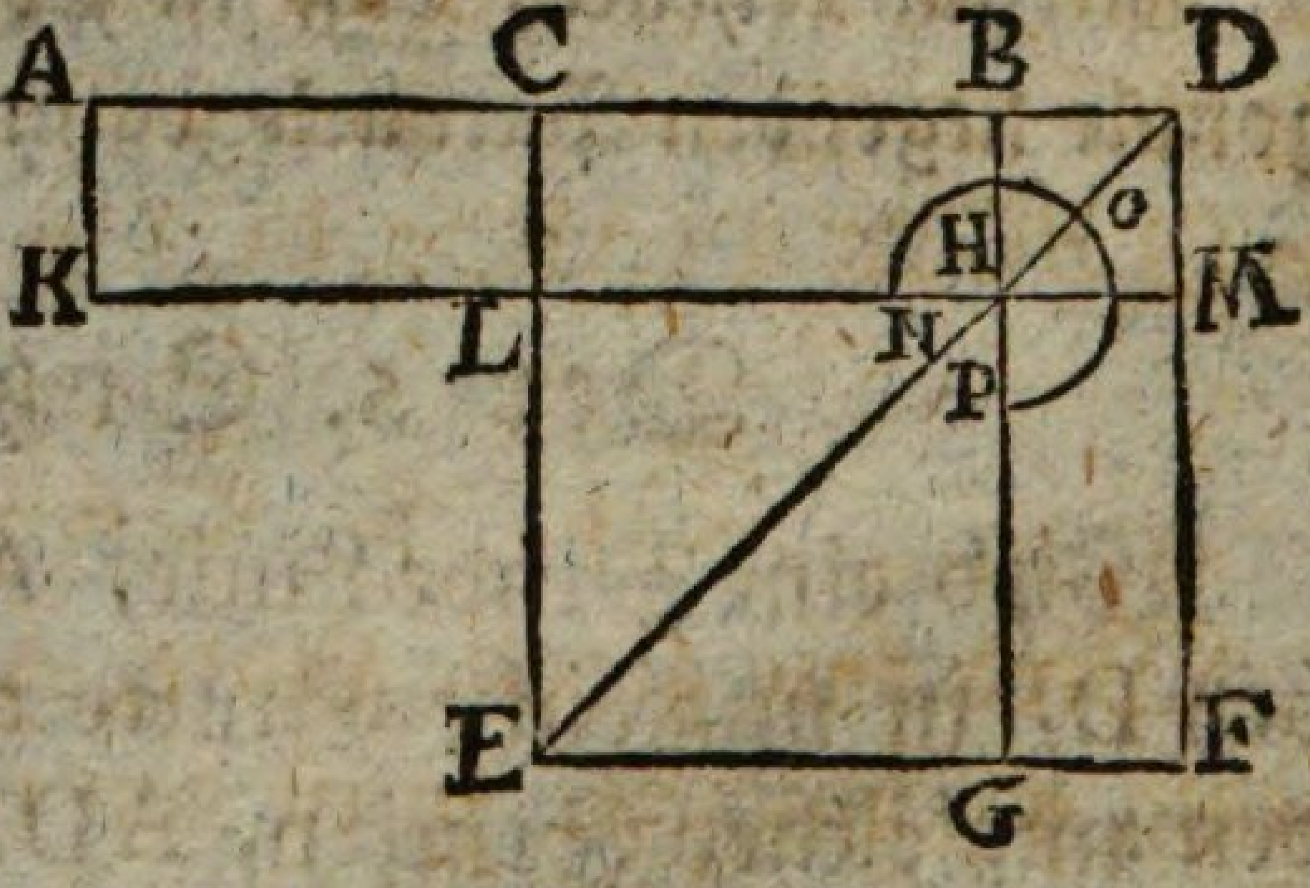


Da (1, 43. S.) CH = HF: so ist, wenn DM hinzukommt, (1, 2. G.) CM = DF. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) AL = CM. Folglich ist (1, 1. G.) AL = DF, folglich, wenn CH hinzukommt, AH = Gnomon NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, AH + LG = CEFB. Nun ist AH = AD × DH = AD × DB, weil DH = DB; LG (2, 4. Zus.) = □ LH = □ CD, weil LH = CD; CEFB = □ CB. Folglich ist AD × DB + □ CD = □ CB.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, halbirt, und ihr eine andere, BD, gerade fort angesetzt: so ist das unter der Angesetzten, BD, und der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, AD, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate der Hälfte, CB, dem Quadrate der aus der Hälfte und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, CD, gleich.

Beschreibe (1, 46. S.) von CD das Quadrat CEFD, dessen Diagonale DE. Ziehe (1, 31. S.) durch B der CE oder DF, die BHG; durch H der AD oder EF, die KLM; und durch A der CL oder DM, die AK parallel..

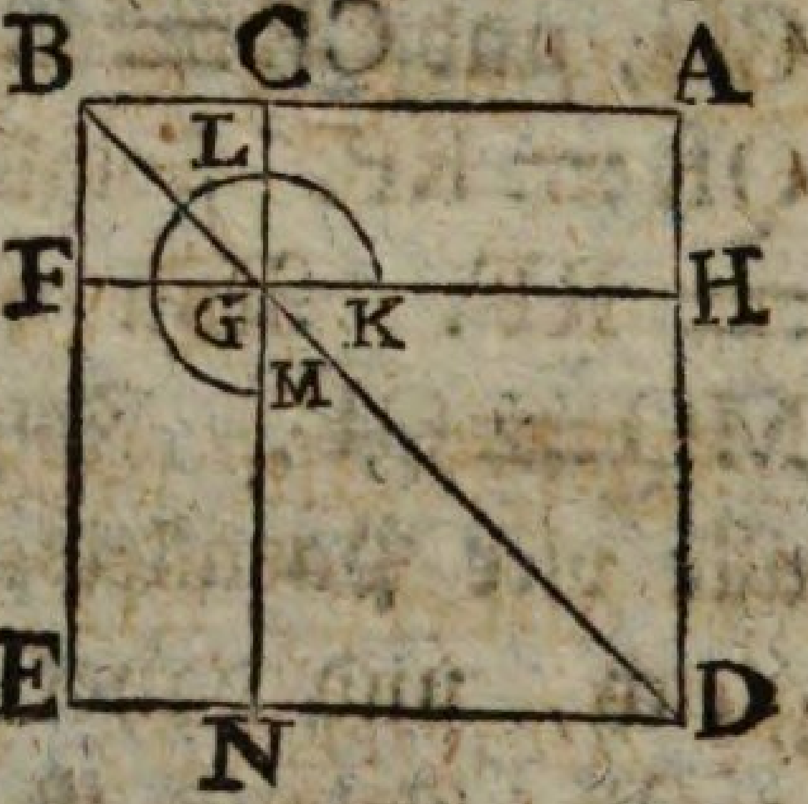


Da AC = CB, und daher (1, 36. S.) AL = CH, aber (1, 43. S.) CH — HF: so ist (1, 1. G.) AL = HF; folglich, wenn CM hinzukommt, (1, 2. G.) AM = Gnomon NOP,

NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, AM + LG = CEFD. Nun ist AM = AD × DM = AD × BD, weil DM = BD; LG (2, 4. Zus.) = □ LH = □ CB; weil LH = CB; CEFD = □ CD. Folglich ist AD × BD + □ CB = □ CD.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem Punkte, C, beliebig geschnitten: so sind die beyden Quadrate der Ganzen, AB, und des einen Abschnitts, BC, zusammen, dem zwiefachen unter der Ganzen, AB, und dem gedachten Abschnitte, BC, enthaltenen Rectangel, samt dem Quadrate des übrigen Abschnitts, AC, gleich.

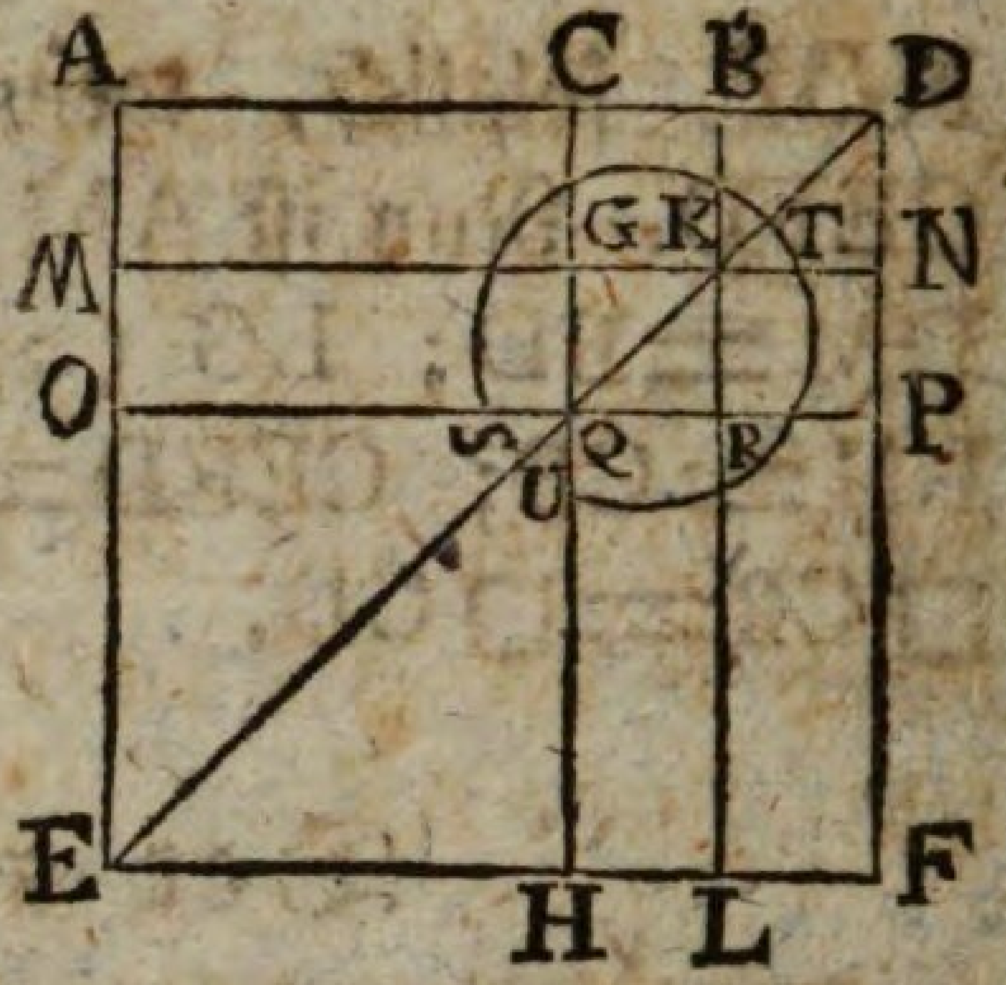


Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und vollende die Figur.

Da (1, 43. S.) AG = GE, so ist, wenn CF hinzukommt, AF = CE, folglich AF + CE = 2 AF. Nun ist AF + CE = Gnomon KLM + CF. Folglich ist Gnomon KLM + CF = 2 AF, folglich, wenn HN hinzukommt, ADEB + CF = 2 AF + HN. Nun ist ADEB = □ AB; CF (2, 4. Zus.) = □ BC; AF = AB × BF = AB × BC, weil BF = BC; HN (2, 4. Zus.) = □ HG = □ AC, weil HG = AC. Folglich ist □ AB + □ BC = 2 (AB × BC) + □ AC.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem Punkte, C, beliebig geschnitten: so ist das vierfache unter der Ganzen, AB, und einem der Abschnitte, BC, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate des übrigen Abschnitts, AC, dem Quadrate der aus der Ganzen, AB, und dem erstgedachten Abschnitte, BC, bestehenden geraden Linie, AD, gleich.



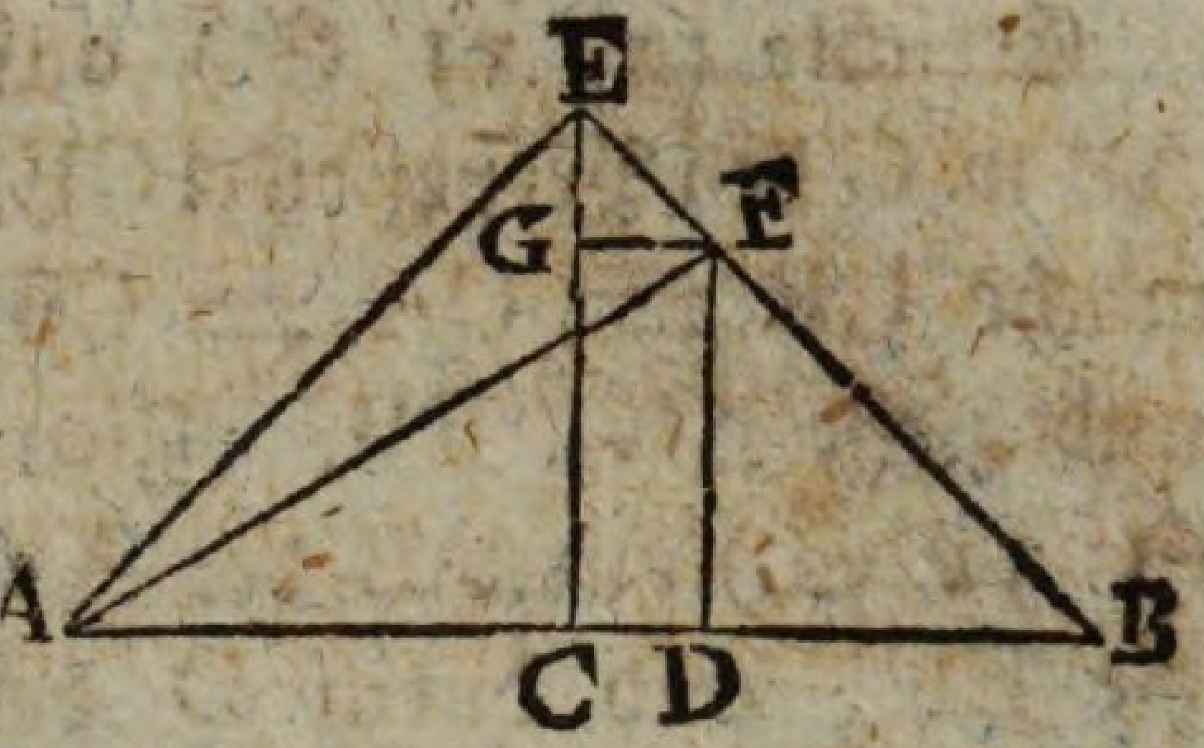
Verlängere AB bis BD = BC: so besteht AD aus der Ganzen AB, und dem erstgedachten Abschnitte BC = BD. Beschreibe (1, 46. S.) von AD das Quadrat AEFD, und vollende die Figur.

Da CB = BD, aber (1, 34. S.) BC = GK = QR, und BD = KN = RP: so ist (1, 1. G.) GK = KN, und QR = RP. Folglich (1, 36. S.) CK = BN, und GR = KP. Nun ist (1, 43. S.) CK = KP. Folglich sind alle vier Parallelogramme einander gleich, folglich CP = 4 CK.

Da CB = BD, aber (2, 4. Zus.) BD = BK = (1, 34. S.) CG, und CB = GK = GQ: so ist CG = GQ. Auch war QR = RP. Folglich ist (1, 36. S.) AG = MQ, und QL = RF. Nun ist im Parallelogramme ML (1, 43. S.) MQ = QL. Folglich ist auch AG = RF. Demnach sind alle vier Parallelogramme AG, MQ, QL, RF, einander gleich, und daher zusammen = 4 AG. Nun war CP = 4 CK. Folglich ist Gnomon STU = 4 AK; folglich, wenn OH hinzukommt, AEFD, das ist □ AD = 4 AK + OH. Nun ist AK = AB × BK = AB × BC, weil BK = BC, und OH (2, 4. Zus.) = □ OQ = □ AC, weil OQ = AC. Folglich ist □ AD = 4 (AB × BC) + □ AC.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, bey C, in gleiche, und, bey D, in ungleiche Stücke geschnitten: so sind die beyden Quadrate der ungleichen Stücke, AD, DB, doppelt so groß, als die beyden Quadrate der Hälfte, AC, und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks, CD.



Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CE, mache CE = CA = CB, und ziehe AE, BE. Ziehe (1, 31. S.) durch D der CE die DF, und durch F der AB die FG parallel. Ziehe AF.

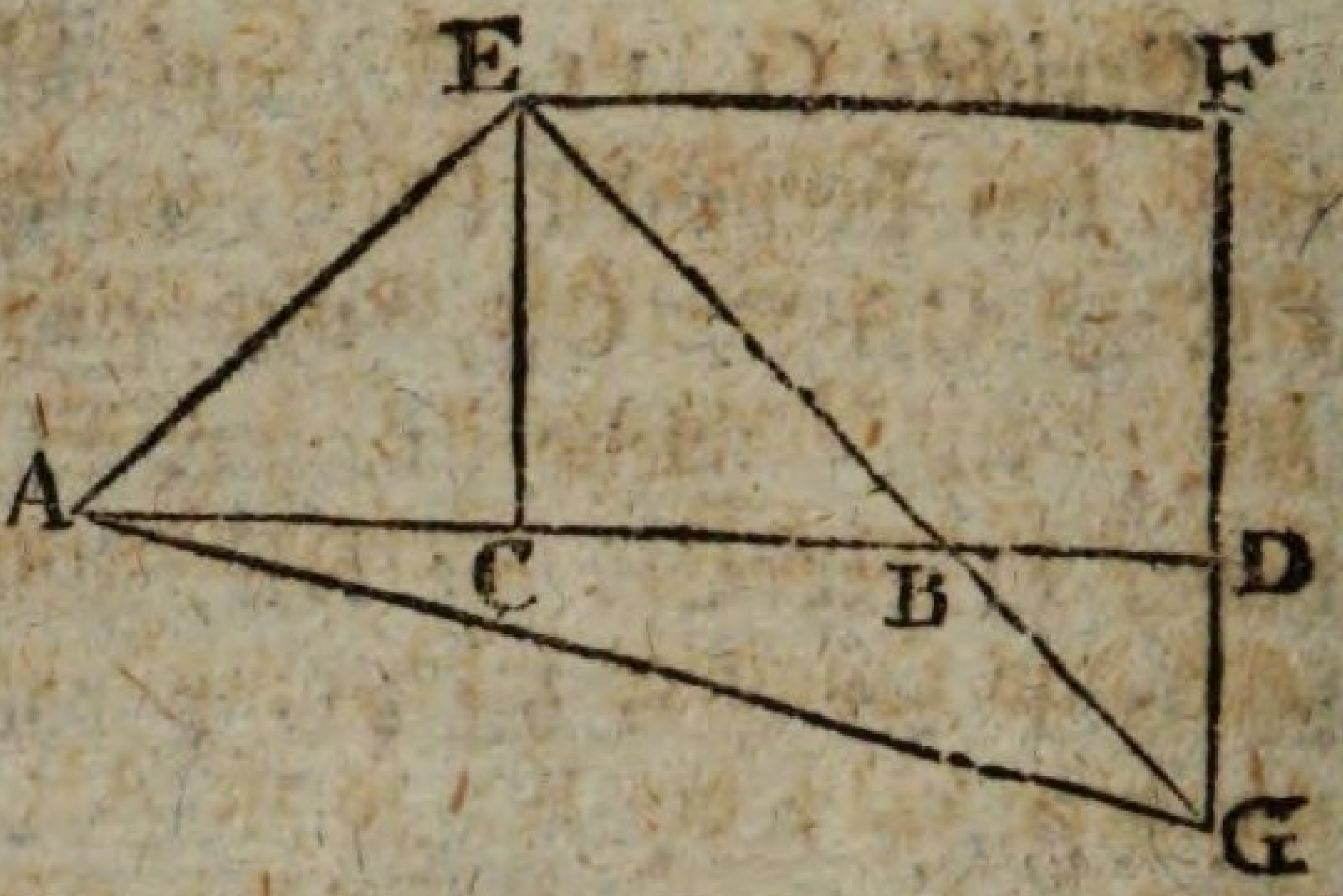
Da CE der AC und CB gleich ist, und bey C rechte Winkel sind: so ist (1, 5. S.) CEA = CAE, CEB = CBE, und (1, 32. S.) jeder dieser vier Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

Da DF der CE, und FG der CD parallel: so ist (1, 29. S.) FDB sowohl als EGF dem rechten Winkel ECB gleich, folglich beyde rechte Winkel; auch DFB = CEB = $\frac{1}{2}$ R., und GFE = DBF = $\frac{1}{2}$ R., folglich (1, 6. S.) DF = DB, und EG = GF.

Da AEC = CEB = $\frac{1}{2}$ R., also AEF = R.: so ist (1, 47. S.) □ AF = □ AE + □ EF. Nun ist, da auch bey D, C, G, rechte Winkel sind, (1, 47. S.) □ AF = □ AD + □ DF = □ AD + □ DB, weil DF = DB; □ AE = □ AC + □ CE = 2 □ AC, weil AC = CE; □ EF = □ EG + □ GF = 2 □ CD, weil EG = GF = CD. Folglich ist □ AD + □ DB = 2 □ AC + 2 □ CD.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, halbirt, und ihr eine andere, BD, gerade fort angesetzt: so sind die beyden Quadrate der Angesetzten, BD, und der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, AD, doppelt so groß, als die beyden Quadrate der Hälfte, BC, und der aus der Hälfte, und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, CD.



Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CE, mache CE = CA = CB, und ziehe AE, EB. Ziehe (1, 31. S.) durch E der AD die EF, und durch D der CE die DF parallel: so ist (1, 29. S.) CEF + EFD = 2 R., folglich BEF + EFD $<$ 2 R., folglich werden (1, 11. S.) EB, FD nach BD zu verlängert zusammentreffen. Dieß geschehe in G. Ziehe AG.

Da CE der AC und CB gleich ist, und bey C rechte Winkel sind: so ist (1, 5. S.) CEA = CAE, CBE = CEB, und (1, 32. S.) jeder dieser vier Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

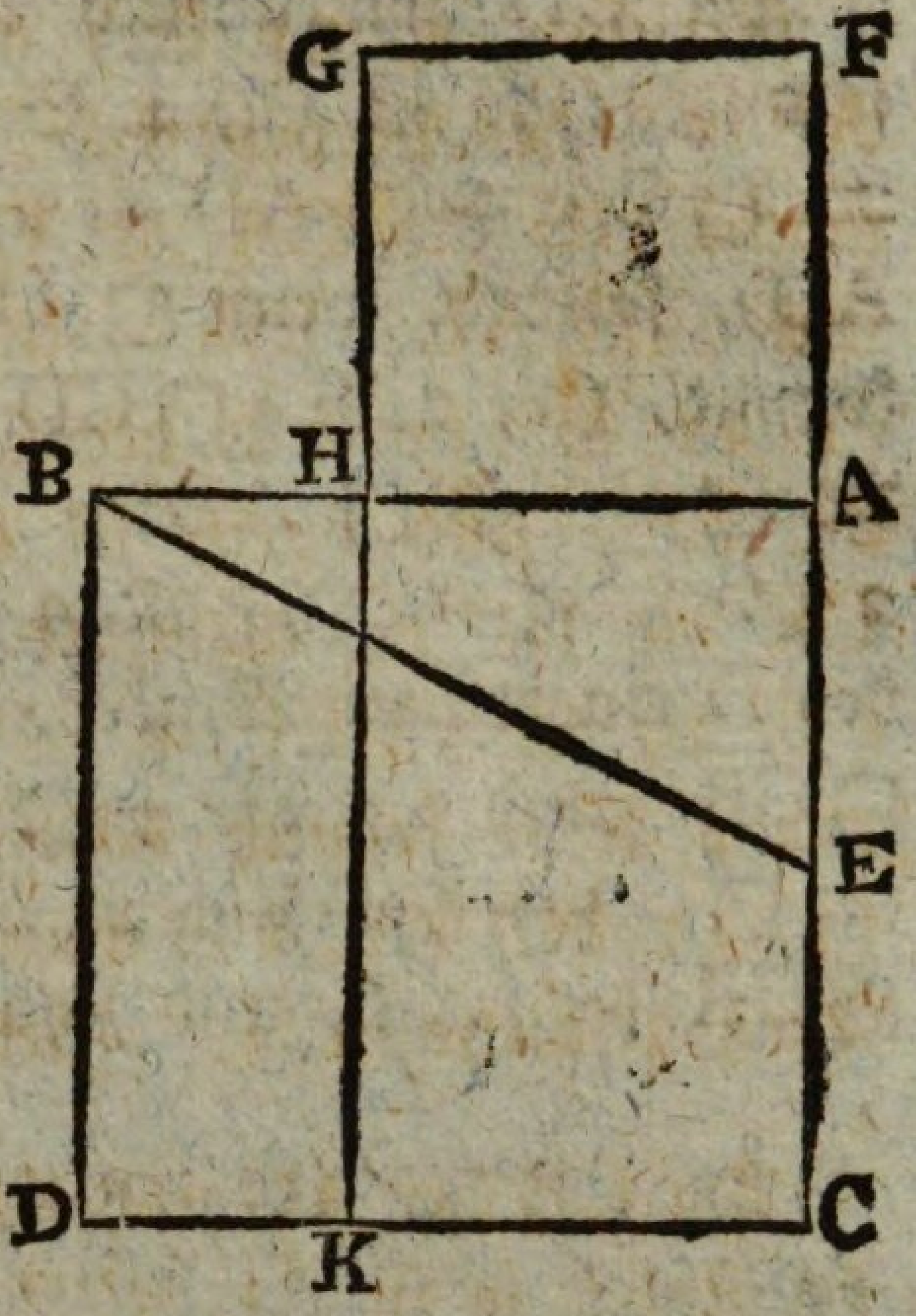
Da EF der AD, und FG der CE parallel: so ist (1, 29. S.) D = F = C = R.; DGB = BEC = $\frac{1}{2}$ R.; FEB = DBG = EBC = $\frac{1}{2}$ R. Folglich ist (1, 6. S.) DB = DG, und FG = FE.

Da AEC = CEB = $\frac{1}{2}$ R., also AEG = R.: so ist (1, 47. S.) □ AG = □ AE + □ EG. Nun ist, da auch bey D, C, F, rechte Winkel sind, (1, 47. S.) □ AG = □ AD + □ DG = □ AD + □ BD, weil DG = BD; □ AE = □ AC + □ CE = 2 □ AC, weil CE = AC; □ EG = □ FG + □ FE = 2 □ CD, weil FG = FE = CD. Folglich ist □ AD + □ BD = 2 □ AC + 2 □ CD.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie, AB, so zu schneiden, daß das unter der Ganzen und einem der beyden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrate des übrigen Abschnitts gleich sey.

Be-

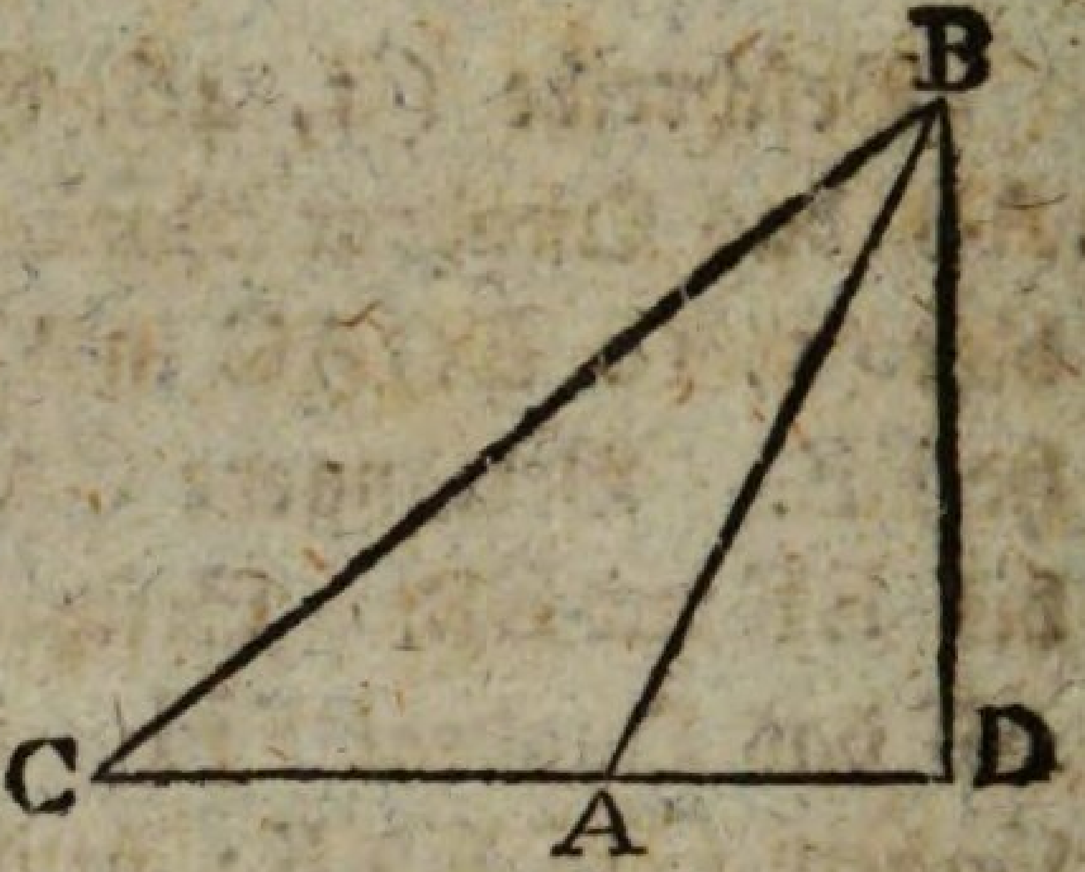


Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ABDC, halbire (1, 10. S.) AC in E, und ziehe BE. Verlängere CA nach F, bis EF = EB. Beschreibe von AF das Quadrat FH, und verlängere GH bis K: so ist AB in H so geschnitten, daß AB × BH = □ AH.

Denn da CA in E halbirt, und ihr die AF gerade fort angesetzt ist, so ist (2, 6. S.) CF × AF + □ AE = □ EF = □ EB, weil EF = EB. Nun ist BAE = R., und daher (1, 47. S.) □ EB = □ AB + □ AE. Folglich ist CF × AF + □ AE = □ AB + □ AE, folglich, wenn man □ AE wegnimmt, (1, 3. G.) CF × AF = □ AB, oder, (weil AF = FG) FK = AD; folglich, wenn man AK wegnimmt, (1, 3. G.) FH = HD. Nun ist FH = □ AH, und HD = DB × BH = AB × BH, weil DB = AB. Folglich ist AB × BH = □ AH.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

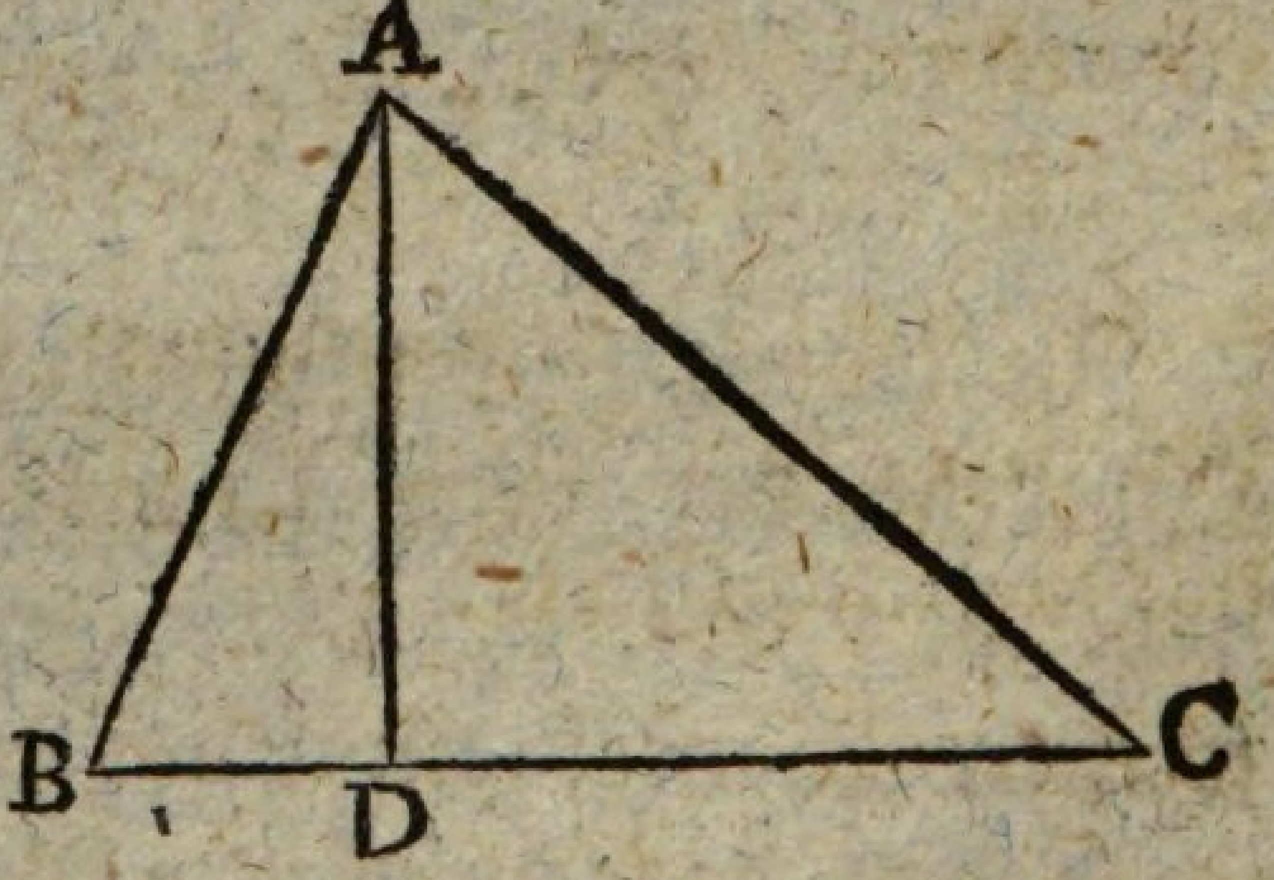
In jedem stumpfwinkligen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel, A, gegenüber liegenden Seite, BC, größer, als die Quadrate der solchen Winkel einschließenden Seiten, CA, AB; und zwar um das zwiefache Rectangel, welches unter einer der einschließenden Seiten, CA, auf deren Verlängerung der Perpendikel, BD, fällt, und dem äußern, zwischen dem Perpendikel und dem stumpfen Winkel, A, liegenden Abschnitte, AD, enthalten ist.



Da CD willkührlich in A geschnitten: so ist (2, 4. S.) □ CD = □ CA + □ AD + 2 (CA × AD), folglich, wenn □ DB hinzukommt, (1, 2. S.) □ CD + □ DB = □ CA + □ AD + □ DB + 2 (CA × AD). Nun ist, weil bey D ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □ CD + □ DB = □ CB, und □ AD + □ DB = □ AB. Folglich ist □ CB = □ CA + □ AB + 2 (CA × AD). Demnach ist □ CB > □ CA + □ AB, und zwar um 2 (CA × AD).

Der 13. Satz. Lehrsatz.

In jedem Triangel, ABC, ist das Quadrat der einem von den spitzen Winkeln, B, gegenüber liegenden Seite, AC, kleiner, als die Quadrate der diesen Winkel einschließenden Seiten, AB, BC, und zwar um das zwiefache Rectangel, welches unter einer der einschließenden Seiten, BC, auf welche der Perpendikel, AD, fällt, und dem innern, zwischen dem Perpendikel und dem spitzen Winkel, B, liegenden Abschnitte, BD, enthalten ist.



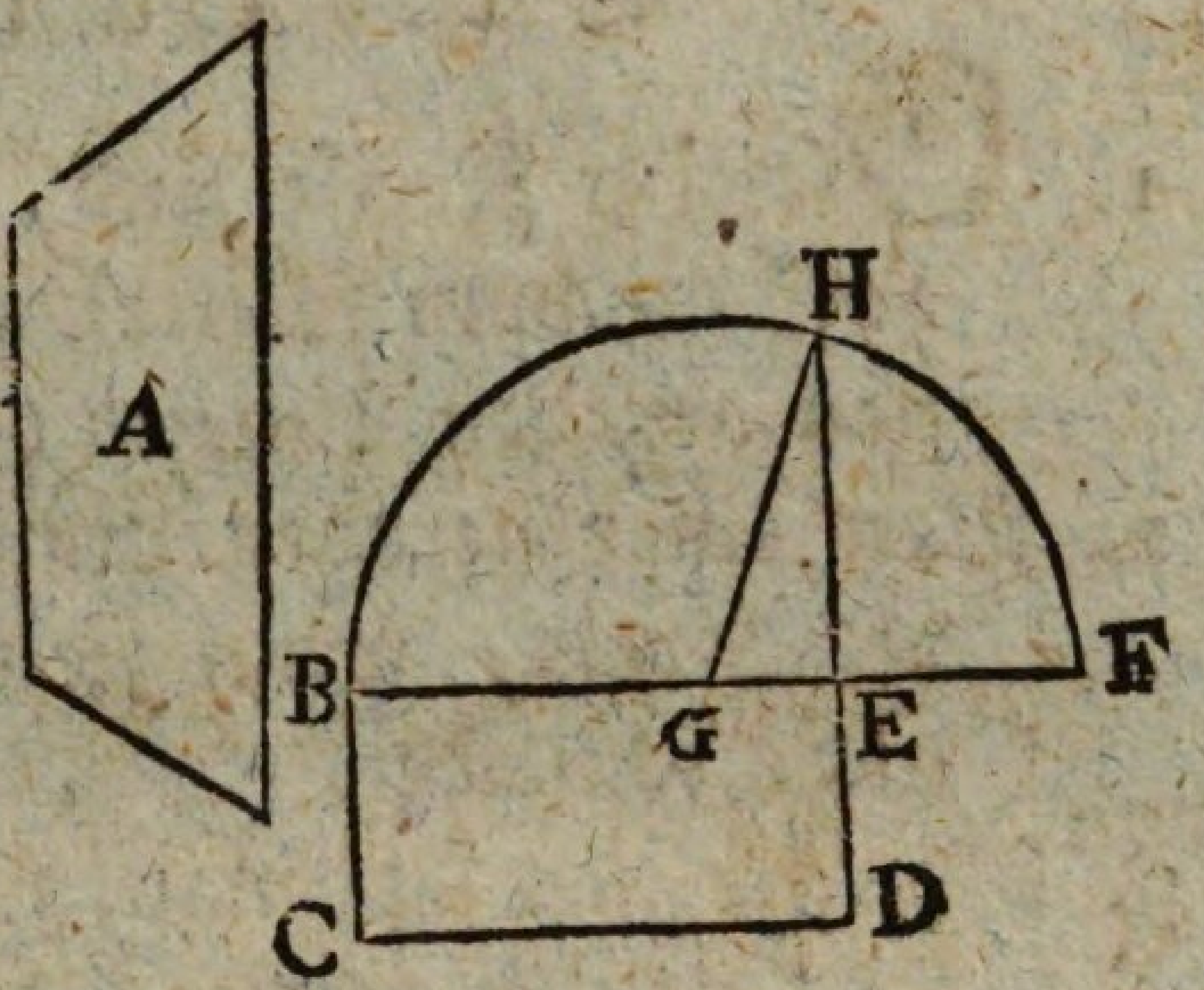
Man nehme an, daß B und C spitze Winkel sind, A mag ein spitzer, oder rechter, oder stumpfer Winkel seyn; daß folglich der Perpendikel, AD, von A auf BC, innerhalb des △ ABC falle.

Da also CB willkührlich in D geschnitten: so ist (2, 7. S.) □ CB + □ BD = 2 (CB × BD) + □ DC, folglich, wenn □ AD hinzukommt, □ CB + □ BD + □ AD = 2 (CB × BD) + □ DC + □ AD. Nun ist, weil bey D rechte Winkel, (1, 47. S.) □ BD + □ AD = □ AB, und □ DC + □ AD

□ AD = □ AC. Folglich ist □ CB + □ AB = 2 (CB × BD) + □ AC. Demnach ist □ AC < □ CB + □ AB, und zwar um 2 (CB × BD).

Der 14. Satz. Aufgabe.

Ein, jeder gegebenen geradlinigen Figur, A, gleiches Quadrat zu beschreiben.



Beschreibe (1, 45. S.) ein Rectangel BD = A. Sind nun BE, ED, einander gleich, so ist BD das verlangte Quadrat. Sind aber, BE, ED, ungleich, so verlängere eine derselben, BE, nach F, und mache EF = ED. Halbire EB in G, und beschreibe aus G mit GB, oder GF, den Halbkreis BHF. Verlängere DE bis H, und ziehe GH: so ist □ HE das Verlangte,

Denn da BF bey G in gleiche, und bey E in ungleiche Stücke geschnitten, so ist (2, 5. S.) BE × EF + □ EG = □ GF = (1, 15. E.) □ GH. Nun ist, weil bey E ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □ GH = □ HE + □ EG. Folglich ist BE × EF + □ EG = □ HE + □ EG, folglich, wenn man □ EG wegnimmt, BE × EF, oder, weil EF = ED, das Rectangel BD = □ HE. Nun war BD = A. Folglich ist A = □ HE.

Euklid's Elemente

Drittes Buch.

Erklärungen.

1. Gleiche Kreise sind, in denen die Durchmesser, oder die vom Mittelpunkte an den Umkreis gezogenen geraden Linien (die **Halbmesser**) gleich sind.
2. Von einer geraden Linie wird gesagt, sie **berühre** den Kreis, wenn sie ihn trifft und verlängert ihn nicht schneidet.
3. Von Kreisen sagt man, sie **berühren einander**, wenn sie einander treffen, ohne einander zu schneiden.
4. Im Kreise heißen gerade Linien **gleichweit vom Mittelpunkte entfernt**, wenn die aus dem Mittelpunkte auf sie gefällten Perpendikel gleich sind.
5. **Entfernter** aber heißt diejenige, auf welche der größere Perpendikel fällt.
6. Ein **Kreisabschnitt** ist die von einer geraden Linie, (der **Grundlinie**) und dem (von ihr abgeschnittenen) Umkreise begränzte Figur.
7. Der **Winkel des Abschnitts** ist der von der Grundlinie und dem Umkreise eingeschlossene.
8. Der **Winkel im Abschnitte** hingegen ist derjenige, welchen die geraden Linien einschließen, die von irgend einem Punkte auf dem Umkreise des Abschnitts nach den Endpunkten der Grundlinie gezogen sind.
9. Wenn aber die den Winkel einschließenden geraden Linien ein Stück des Umkreises (einen **Bogen**) abschneiden, so sagt man, der Winkel **stehe auf demselben**.

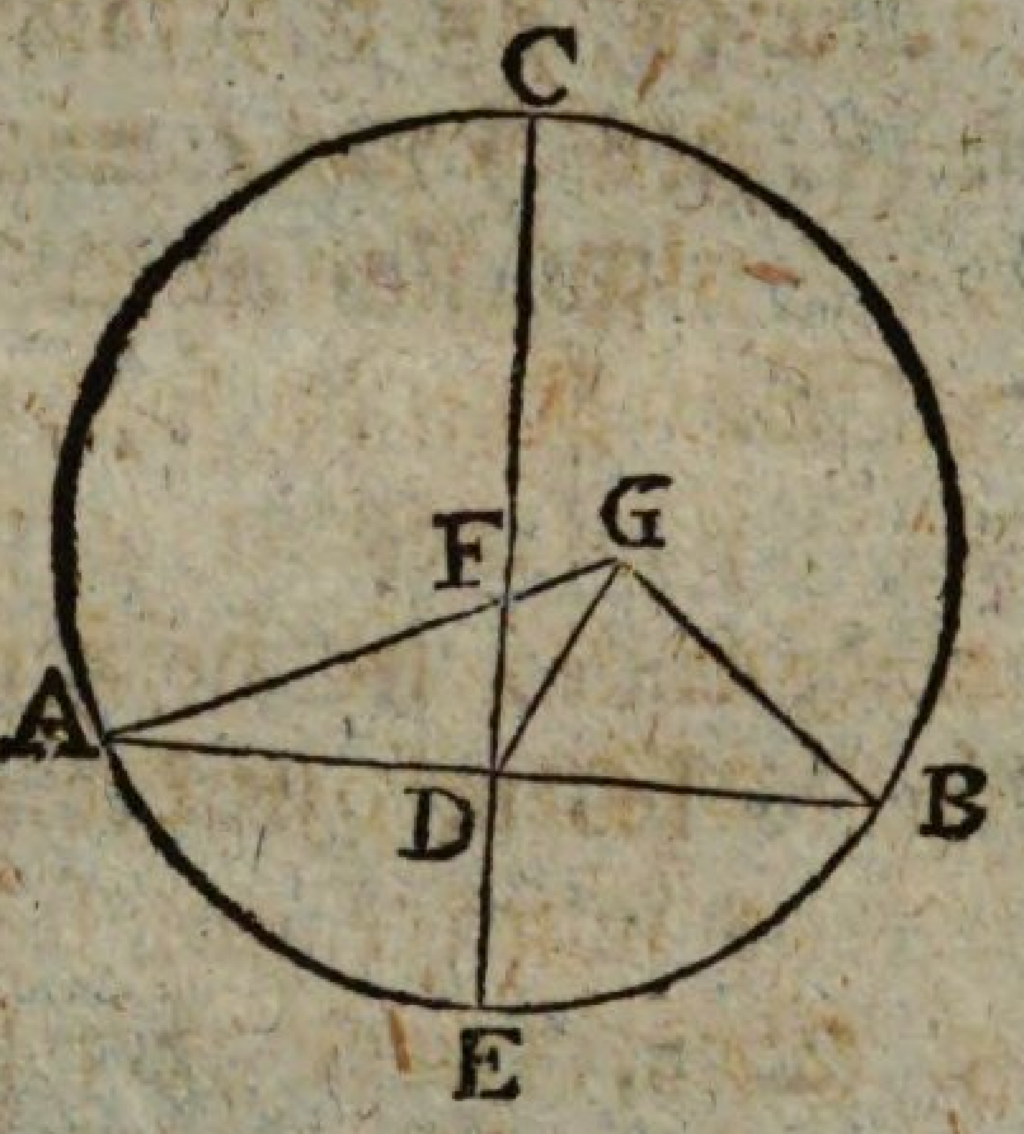
10. Ein

10. **Ein Kreisausschnitt** ist die Figur, welche von den geraden, einen Winkel am Mittelpunkte des Kreises einschließenden Linien und dem von ihnen abgeschnittenen Bogen begränzt wird.

11. **Aehnliche** Kreisabschnitte sind, welche gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel beyderseits gleich sind.

Der 1. Satz. Aufgabe.

Eines gegebenen Kreises, ABC, Mittelpunkt zu finden.



Im Kreise ziehe willkührlich eine gerade Linie AB, halbire sie in D, und errichte auf ihr in D den Perpendikel DC. Verlängere CD bis E, und halbire CE in F: so ist F der gesuchte Mittelpunkt.

Denn wäre F nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa G. Ziehe GA, GD, GB. Da AD = DB, und GD gemein, auch (1, 15. E.) AG = GB: so ist (1, 8. S.) ADG = GDB, folglich (1, 10. E.) beyde Winkel rechte. Nun ist auch CDB = R. Folglich ist (1, 10. G.) CDB = GDB, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach ist G nicht der Mittelpunkt des Kreises, und aus eben den Gründen auch kein anderer Punkt außer F. Folglich ist F des gegebenen Kreises Mittelpunkt.

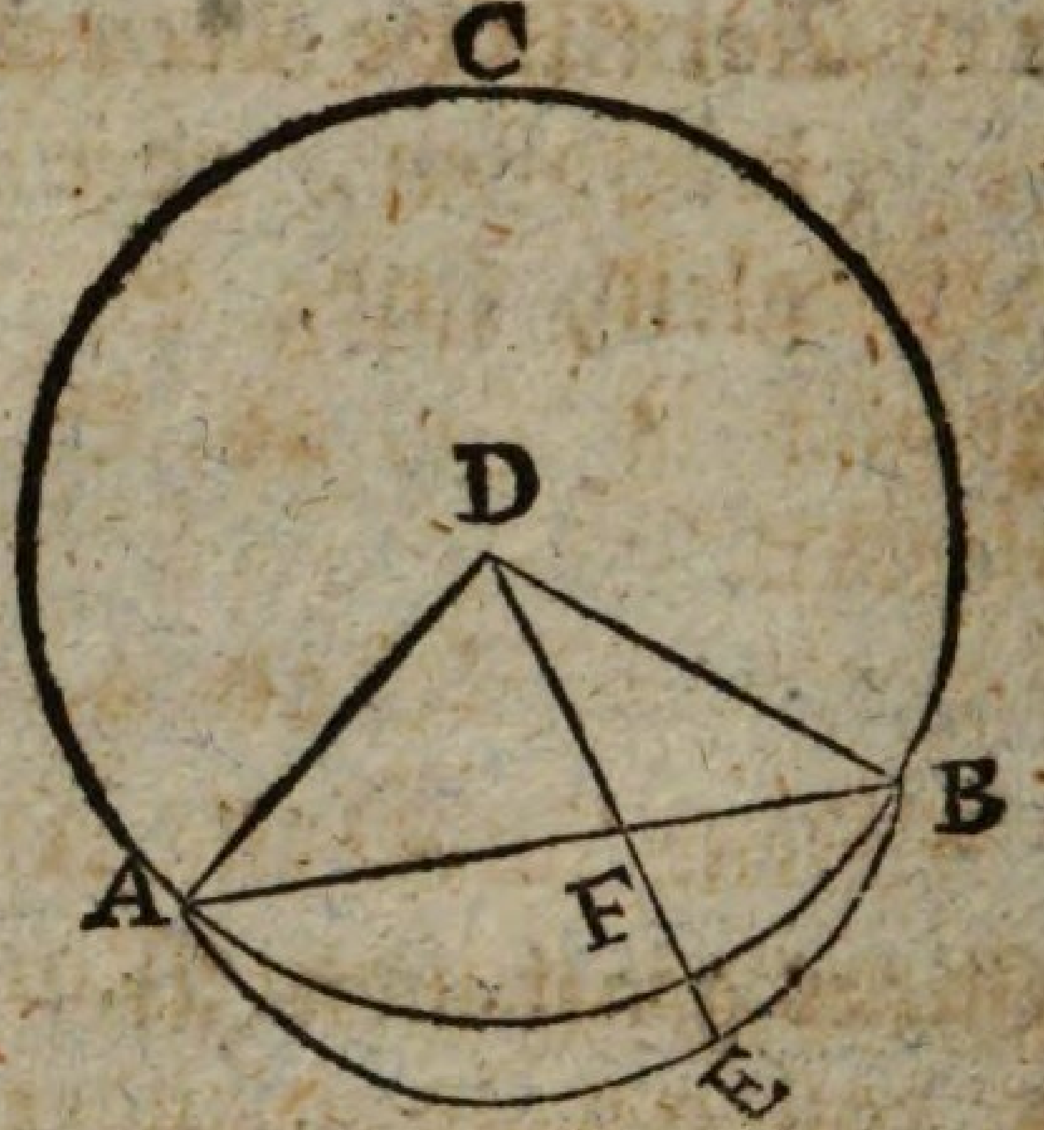
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn im Kreise eine gerade Linie von einer andern in der Mitte und unter rechten Winkeln geschnitten wird, in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises sey.

Der

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Linie, welche zwey beliebige Punkte, A, B, in dem Umringe eines Kreises, ABC, verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises.



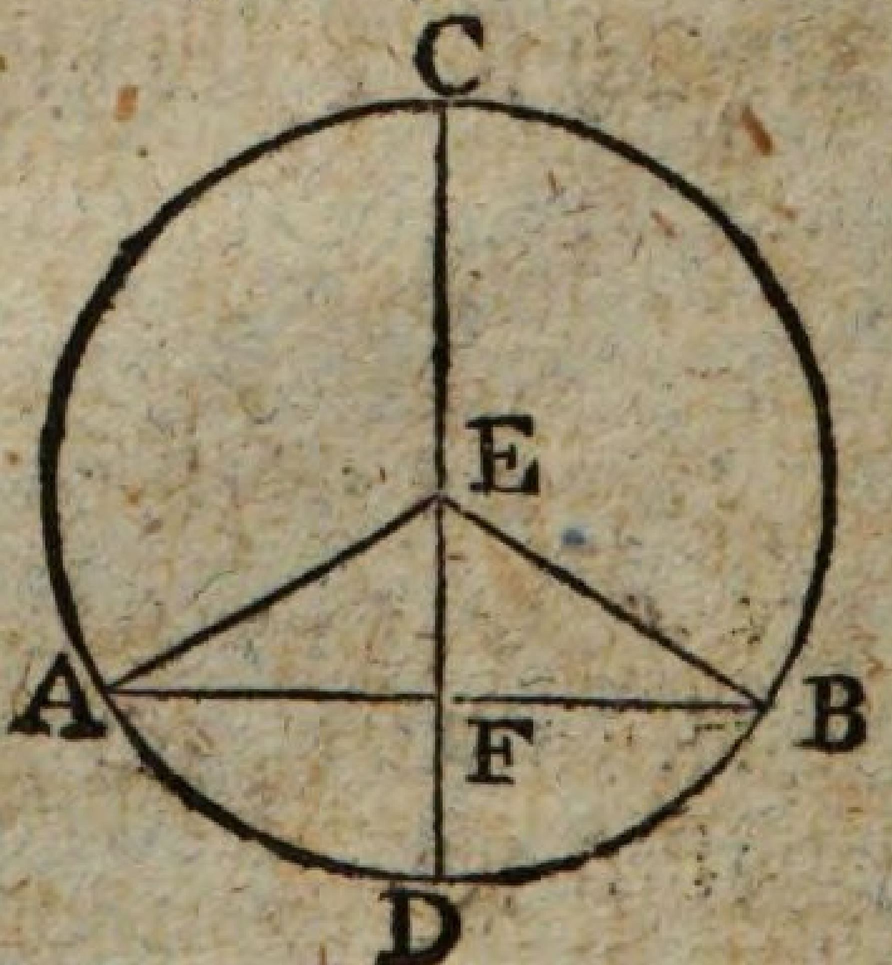
Fiele diese gerade Linie nicht innerhalb des Kreises, so falle sie außerhalb, wie AEB. Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt D, und ziehe DA, DB. Zwischen A, B, nimm in dem Umkreise willkührlich einen Punkt F, ziehe DF, und verlängere sie bis E.

Da (1, 15. E.) DA = DB, so ist (1, 5. S.) DAE = DBE. Nun ist (1, 16. S.) DEB > DAE. Folglich ist DEB > DBE, folglich (1, 19. S.) DB > DE. Nun ist (1, 15. E.) DB = DF. Folglich ist DF > DE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann die gerade Linie, welche A und B verbindet, nicht außerhalb des Kreises fallen. Eben so beweiset man, daß sie nicht auf den Umkreis fallen könne. Folglich muß sie innerhalb des Kreises fallen.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wenn im Kreise, ABC, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, CD, eine andere, nicht durch den Mittelpunkt gehende, AB, halbirt: so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln; und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet: so halbirt sie auch dieselbe.

Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, und ziehe EA, EB.



Erster Theil.

Wenn CD die AB in F halbirt: so ist AF = FB. Nun ist EF gemein, und (1, 15. E.) AE = EB. Folglich

ist

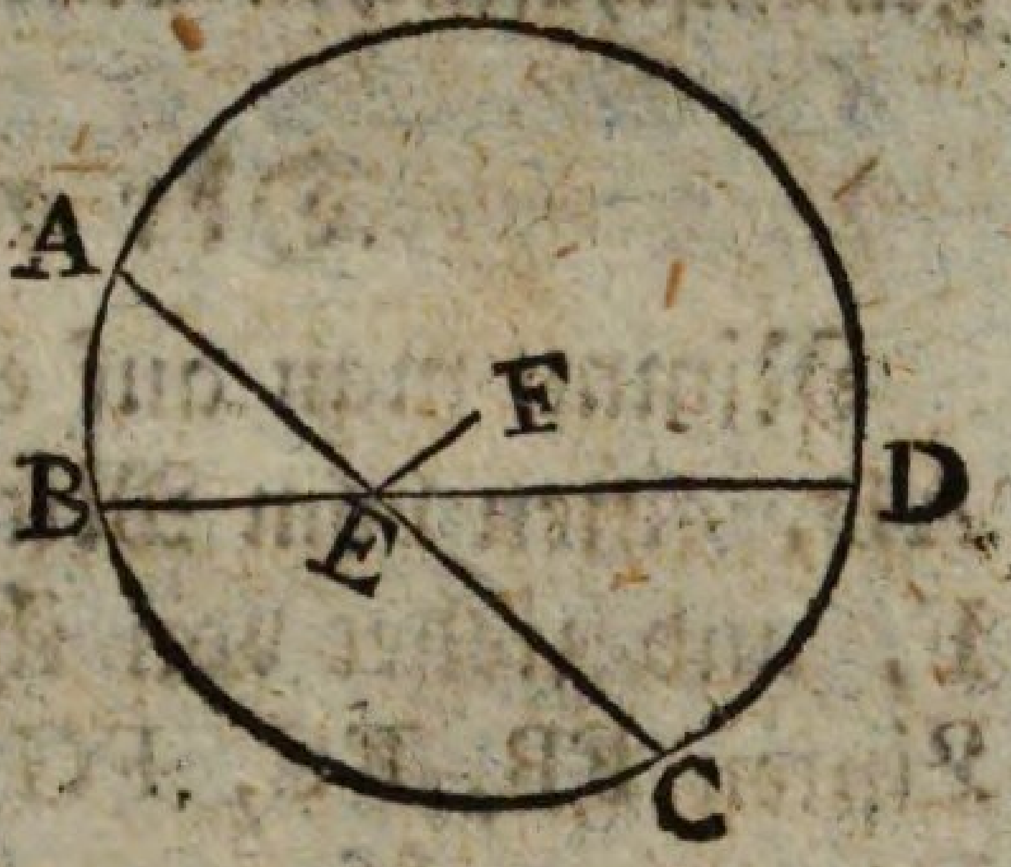
ist (1, 8. G.) AFE = EFB, folglich (1, 10. E.) schneidet CD die AB unter rechten Winkeln.

Zweyter Theil.

Wenn CD die AB unter rechten Winkeln schneidet: so ist (1, 10. E.) AFE = EFB. Nun ist, weil (1, 15. E.) AE = EB, (1, 5. G.) EAF = EBF, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 26. G.) AF = FB, das ist, CD halbirt die AB.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

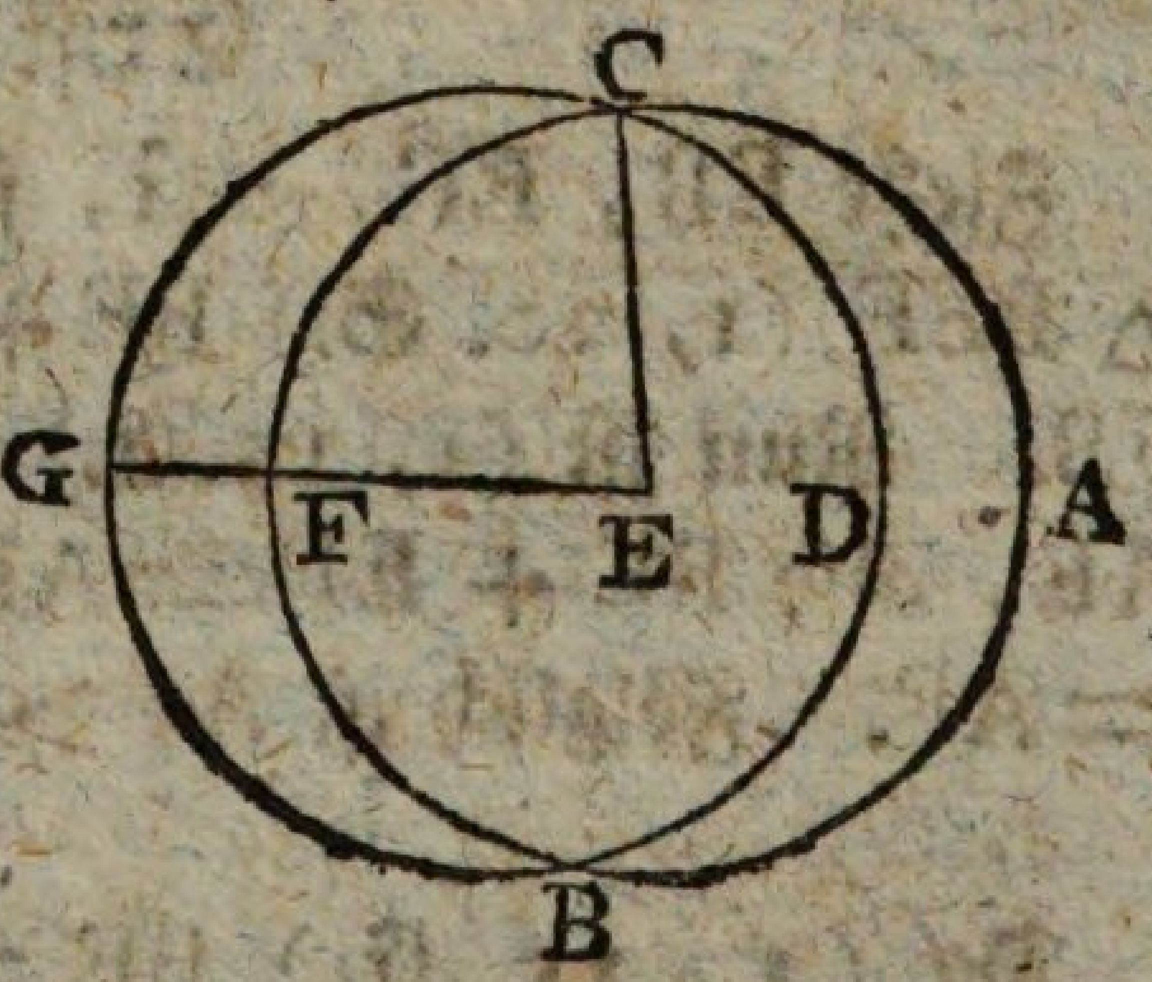
Wenn im Kreise, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden: so halbiren sie einander nicht.



Gesetzt, sie halbirten einander, so daß AE = EC, und BE = ED: so ist, wenn man des Kreises Mittelpunkt F nimmt, und FE ziehet, (3, 3. G.) FEA sowohl, als FEB ein rechter Winkel, folglich FEA = FEB, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können AC, BD, einander nicht halbiren.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Zwey Kreise, ABC, CDG, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

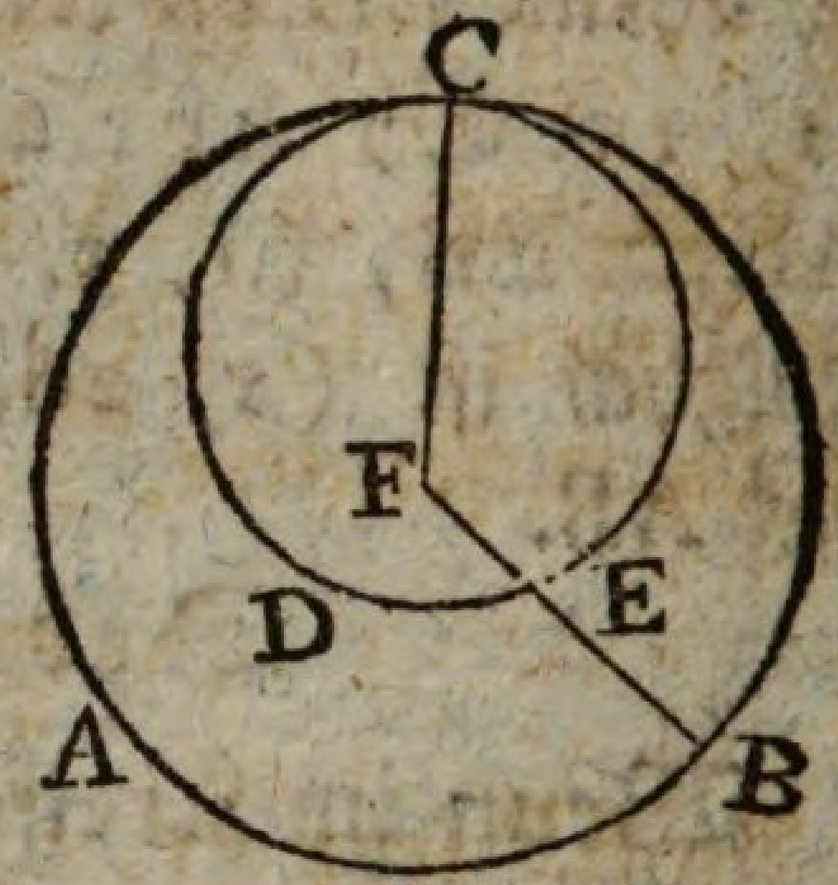


Gesetzt, diese Kreise, welche einander in B, C, schneiden, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt E, so ziehe EC, und willkührlich EFG, folglich ist (1, 15. E.) im Kreise, ABC, EC = EF, und im Kreise CDG, EC = EG, folglich wäre (1, 1. G.) EG = EF, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Der

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Zwey Kreise, ABC, CDE, deren einer den andern inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

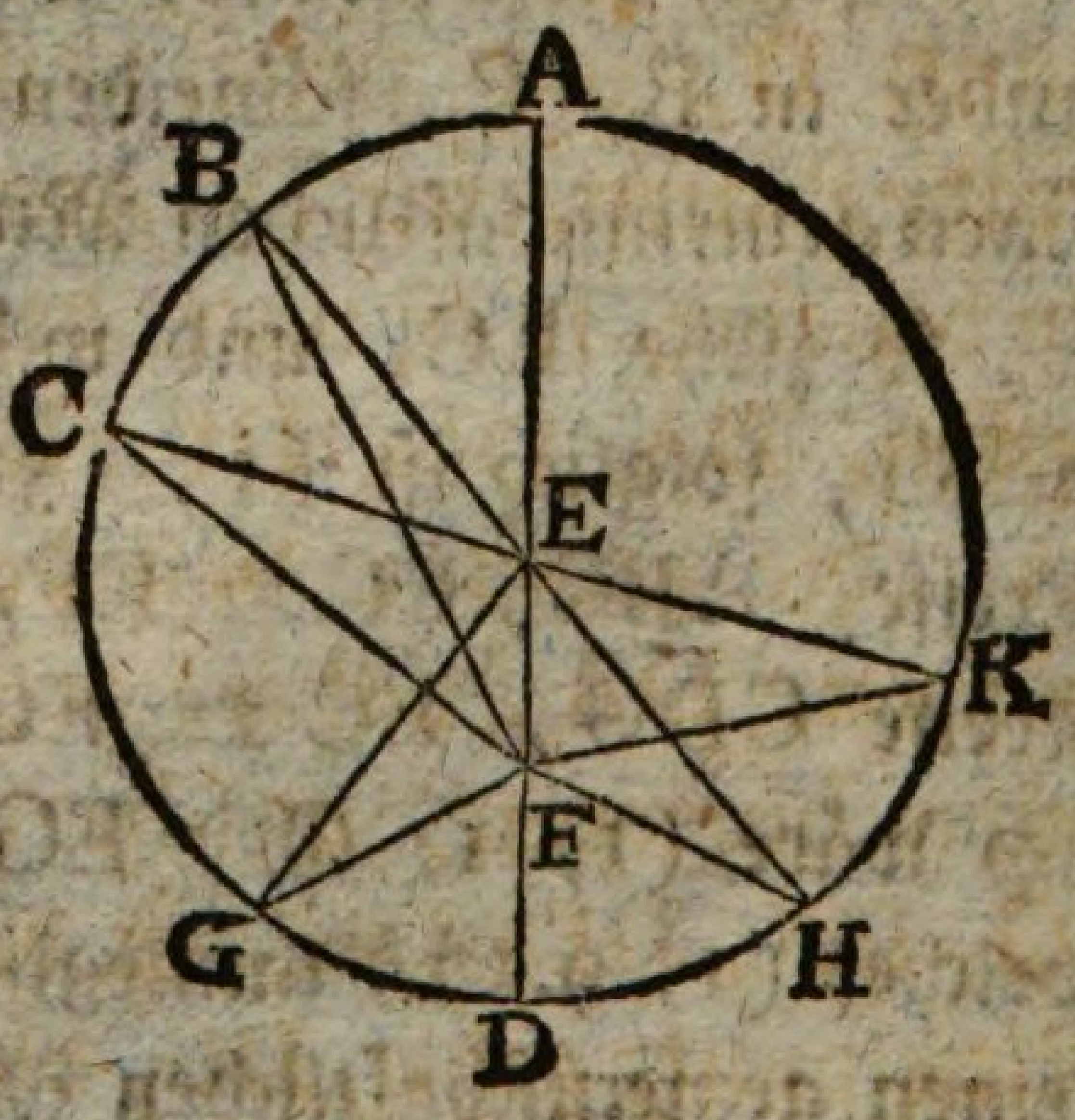


Gesetzt, diese Kreise, welche in C einander berühren, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt F; so ziehe FC, und willkührlich FEB, folglich ist (1, 15. E.) im Kreise ABC, FC = FB, und im Kreise CDE, FC = FE, folglich wäre (1, 1. G.) FB = FE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man auf eines Kreises, ABCD, Durchmesser, AD, einen vom Mittelpunkte, E, verschiedenen Punkt, F, und ziehet von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien FB, FC, FG: so ist die durch den Mittelpunkt, FA, die größte, und das übrige Stück des Durchmessers, FD, die kleinste; unter den übrigen aber immer die der größten, FA, nähere größer als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, FD, einander gleich.

Erster Theil.



Ziehe EB, EC, EG, so ist im △ BEF (1, 20. S.) BE + EF > FB. Nun ist (1, 15. E.) BE = AE, also BE + EF = AE + EF = AF. Folglich ist AF > FB.

Da (1, 15. E.) BE = CE, und EF den △△ BEF, CEF, gemein, aber BEF > CEF: so ist

(1,

(1, 24. S.) $FB > FC$, und aus eben den Gründen $FC > FG$.

Da (1, 20. S.) $GF + FE > EG$, und (1, 15. S.) $EG = ED = DF + FE$: so ist $GF + FE > DF + FE$, folglich (1, 5. G.) $GF > DF$.

Demnach ist FA die größte, FD die kleinste, und unter den Linien FB, FC, FG, immer die der FA nähere größer, als die entferntere.

Zweyter Theil.

An EF setze (1, 23. S.) $FEH = FEG$, und ziehe FH: so ist, weil auch (1, 15. E.) $EH = EG$, und EF gemein, (1, 4. S.) $FH = FG$. Wäre nun außer FH noch irgend eine andere, etwa FK, der FG gleich: so wäre auch $FK = FH$, welches unmöglich, weil nach dem ersten Theile $FK > FH$ ist.

Oder: Wäre $FK = FG$, so ziehe EK. Nun ist auch (1, 15. E.) $KE = EG$, und EF gemein. Folglich ist (1, 8. S.) $KEF = FEG$. Nun war $FEG = FEH$. Folglich wäre $KEF = FEH$, welches (1, 9. G.) unmöglich ist.

Demnach ist an dieser Seite der kleinsten, FD, nur die einzige $FH = FG$.

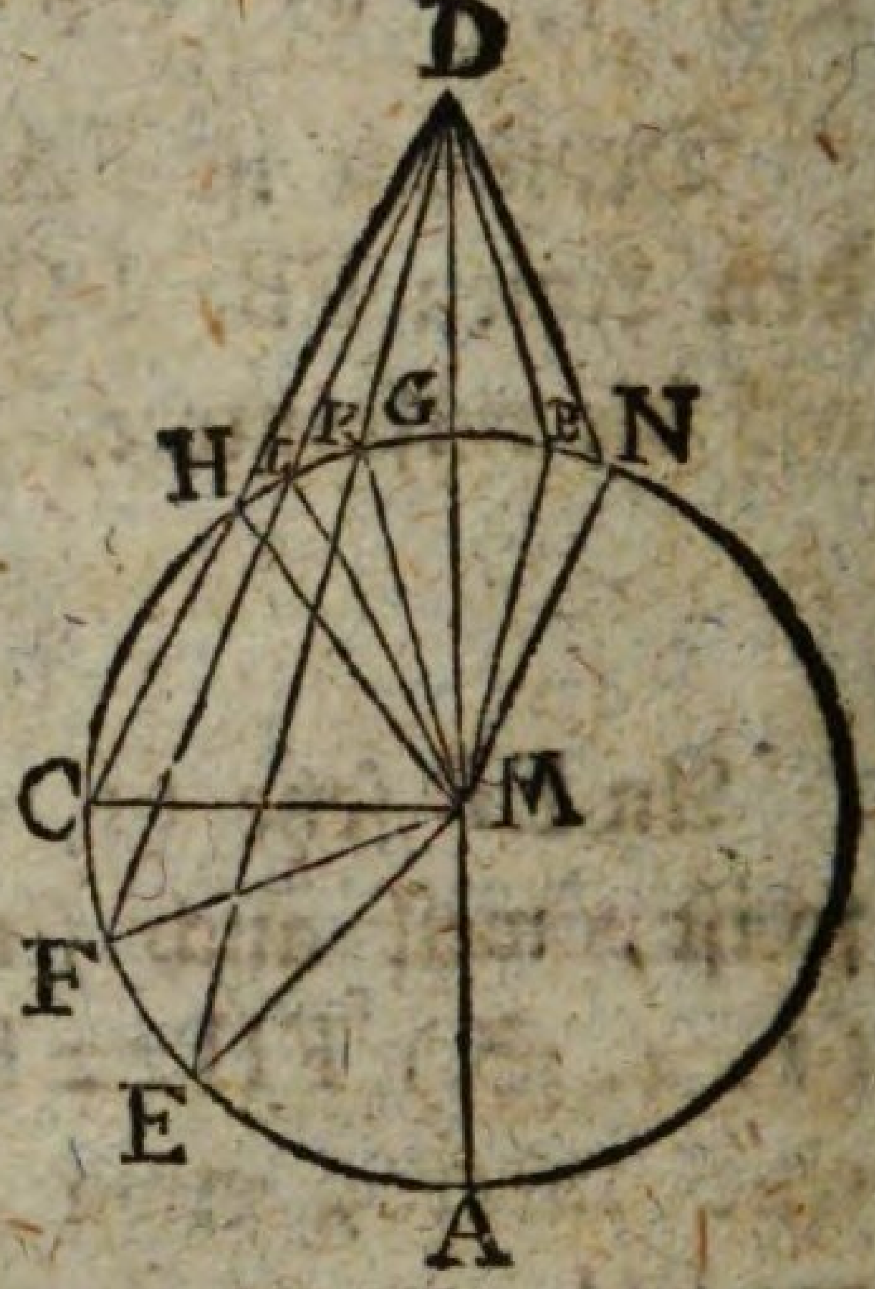
Der 8. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man außerhalb eines Kreises, ABC, einen Punkt D, und ziehet von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien, eine, DA, durch den Mittelpunkt, M, die übrigen beliebig, so ist unter denen, welche den hohlen Umkreis treffen, DA, DE, DF, DC, die durch den Mittelpunkt, DA, die größte; von den übrigen aber immer die der größten, DA, nähere größer, als die entferntere; unter denen hingegen, welche den erhobenen Umkreis treffen, DG, DK, DL, DH, ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt gehet, DG, die kleinste, von den übrigen aber

immer

immer die der kleinsten, DG, nähere kleiner, als die entfernte. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, DG, einander gleich.

Erster Theil.



Ziehe ME, MF, MC, so ist (1, 20. S.) DM + ME > DE. Nun ist (1, 15. E.) ME = MA; also DM + ME = DM + MA = DA. Folglich ist DA > DE.

Da (1, 15. E.) ME = MF, und MD gemein, aber DME > DMF: so ist (1, 24. S.) DE > DF. Und aus eben den Gründen DF > DC.

Demnach ist DA die größte, und unter den Linien, DE, DF, DC, immer die der DA nähere größer, als die entferntere.

Zweyter Theil.

Ziehe MK, ML, MH: so ist (1, 20. S.) MK + KD > MD, das ist, > MG + GD. Nun ist (1, 15. E.) MK = MG. Folglich ist MG + KD > MG + GD, folglich (1, 5. G.) KD > GD, oder DG < DK.

Da in den Triangeln MLD, MKD, (1, 21. S.) MK + DK < ML + DL, aber (1, 15. E.) MK = ML: so ist ML + DK < ML + DL, folglich (1, 5. G.) DK < DL. Und aus eben den Gründen DL < DH.

Demnach ist DG die kleinste, und unter den Linien DK, DL, DH, immer die der DG nähere kleiner, als die entferntere.

Dritter Theil.

An DM setze (1, 23. S.) DMB = DMK, und ziehe DB. Nun ist (1, 15. E.) MB = MK, auch MD gemein. Folglich ist (1, 4. S.) DB = DK. Wäre nun außer DB noch irgend eine andere, etwa DN, der DK gleich, so wäre auch (1, 1. G.) DN = DB, welches unmöglich, weil nach dem zweyten Theile DB < DN.

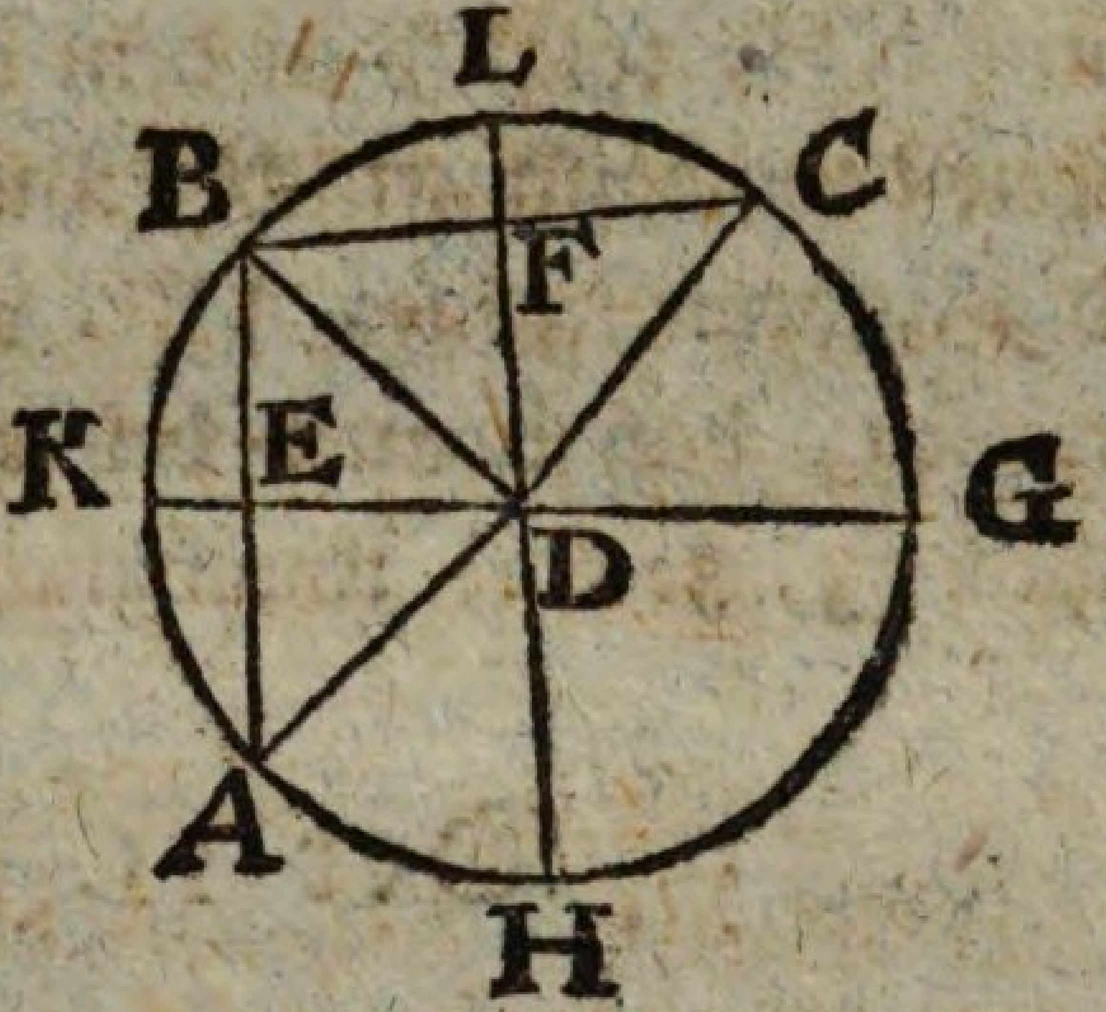
Oder:

Oder: Wäre DN = DK, so ziehe MN. Nun ist auch MN = MK, und MD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) DMK = DMN. Nun war DMK = DMB. Folglich wäre DMN = DMB, welches (1, 9. S.) unmöglich.

Demnach ist an dieser Seite der kleinsten DG, nur die einzige DB = DK.

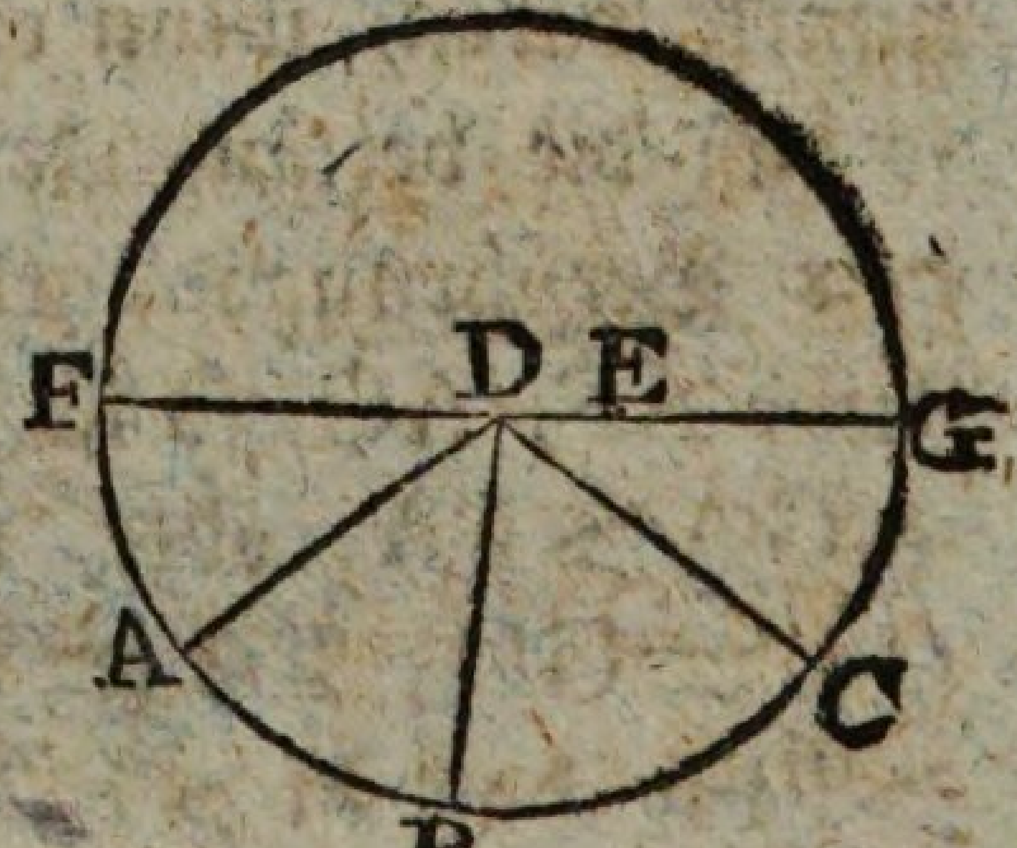
Der 9. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte, D, innerhalb eines Kreises, ABC, an den Umkreis mehr als zwey gleiche gerade Linien, DA, DB, DC: so ist solcher Punkt des Kreises Mittelpunkt.



Ziehe AB, BC, und halbire sie (1, 10. S.) in E, F. Ziehe ED, DF, und verlängere sie an beyden Seiten nach G, K, H, L.

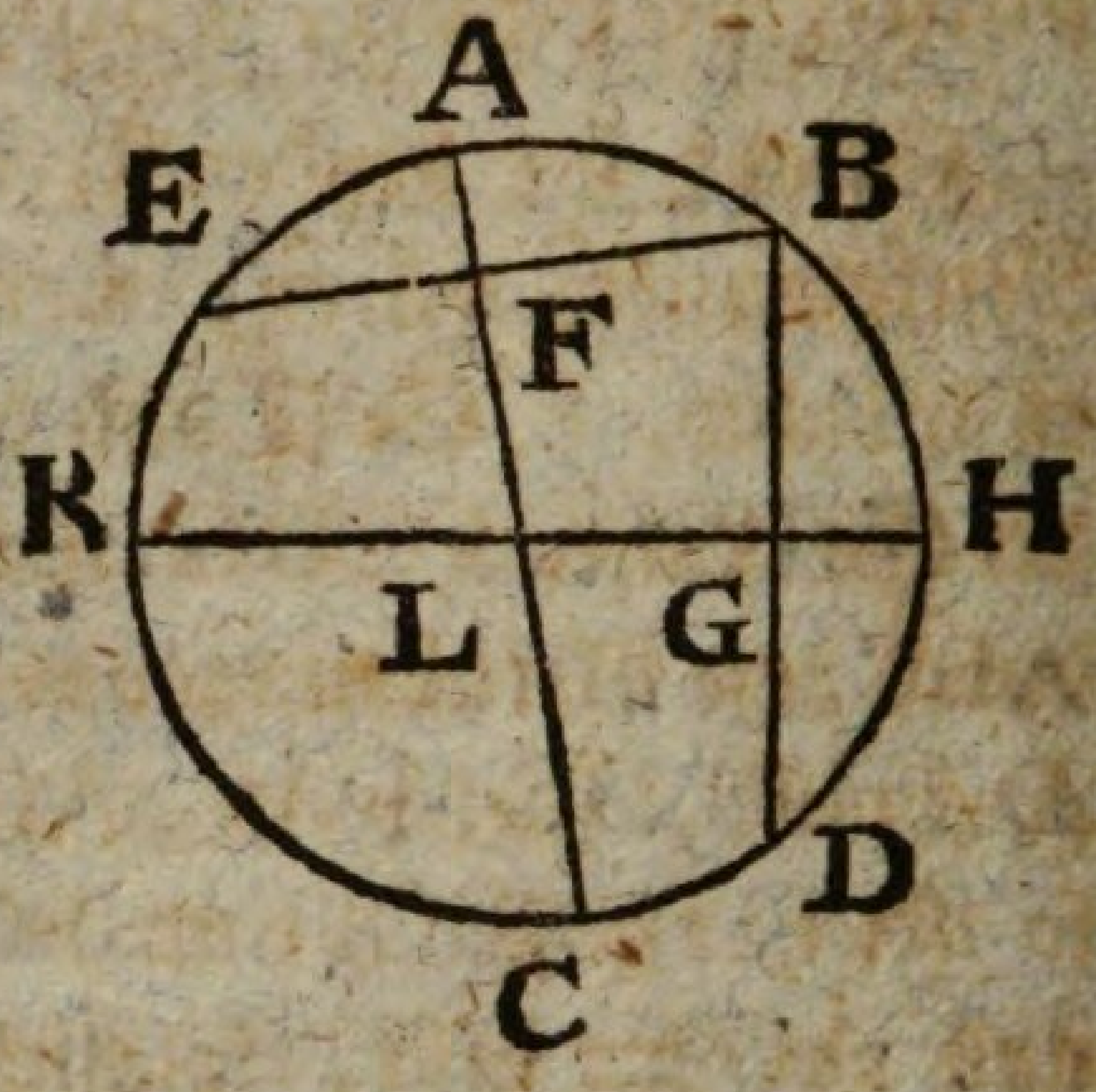
Da AE = EB, und ED gemein, auch AD = DB: so ist (1, 8. S.) AED = BED. Folglich (1, 10. E.) jeder dieser Winkel ein rechter. Demnach wird AB von GK unter rechten Winkeln halbirt, folglich ist (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt in GK; aus eben den Gründen aber auch in HL. Nun haben GK, HL nur den Punkt D gemein. Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.



Ein anderer Beweis. Wäre D nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa E. Ziehe DE, und verlängere sie an beyden Seiten nach F, G, so wäre also (3, 8. S.) DC > DB, und DB > DA, gegen das Angenommene DC = DB = DA. Demnach kann nicht E der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer außer D. Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

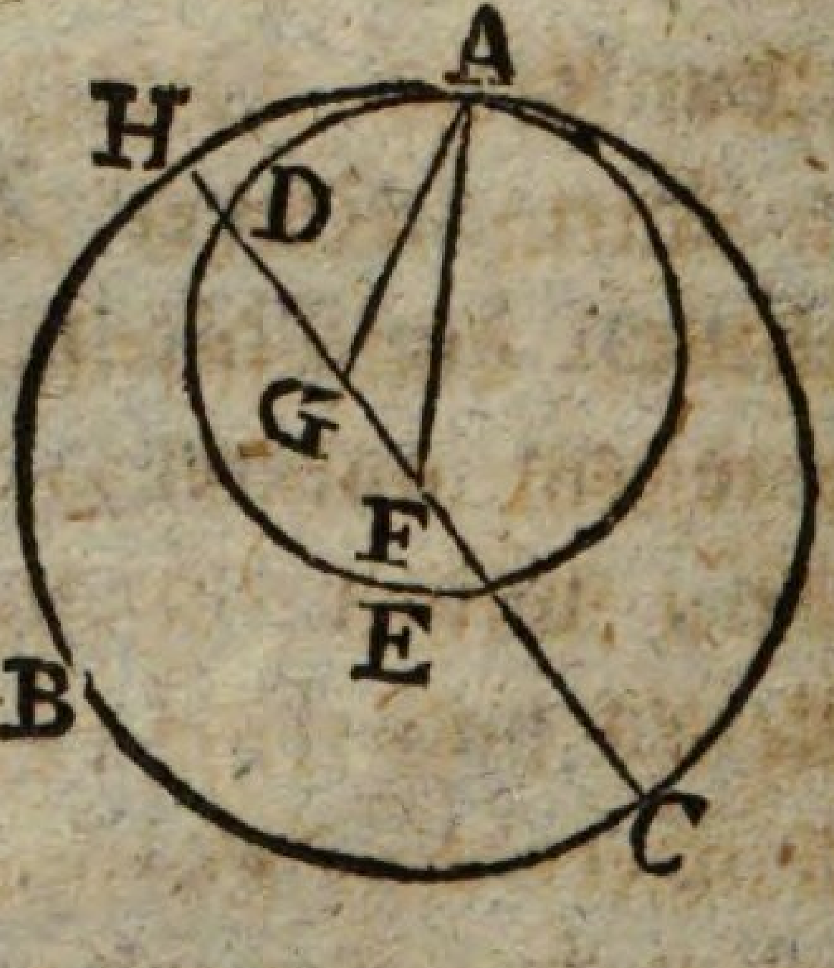
Ein Kreis schneidet einen andern, ABC, in nicht mehr als zwey Punkten.



Gesetzt, der erste Kreis schnitte den andern ABC in drey Punkten, D, B, E, so ziehe EB, BD, und halbire sie in F, G. Auf EB, BD, errichte in F, G, die Perpendikel FC, GK, und verlängere sie bis A, H: so ist (3, 1. S.) in CA und KH, folglich in dem einzigen ihnen gemeinschaftlichen Punkte L, des andern Kreises ABC Mittelpunkt. Nun wird eben so bewiesen, daß L auch des ersten Kreises Mittelpunkt sey, welches (3, 5. S.) unmöglich ist.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Berühren zwey Kreise, ABC, ADE, einander innerhalb: so trifft die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt, A.

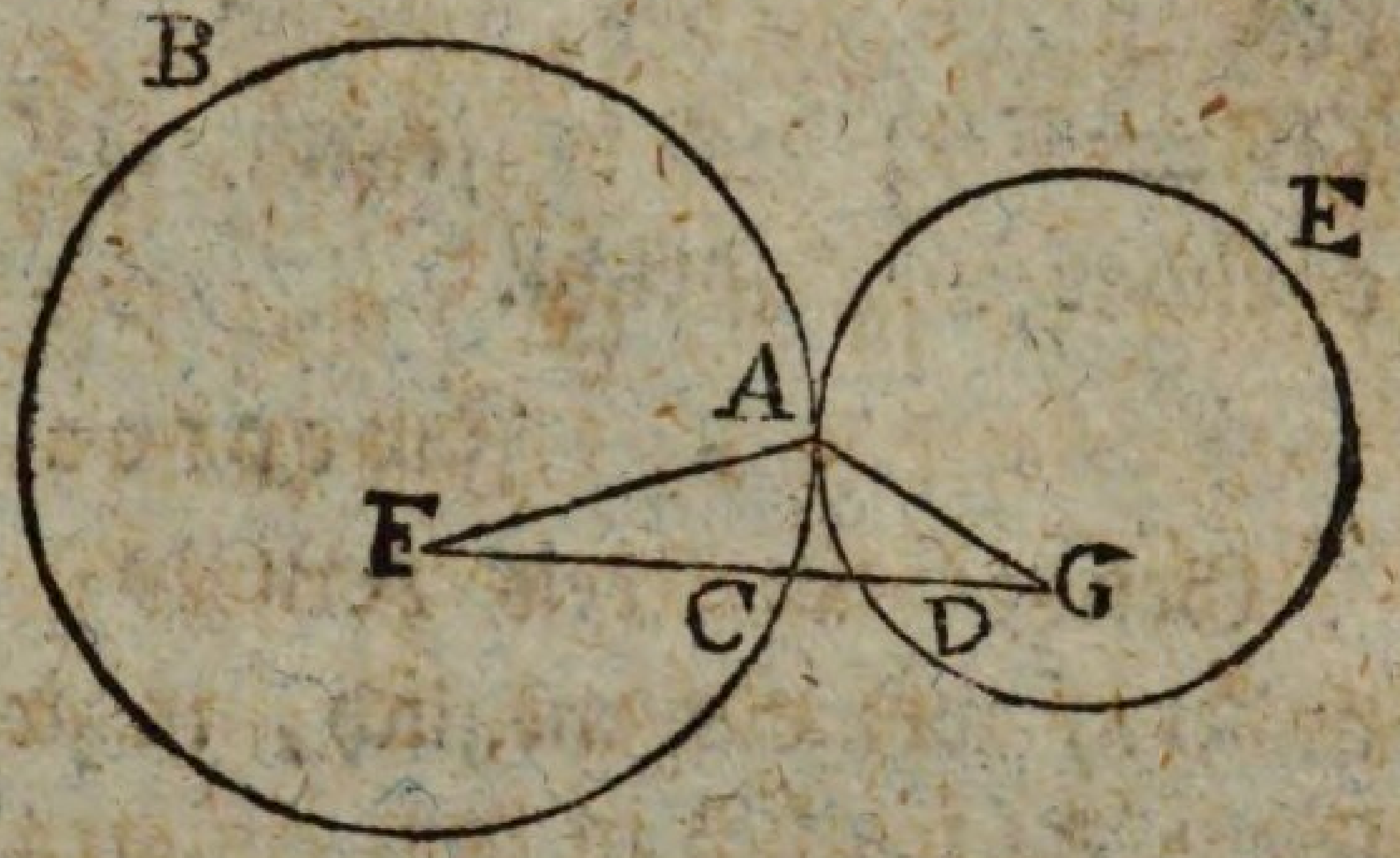


Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F, G, so daß die verlängerte gerade Linie FG den Berührungspunkt A nicht träfe. Ziehe AF, AG, so ist (1, 20. S.) FG + GA > FA, oder, weil (1, 15. E.) GA = GD, FA = FH, FG + GD > FH, das ist > FG + GH, folglich (1, 5. G.) GD > GH, welches (1, 9. G.) unmöglich. Demnach muß die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, den Berührungspunkt A treffen.

Der

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Berühren zwey Kreise, ABC, ADE, einander außerhalb: so geht die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt, A.

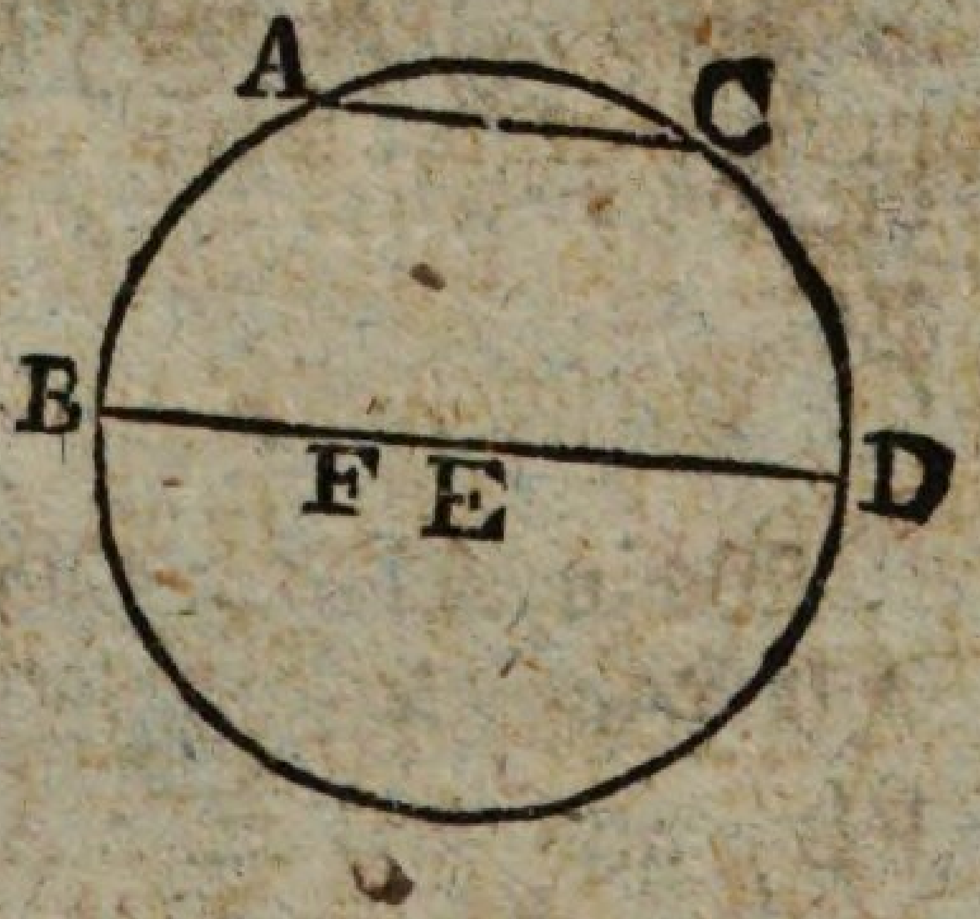


Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F, G, so daß die gerade Linie FCDG nicht durch den Berührungspunkt A ginge. Ziehe AF, AG, so ist (1, 15. E.) $AF = FC$, und $AG = GD$, folglich $AF + AG = FC + GD$, folglich $AF + AG < FG$, da doch (1, 20. S.) $AF + AG > FG$. Demnach kann die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, durch keinen andern, als den Berührungspunkt A gehen.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

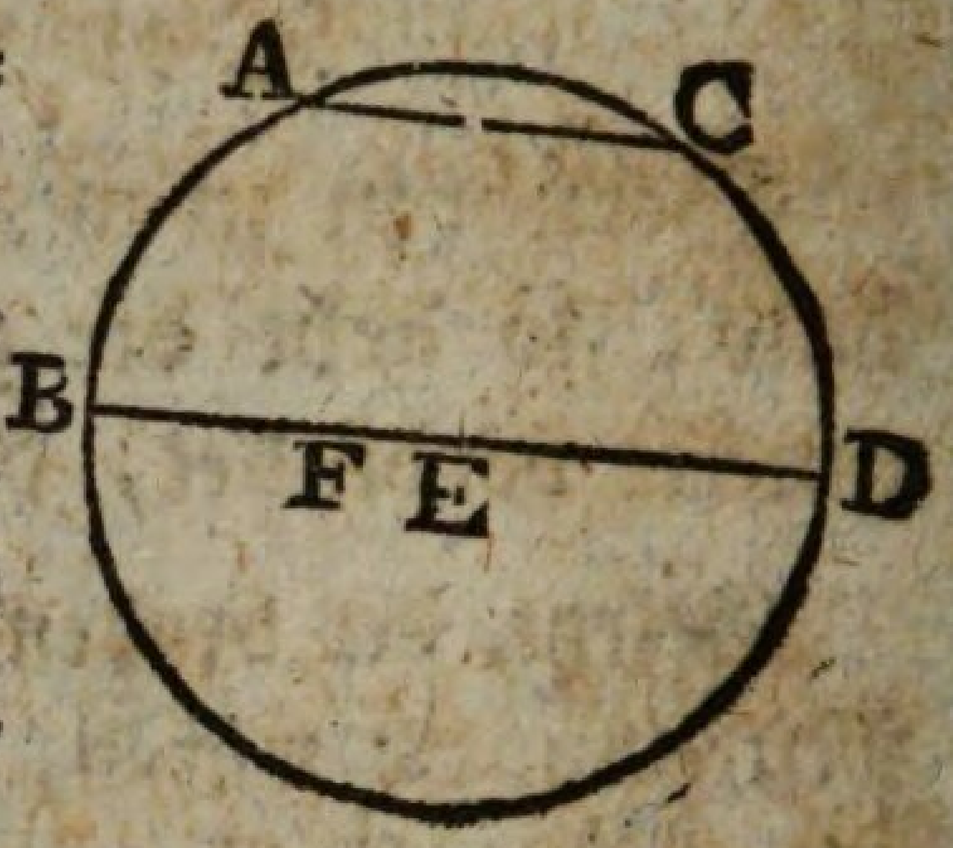
Kreise berühren einander, sowohl innerhalb als außerhalb, in nicht mehr als einem Punkte.

Erster Theil.



Der Kreis ABCD werde inwendig von einem andern in dem Punkte B berührt, auch sey E der Mittelpunkt der ersten; und F der Mittelpunkt des andern Kreises Ziehet man die gerade Linie EF, so trifft (3, 11. S.) dieselbe verlängert den Berührungspunkt B.

Nun sey, wenn es möglich, noch ein zweyter von B unterschiedener Berührungspunkt, der aber kein anderer als D, welchen (3, 11. S.) die verlängerte EF trifft, seyn könnte.



Da E der Mittelpunkt des ersten Kreises: so ist (1, 15. E.) DE = EB, folglich DE > FB, folglich noch vielmehr DF > FB. Nun ist F der Mittelpunkt des andern Kreises, folglich (1, 15. E.) DF = FB; welches jenem, DF < FB, offenbar widerspricht.

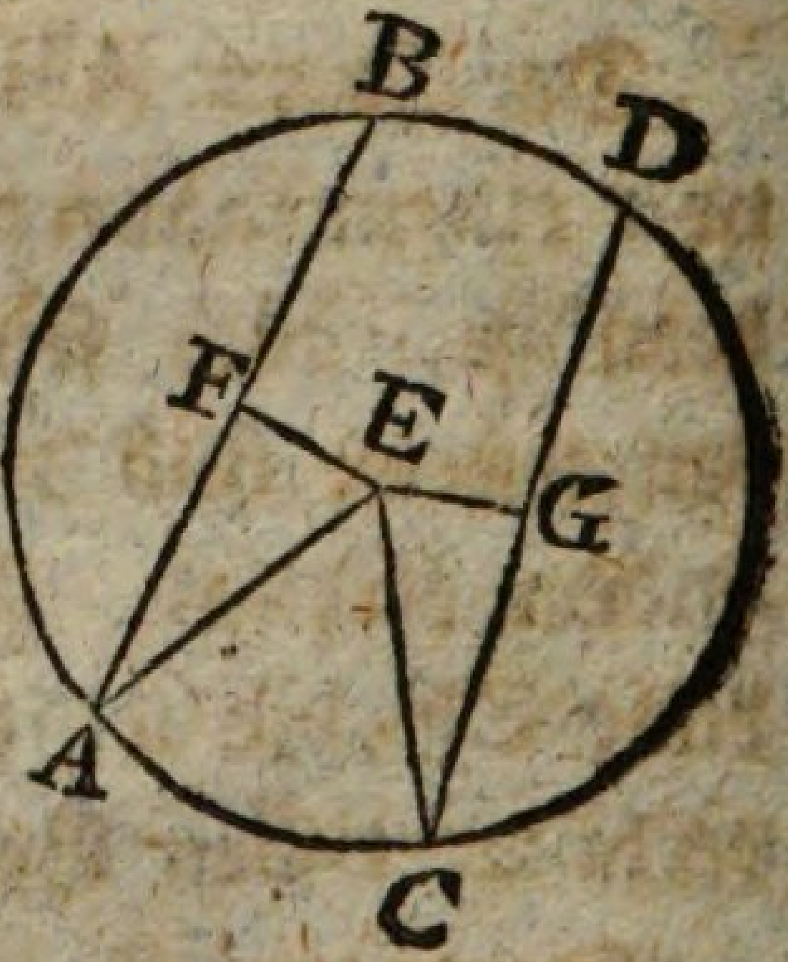
Zweyter Theil.

Gesetzt, der Kreis ABCD, würde auswendig von einem andern, wenn es möglich, in zweyen Punkten A, C, berührt. Ziehe AC.

Da A, C, zwey Punkte in der Peripherie des ersten Kreises ABDC, so fällt (3, 2. S.) AC, innerhalb dieses Kreises, folglich (3, 3. E.) außerhalb des andern Kreises. Nun sind A, C, zwey Punkte in der Peripherie des andern Kreises, folglich fällt (3, 2. S.) AC innerhalb des andern; welches dem Obigen offenbar widerspricht.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, ABDC, sind gleiche gerade Linien, AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernt; und gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernte gerade Linien, AB, CD, einander gleich.



Fälle (1, 12. S.) aus E auf AB, CD, die Perpendikel EF, EG, und ziehe AE, EC.

Erster Theil.

Wenn AB = CD ist. Da EF auf AB senkrecht: so ist (3, 3. S.) AF = FB, also AB = 2 AF. Aus eben den Gründen ist CD = 2 CG. Nun ist AB = CD. Folglich ist (1, 7. G.) AF = CG, also □ AF = □ CG. Auch ist (1, 15. E.) AE = EC, also □ AE = □ EC. Nun ist, weil bey F, G, rechte Winkel, (1, 47. S.) □ AE = □ AF + □ EF, und □ EC = □ CG + □ EG.

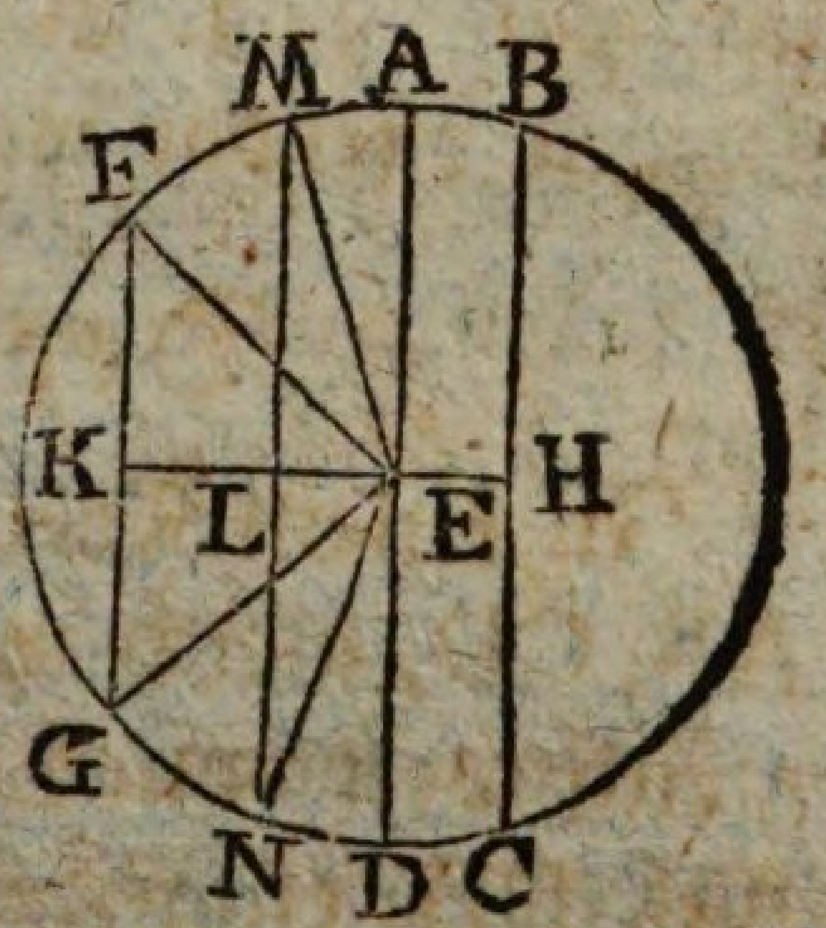
□ EG. Folglich ist (1, 1. G.) □ AF + □ EF = □ CG + □ EG, folglich (1, 3. G.) □ EF = □ EG, also EF = EG. Demnach sind (3, 4. E.) AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte E entfernt.

Zweyter Theil.

Wenn (3, 4. E.) EF = EG, also □ EF = □ EG. Nun war nach dem ersten Theile □ AF + □ EF = □ CG + □ EG. Folglich ist (1, 3. G.) □ AF = □ CG, also AF = CG. Nun war auch AB = 2 AF, und CD = 2 CG. Folglich ist (1, 6. G.) AB = CD.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, ABCD, ist der Durchmesser, AD, die größte Linie; unter den übrigen aber immer die dem Mittelpunkte, E, nähere, BC, größer als die entferntere, FG.



Fälle (1, 12. G.) aus E auf BC, FG, die Perpendikel EH, EK; so ist (3, 5. E.) EK > EH. Mache daher (1, 3. G.) EL = EH. Errichte (1, 11. G.) auf EK in L den Perpendikel LM, und verlängere ihn bis N. Ziehe EM, EN, EF, EG.

Da EL = EH: so ist (3, 14. G.) MN = BC. Auch ist (1, 5. E.) AE = EM, und ED = EN, also AD = EM + EN. Nun ist (1, 20. G.) EM + EN > MN. Folglich ist AD > BC.

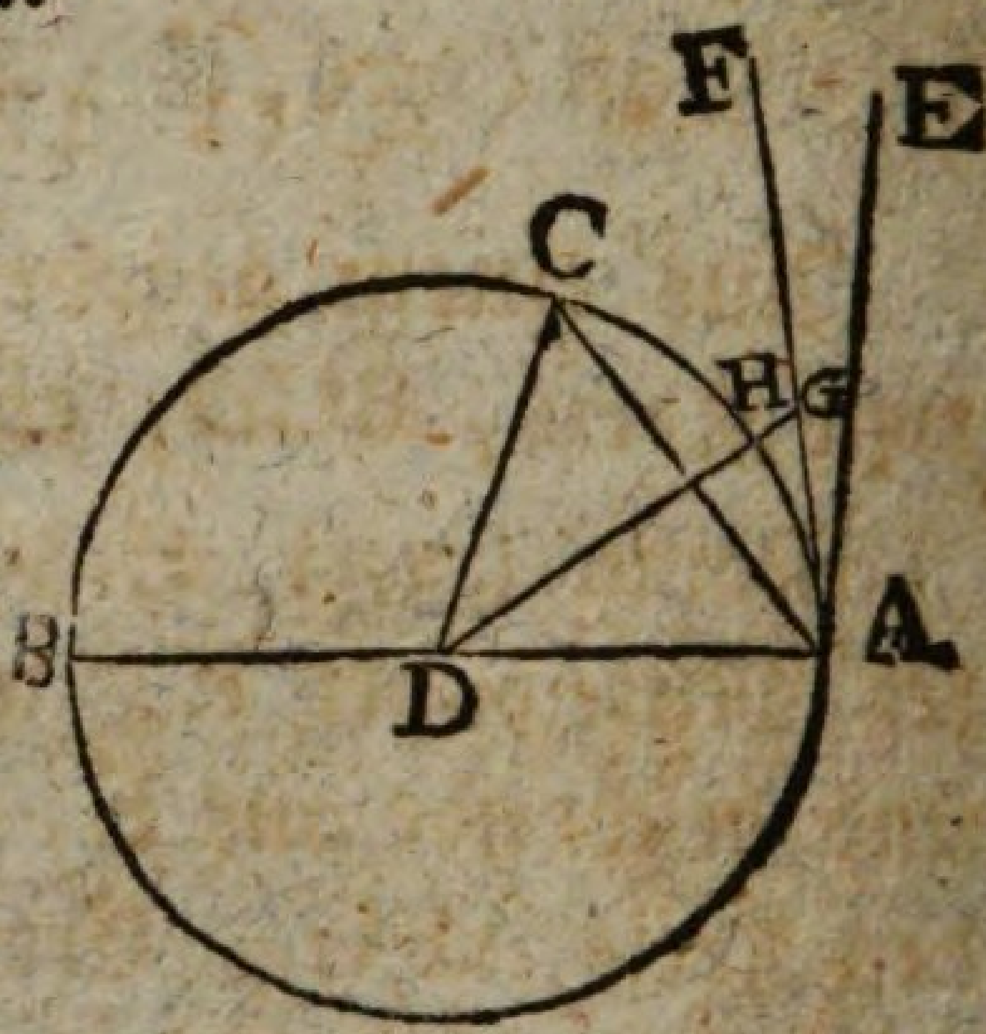
Da (1, 15. E.) ME = FE, und EN = EG, aber MEN > FEG: so ist (1, 24. G.) MN > FG. Nun war MN = BC. Folglich ist BC > FG.

Demnach ist die dem Mittelpunkte nähere BC, größer, als die entferntere FG, und der Durchmesser AD die größte Linie.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Der auf eines Kreises, ABC, Durchmesser, BA, im Endpunkte, A, errichtete Perpendikel, AE, fällt außerhalb des Kreises; und an diesen Punkt, A, fällt zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel keine andere gerade Linie. Auch ist der Winkel des Halbkreises, CHAB, größer, der übrige vom Umkreise und dem Perpendikel eingeschlossene Winkel, HAE, aber kleiner, als jeder spitze geradlinige Winkel.

Erster Theil.



Fiele solcher Perpendikel nicht außerhalb des Kreises, so falle er, wenn's möglich ist, innerhalb, wie AC, so daß also DAC ein rechter Winkel wäre. Ziehe DC, so ist, weil (1, 15. E.) DC = DA, (1, 5. S.) DCA = DAC, folglich beyde Winkel rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich ist.

Demnach kann solcher Perpendikel nicht innerhalb des Kreises fallen; aber aus eben den Gründen auch nicht auf den Umkreis; folglich fällt er außerhalb des Kreises.

Zweyter Theil.

Fiele, wenn es möglich, zwischen dem Umkreise CHA, und dem Perpendikel EA, an den Punkt A, eine gerade Linie, wie FA, so fälle (1, 12. S.) aus D auf FA den Perpendikel DG. Weil also DGA ein rechter Winkel, DAG aber kleiner als der rechte DAE, so ist DGA > DAG, folglich (1, 19. S.) DA > DG. Nun ist (1, 15. E.) DA = DH. Folglich wäre DH > DG, welches (1, 9. G.) unmöglich.

Dritter Theil.

Wäre ein spitzer geradliniger Winkel noch größer, als der vom Durchmesser BA, und dem Umkreise AHC eingeschlossene Winkel; oder noch kleiner, als der vom Umkreise AHC, und dem Perpendikel AE eingeschlossene Winkel: so müßte

zwi=

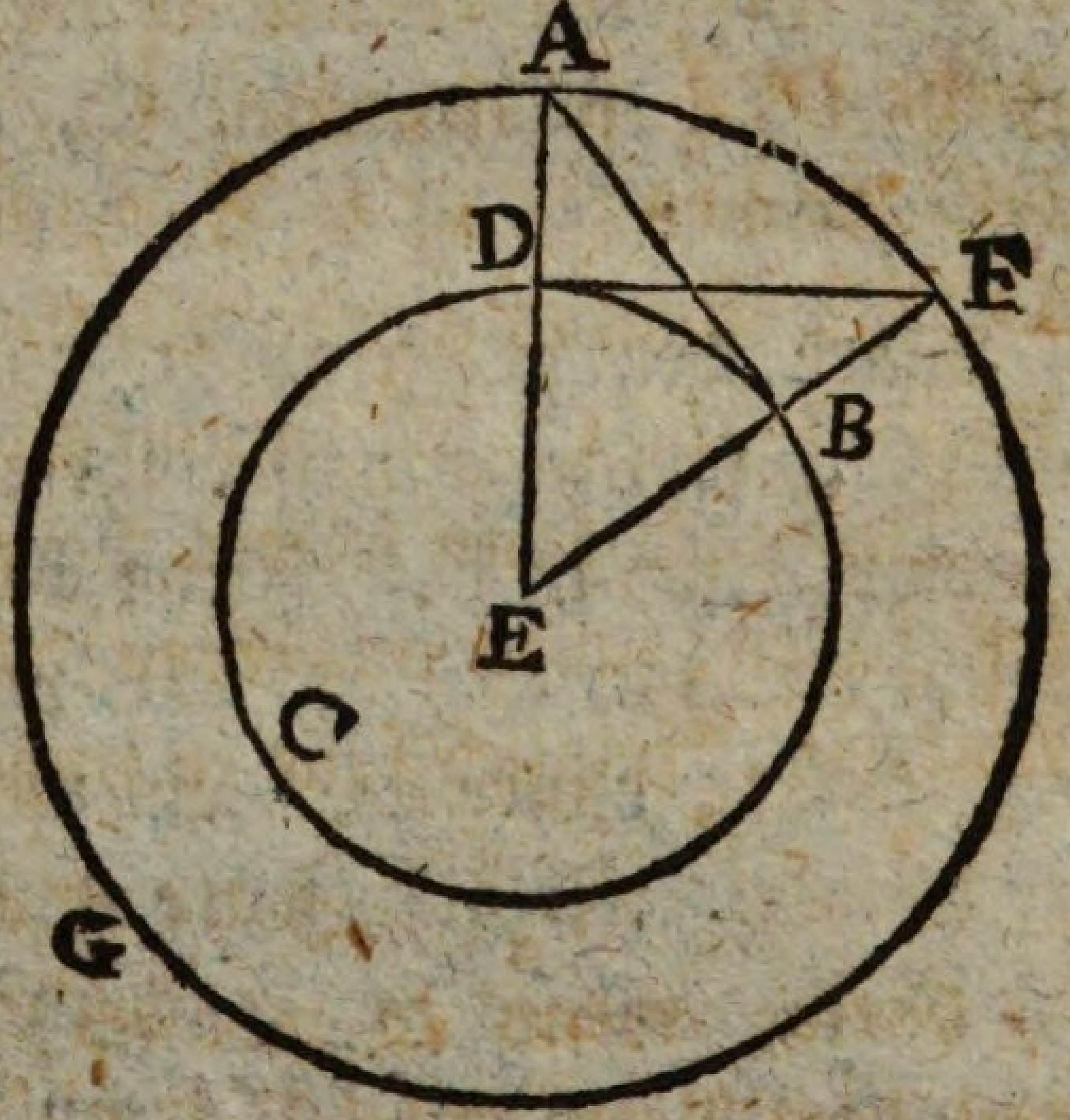
zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel an den Punkt A eine gerade Linie, wie FA, fallen, welches nach dem im zweyten Theile Erwiesenen unmöglich ist.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichteter Perpendikel den Kreis berührt, und daß eine gerade Linie den Kreis nur in einem Punkte berühret, indem (3, 2. S.) die gerade Linie, welche in zwey Punkten mit ihm zusammentrifft, innerhalb des Kreises fällt.

Der 17. Satz. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte, A, an einen gegebenen Kreis, BCD, eine Berührungslinie zu ziehen.

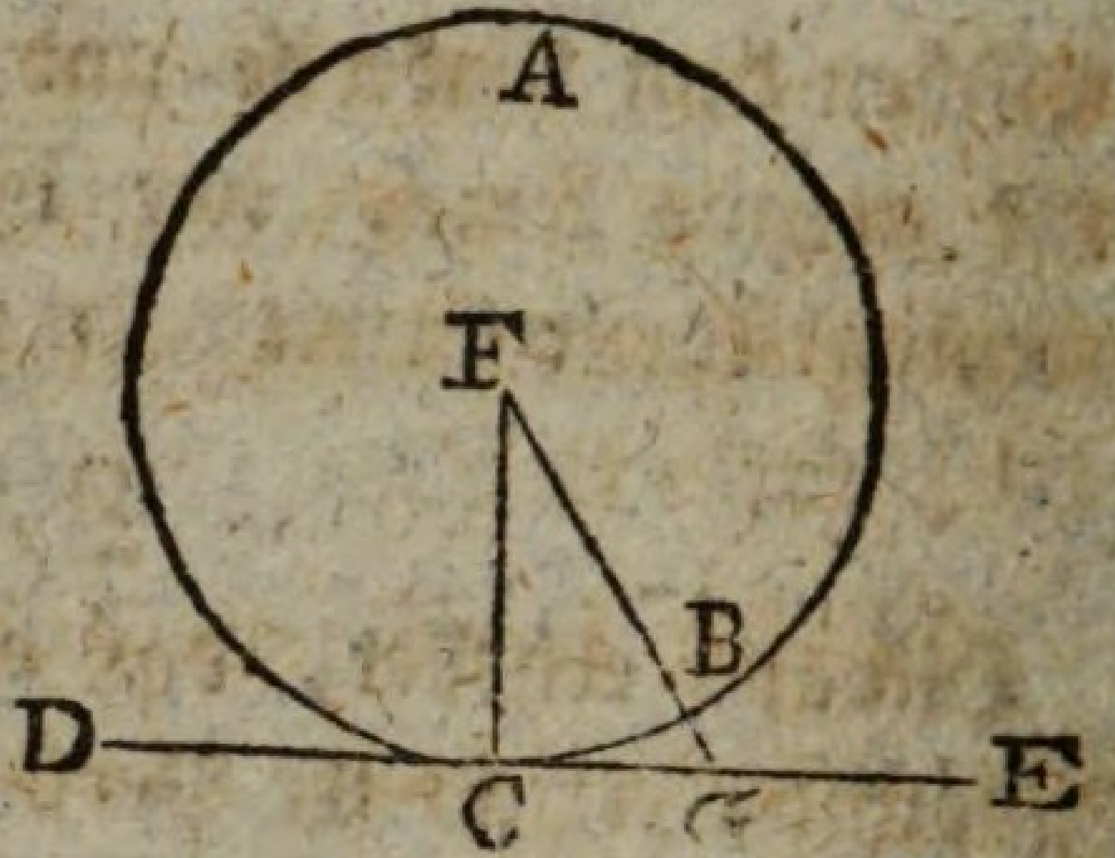


Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, ziehe EA, und beschreibe aus E, mit EA den Kreis AFG. Errichte (1, 11. S.) auf EA in D den Perpendikel DF. Ziehe EBF, und AB: so ist AB die aus A gezogene Berührungslinie des Kreises BCD.

Denn da in den Triangeln, ABE, FDE, (1, 15. E.) EA = EF, und EB = ED, auch der Winkel AEF gemein: so ist (1, 4. S.) EBA = EDF. Nun ist EDF, folglich auch EBA, ein rechter Winkel, das ist, AB perpendikular auf dem Halbmesser EB, in dessen Endpunkte B. Folglich ist (3, 16. Zus.) AB eine Berührungslinie des Kreises BCD.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

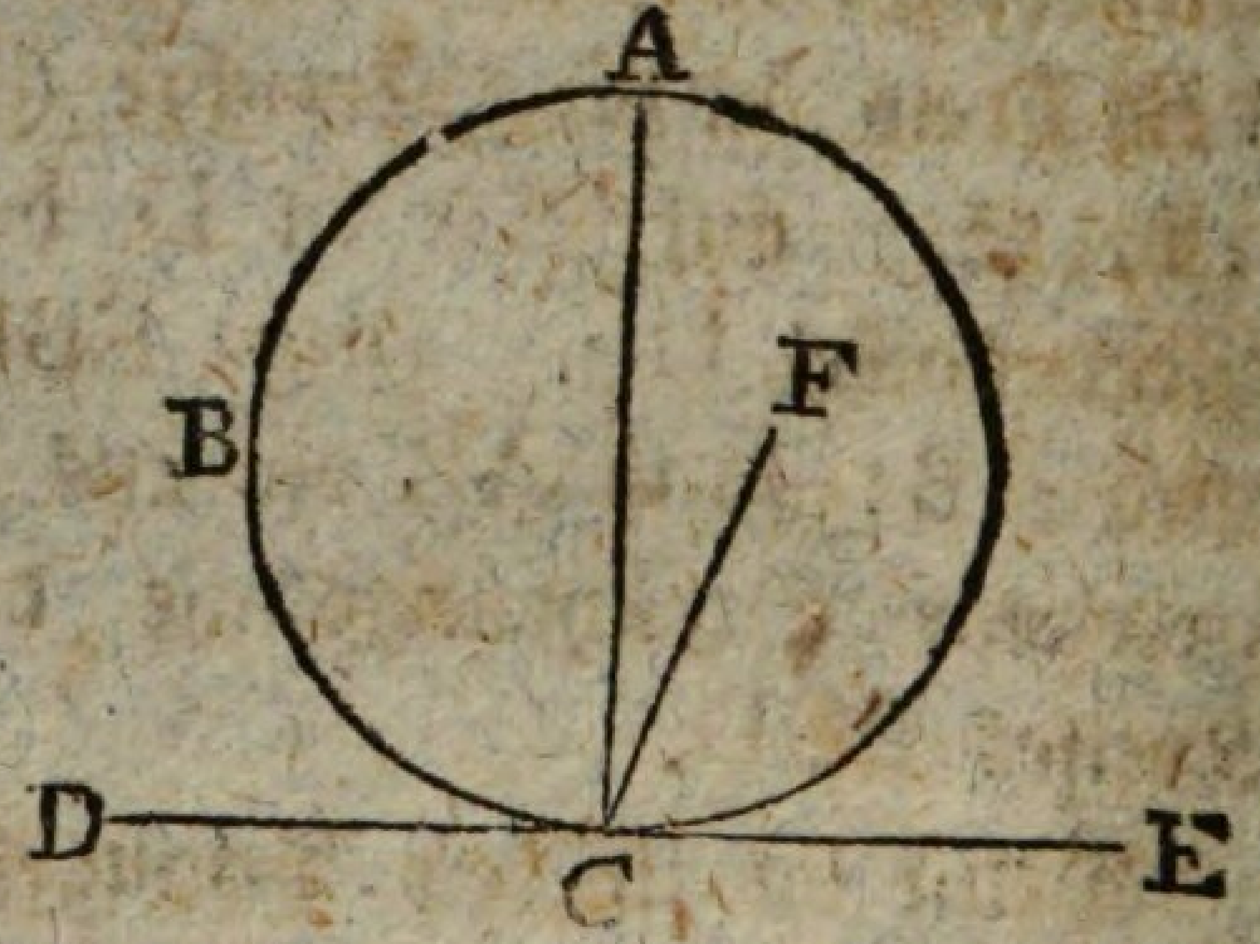
Auf eines Kreises, ABC, Berührungslinie, DE, ist die vom Mittelpunkte, F, nach dem Berührungspunkte, C, gezogene gerade Linie, FC, perpendikular.



Wäre FC nicht perpendikular auf DF, so sey es eine andere, etwa FG, und daher FGC ein rechter Winkel, also (1, 17. S.) FCG < FGC, folglich (1, 19. S.) FC > FG. Nun ist (1, 15. E.) FC = FB. Folglich wäre FB > FG, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann FG nicht perpendikular auf DE seyn; aus eben den Gründen aber auch keine andere außer FC. Folglich ist FC auf DE perpendikular.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Ist auf eines Kreises, ABC, Berührungslinie, DE, im Berührungspunkte, C, eine gerade Linie, CA, perpendikular: so ist in solcher des Kreises Mittelpunkt.



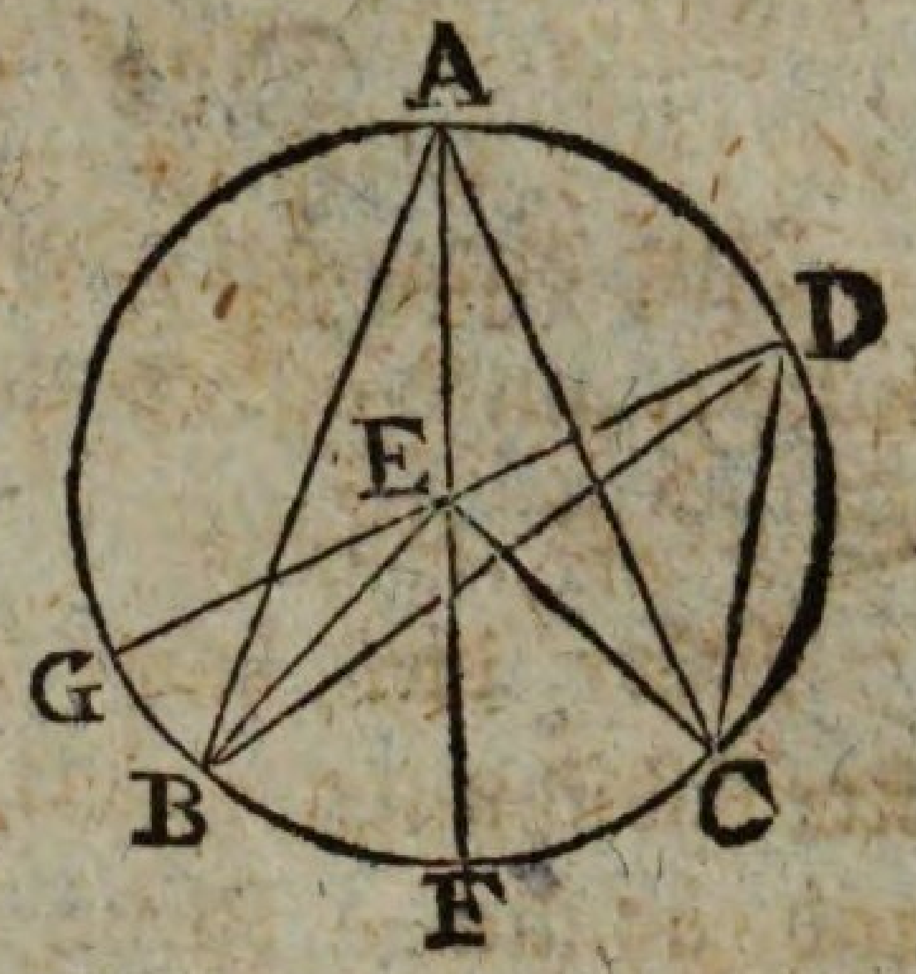
Wäre der Mittelpunkt nicht in AC, so sey er außer ihr irgendwo, etwa in F. Ziehe FC, welche (3, 18. S.) auf DE perpendikular; daher FCE ein rechter Winkel. Folglich wäre ACE = FCE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann F nicht der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer Punkt außerhalb AC. Folglich muß er in AC seyn.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

In jedem Kreise, ABC, ist der Winkel am Mittelpunkte, BEC, doppelt so groß, als der Winkel am Umkreise, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Es sey zuerst der Winkel am Umkreise BAC. Ziehe AE, und verlängere sie bis F. Da (1, 15. E.) EA = EB: so

ist

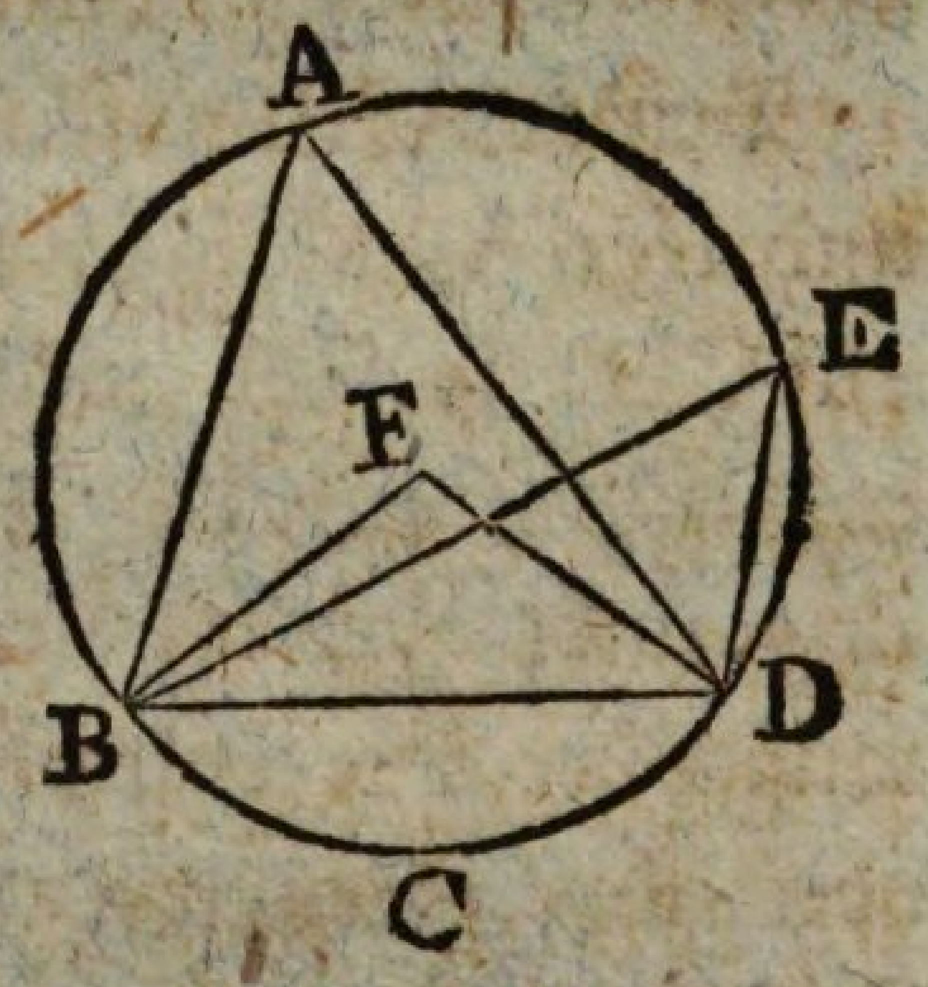


ist (1, 5. S.) EAB = EBA, folglich (1, 32. S.) BEF = 2 EAB. Eben so ist FEC = 2 EAC, folglich (1, 2. S.) BEC = 2 BAC.

Es sey ferner ein anderer Winkel am Umkreise BDC, daß BD die EC schneide. Ziehet man nun DE, und verlängert sie bis G: so wird auf eben die Art bewiesen: daß GEC = 2 GDC, und GEB = 2 GDB, folglich (1, 3. S.) BEC = 2 BDC.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

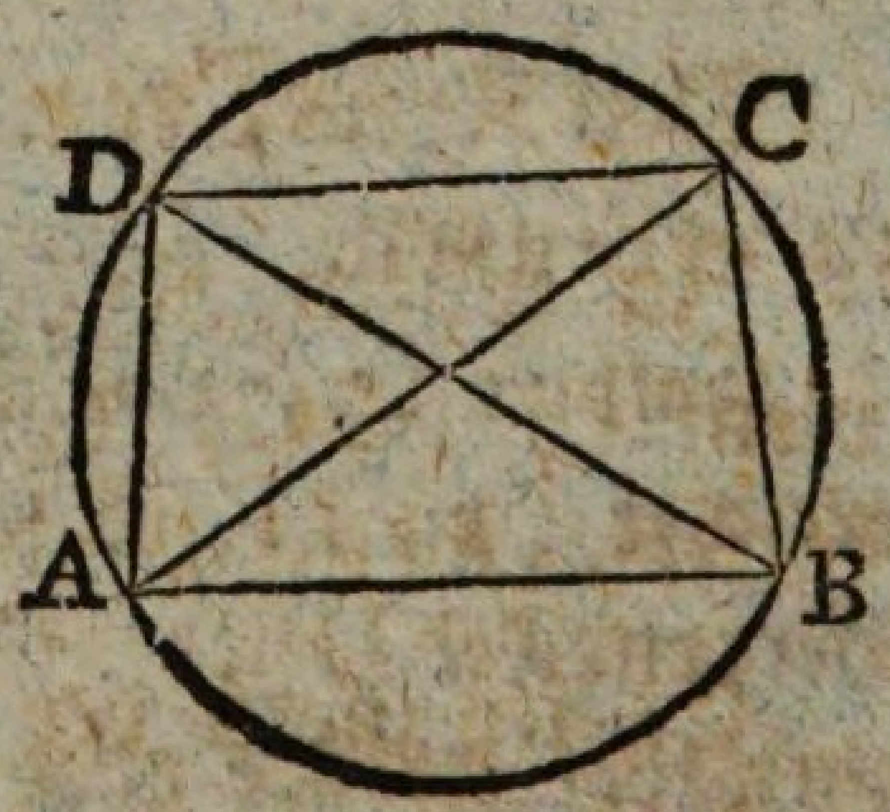
Die Winkel, BAD, BED, in einem Kreisabschnitte, BAED, sind einander gleich.



Nimm des Kreises Mittelpunkt F, und ziehe BF, FD: so ist (3, 20. S.) BFD = 2 BAD = 2 BED, folglich BAD = BED.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

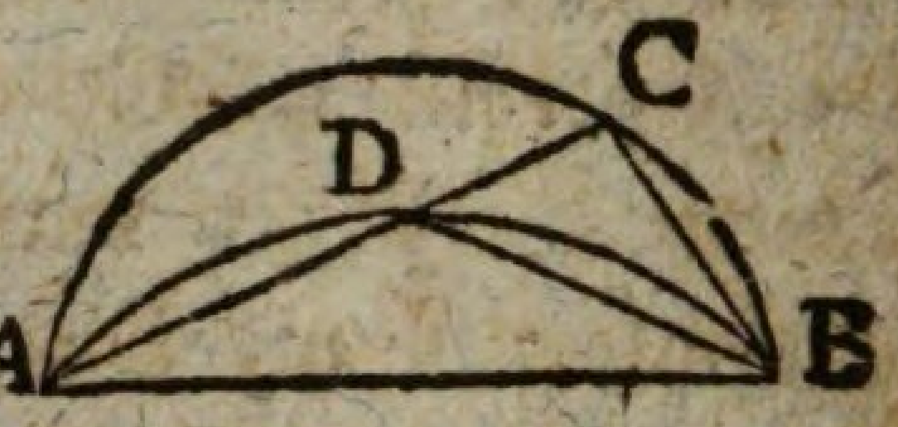
Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise, ABCD, sind zwey rechten Winkeln gleich.



Ziehe AC, BD, so ist (3, 21. S.) CDB = BAC, und BDA = ACB, folglich (1, 2. S.) ADC = BAC + ACB, folglich wenn ABC hinzukommt, ADC + ABC = BAC + ACB + ABC = (1, 32. S.) 2 R. Eben so wird bewiesen, daß BAD + DCB = 2 R.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

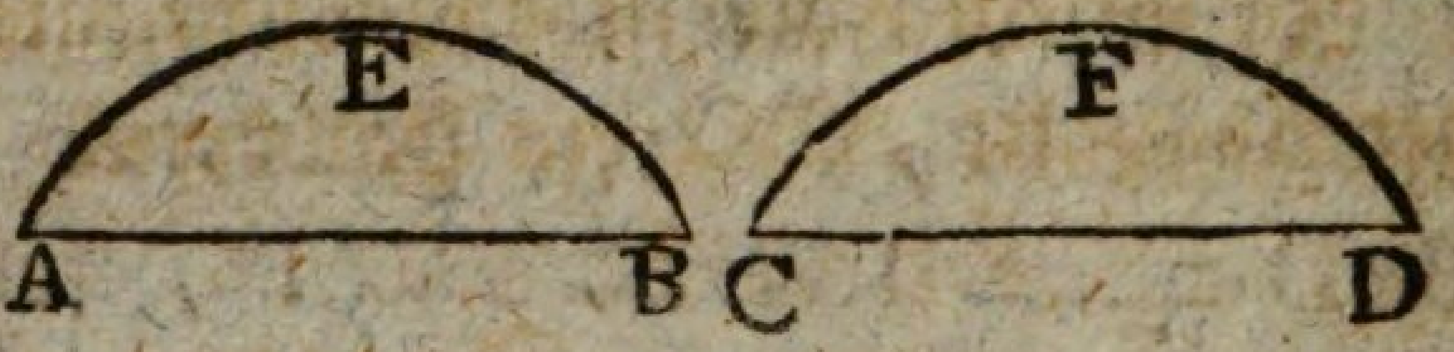
Auf einer geraden Linie, AB, können nicht zwey ähnliche, und dabey ungleiche Kreisabschnitte, an einerley Seite errichtet werden.



Wäre dies möglich, so seyen die Kreisabschnitte, ACB, ADB, ungleich, und ähnlich. Ziehe willkührlich AD, und verlängere sie bis C. Ziehe CB, DB: so ist, weil die Abschnitte ähnlich, (3, 11. E.) ADB=ACB, welches (1, 16. S.) unmöglich ist.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

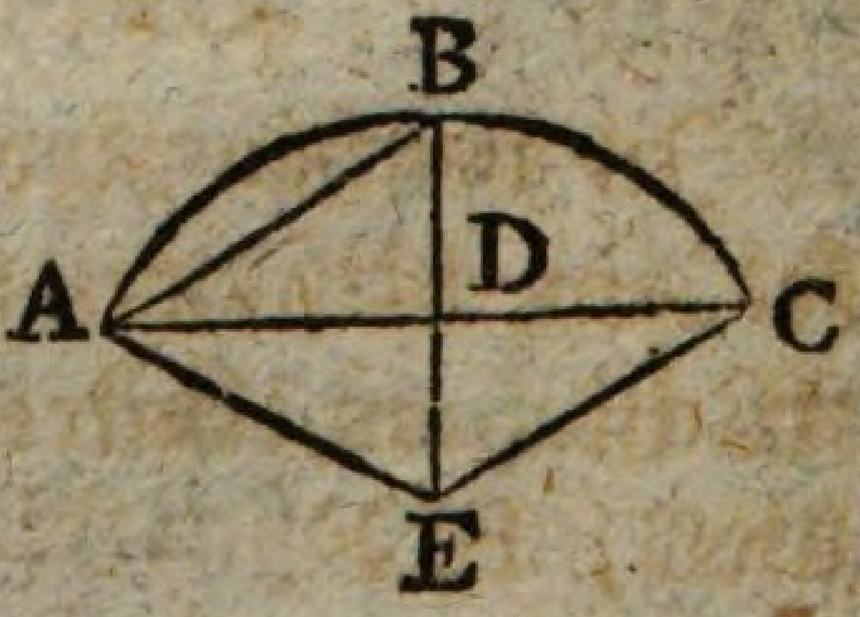
Aehnliche Kreisabschnitte, AEB, CFD, auf gleichen geraden Linien, AB, CD, sind einander gleich.



Bringe AEB auf CFD, und lege A auf C, und AB auf CD: so fällt (weil AB =CD) B auf D. Fielen nun nicht auch die Kreisbogen, AEB, CFD, auf einander, so müßte der eine entweder ganz über den andern hinaus fallen, oder ihn irgendwo noch in einem dritten Punkte schneiden. Das Erste ist gegen (3, 23. S.), das Zweyte gegen (3, 10. S.). Demnach müssen auch die Kreisbogen auf einander fallen, folglich die ähnlichen Kreisabschnitte AEB, CFD, sich decken, also einander gleich seyn.

Der 25. Satz. Aufgabe.

Den Kreis, wovon ein Abschnitt, ABC, gegeben ist, zu vollenden.



Halbire (1, 10. S.) AC in D, und errichte (1, 11. S.) auf AC in D den Perpendikel DB. Ziehe AB, so ist ABD entweder größer oder eben so groß, oder kleiner als BAD.

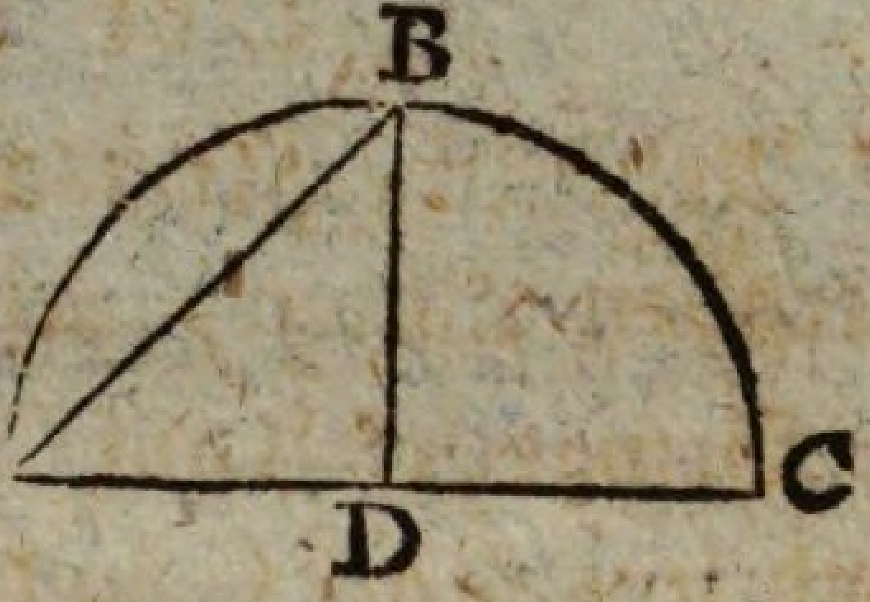
Erster Fall.

Ist ABD > BAD, so setze in A an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, verlängere BD bis E, und ziehe EC.

Hiernach ist (1, 6. S.) BE = EA. Nun ist, weil AD = DC, und DE gemein, auch bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) AE = EC. Folglich ist (1, 1. G.) auch BE = EC und (3, 9. S.) E des verlangten Kreises Mittelpunkt.

Auch ist klar, daß in diesem Falle der Kreisabschnitt ABC kleiner als der Halbkreis sey, weil der Mittelpunkt außerhalb desselben liegt.

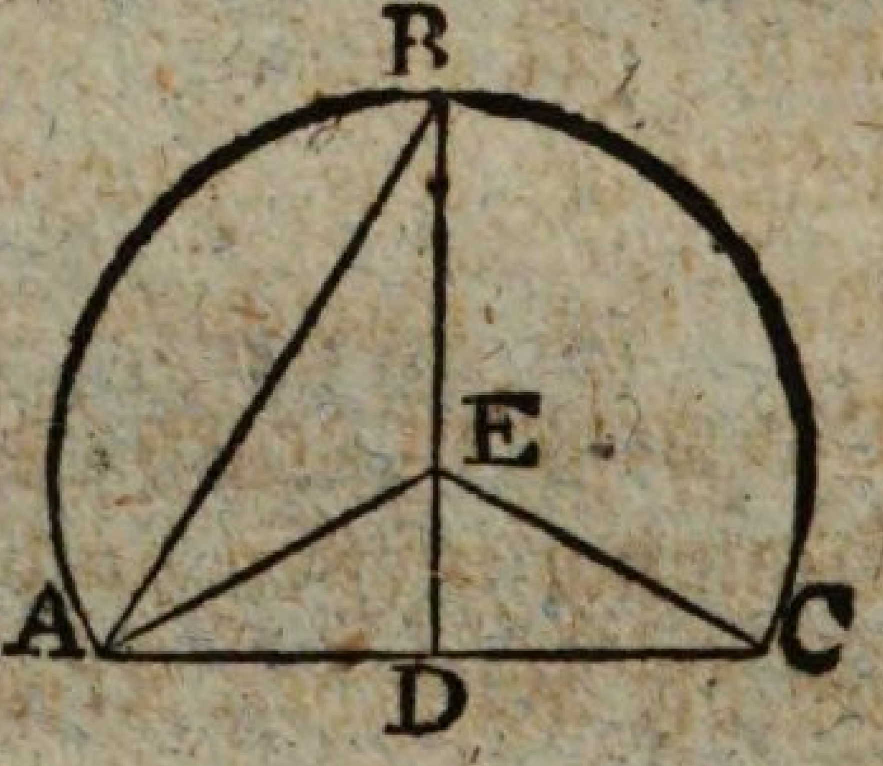
Zweyter Fall.



Ist ABD = BAD, so ist (1, 6. S.) AD = DB = DC. Folglich ist (3, 9. S.) D des verlangten Kreises Mittelpunkt.

In diesem Falle ist augenscheinlich der Abschnitt ABC ein Halbkreis.

Dritter Fall.



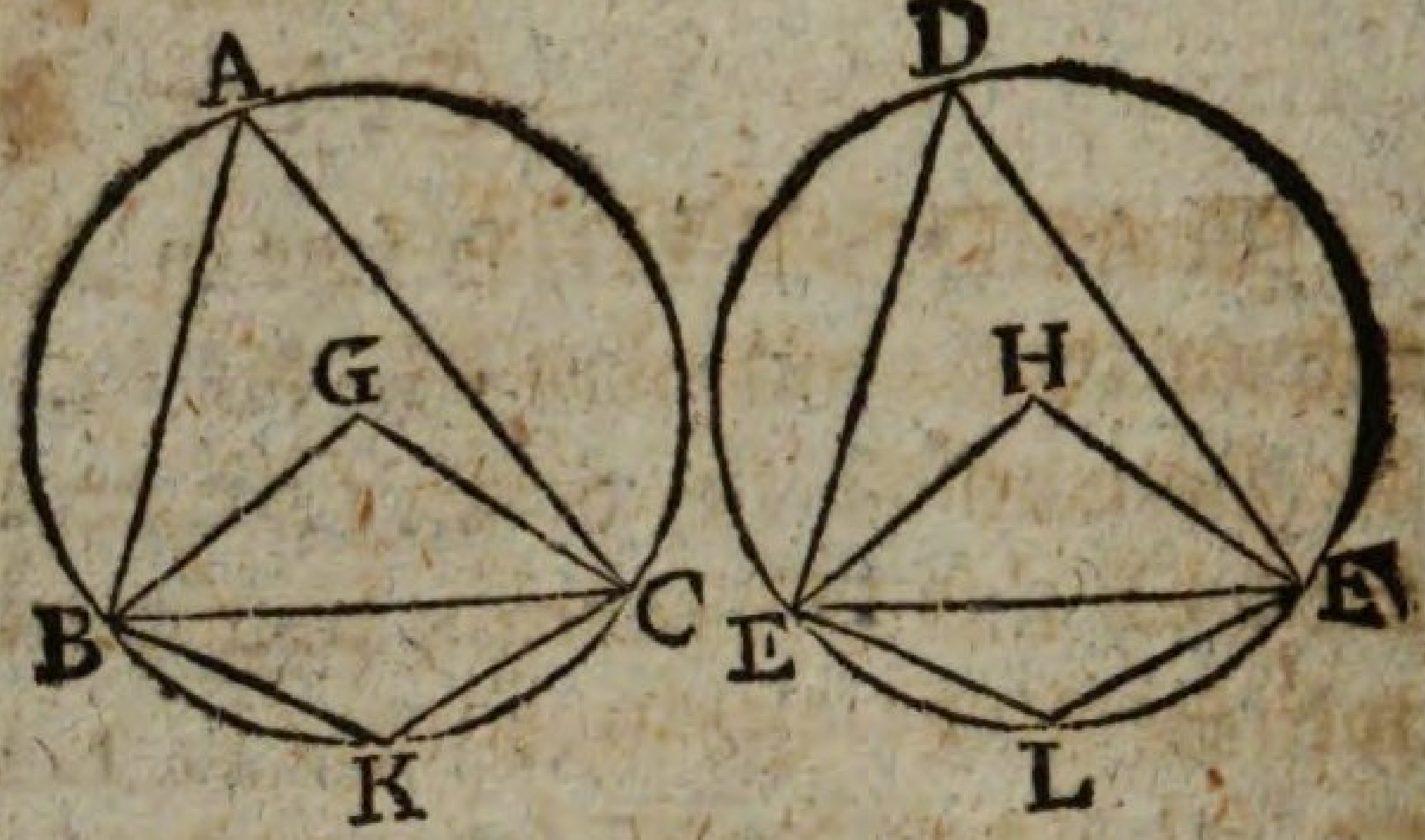
Ist ABD < BAD, so setze in A an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, und ziehe EC.

Hier wird, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß AE = EB = EC, und daher E des verlangten Kreises Mittelpunkt sey.

In diesem Falle fällt der Mittelpunkt innerhalb des Abschnitts ABC, welcher also offenbar größer als der Halbkreis ist.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

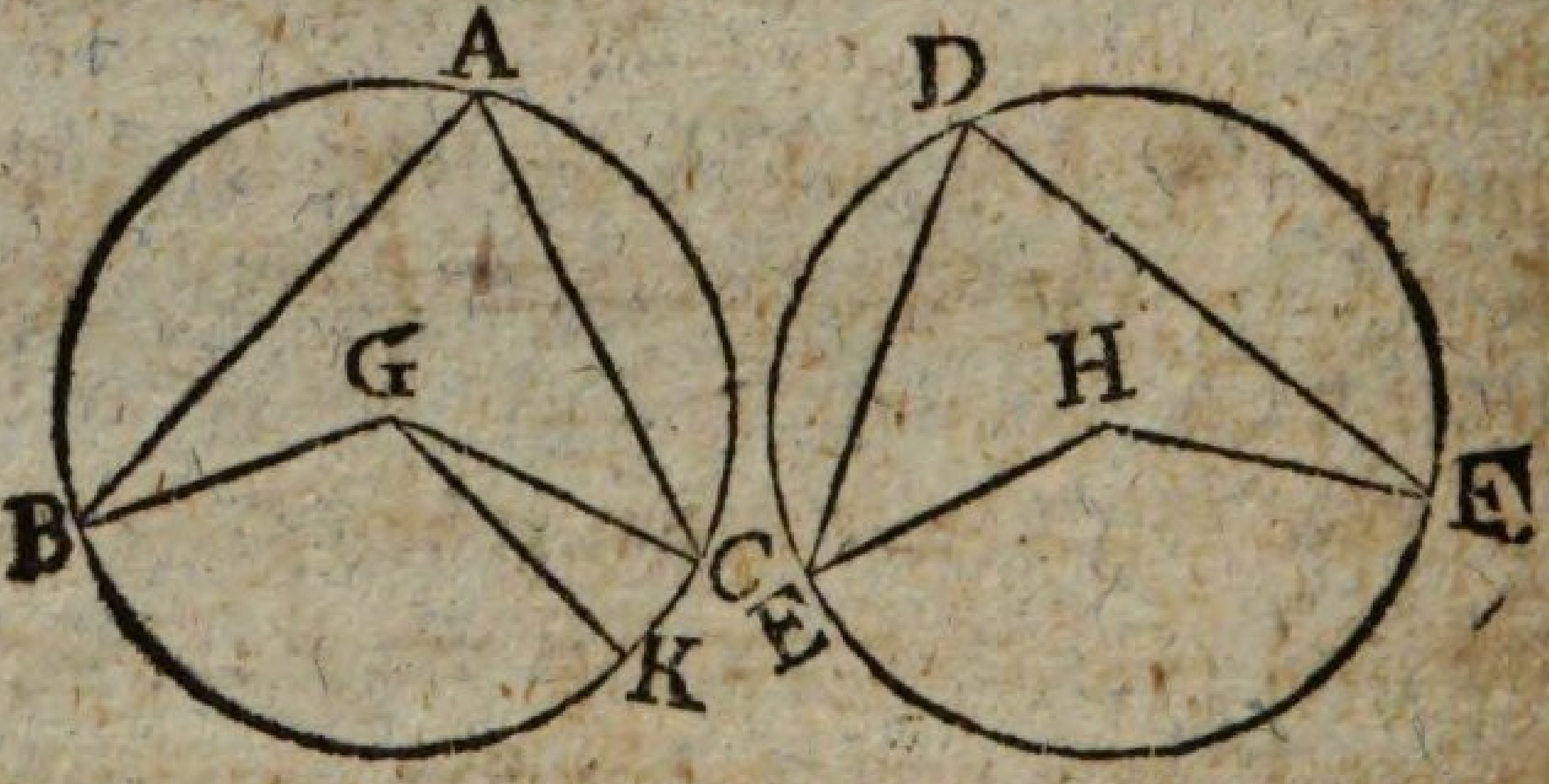
In gleichen Kreisen, ABC, DEF, stehen gleiche Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, sowohl, als gleiche Winkel am Umkreise, BAC, EDF, auf gleichen Bogen, BKC, ELF.



Ziehet man BC, EF, so ist (3, 1. E.), weil die Kreise gleich sind, BG = EH, und GC = HF. Nun ist auch BGC = EHF. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF. Da die Winkel bey A, D, gleich sind, so sind in den vierseitigen Figuren ABKC, DELF, (3, 22. S.) auch die Winkel K, L, gleich, also (3, 11. E.) die Abschnitte BKC, ELF, ähnlich. Nun war auch BC = EF. Folglich sind (3, 24. S.) diese Abschnitte sowohl, als ihre Bogen BKC, ELF, gleich.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, sind die auf gleichen Bogen, BC, EF, stehenden Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, sowohl als am Umkreise, BAC, EDF, einander gleich.



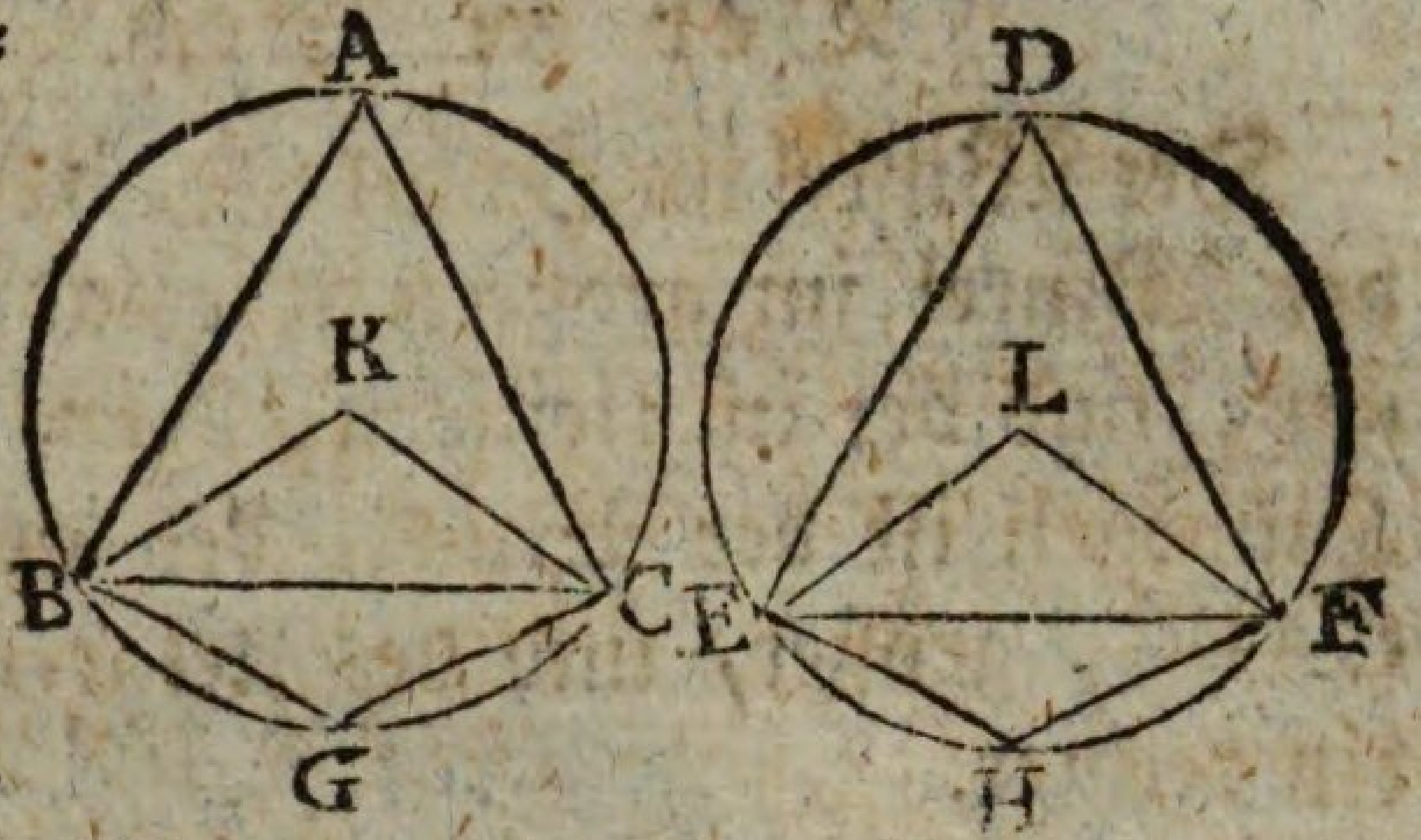
Wären BGC, EHF, ungleich, so wäre einer davon, etwa BGC, größer. Es sey daher (1, 23. S.) BGK = EHF, folglich (3, 26. S.) BK = EF. Nun ist angenommen BC = EF. Folglich wäre BK = BC, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach ist BGC = EHF, also (3, 20. S.) auch BAC = EDF.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, schneiden gleiche gerade Linien, BC, EF, gleiche Bogen ab: daß nämlich die größern Bogen, BAC, EDF, so wie die kleinern, BGC,, EHF, einander gleich sind.

Nimm

Nimm der Kreise Mittelpunkte, K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF; so ist (3, 1. E.) weil die Kreise gleich, BK = EL, und KC = LF. Nun ist auch BC = EF.

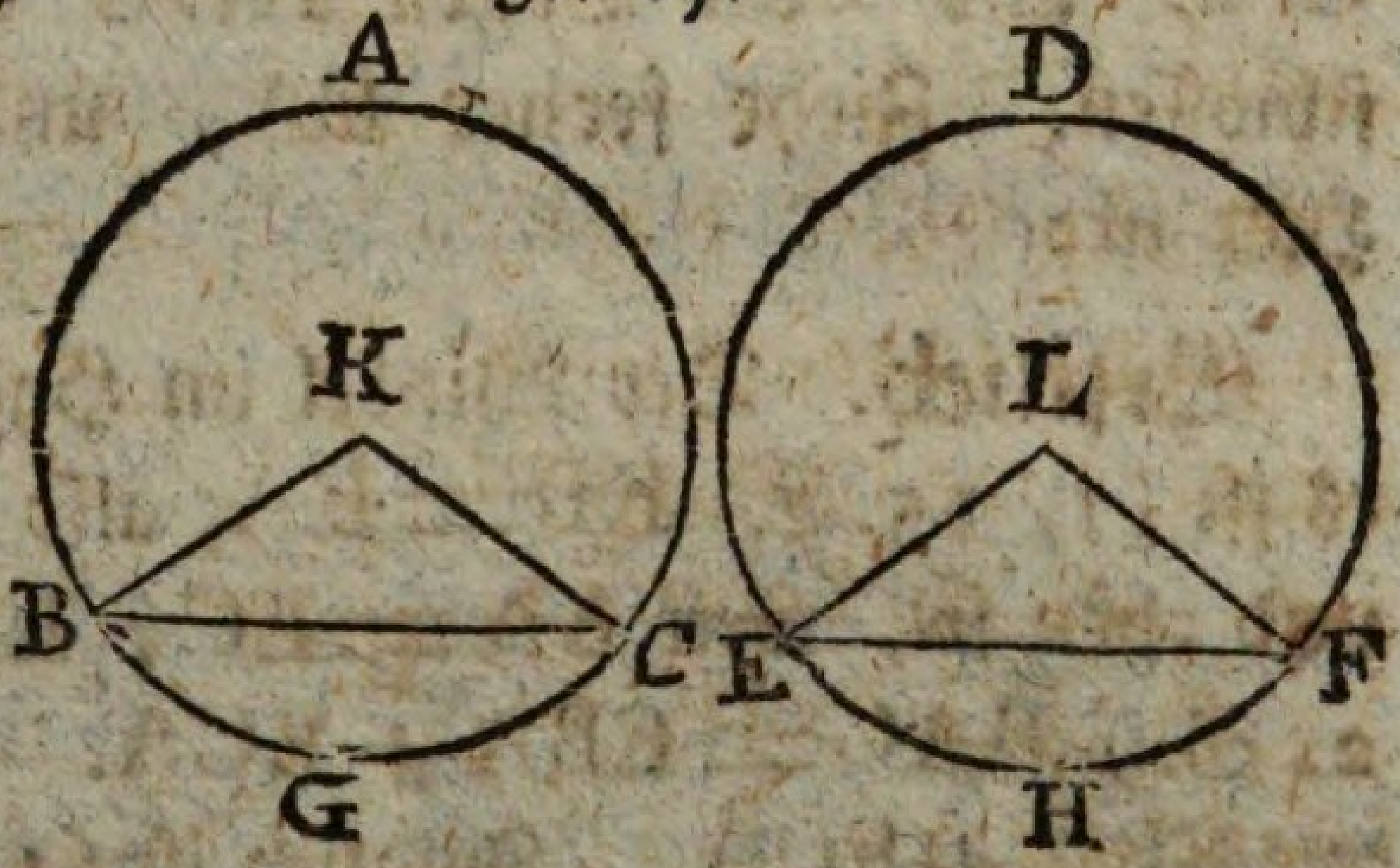


Folglich sind (1, 8. S.) die Winkel bey K, L, also (3, 20. S.) auch bey A, D, also (3, 22. S.) auch bey G, H, gleich. Folglich sind (3, 26. S.) die Bogen BAC, EDF, sowohl, als die Bogen BGC, EHF, einander gleich.

Der 29. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, sind die geraden Linien, BC, EF, welche die Endpunkte gleicher Bogen, BGC, EHF, verbinden, einander gleich.

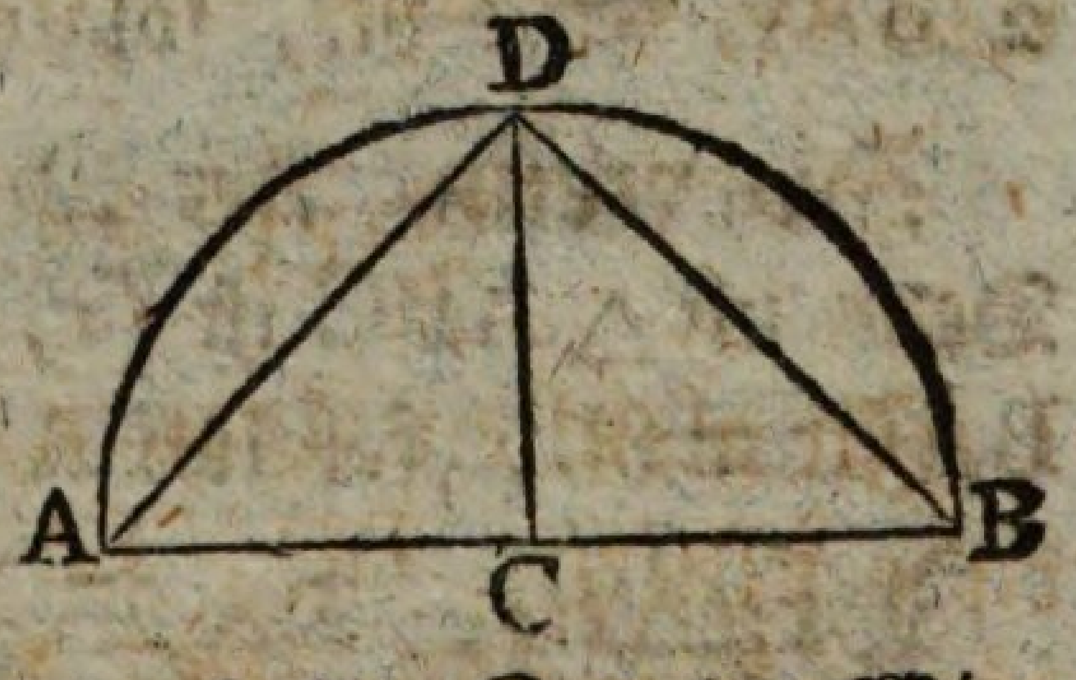
Nimm die Mittelpunkte K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche (3, 1. E.) gleich sind. Nun sind, weil BGC = EHF, (3, 27. S.) auch die Winkel bey K, L, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF.



Der 30. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen, ABD, zu halbiren.

Ziehe AB, und halbire sie (1, 10. S.) in C. Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe AD, CB: so ist ADB in D halbirt.

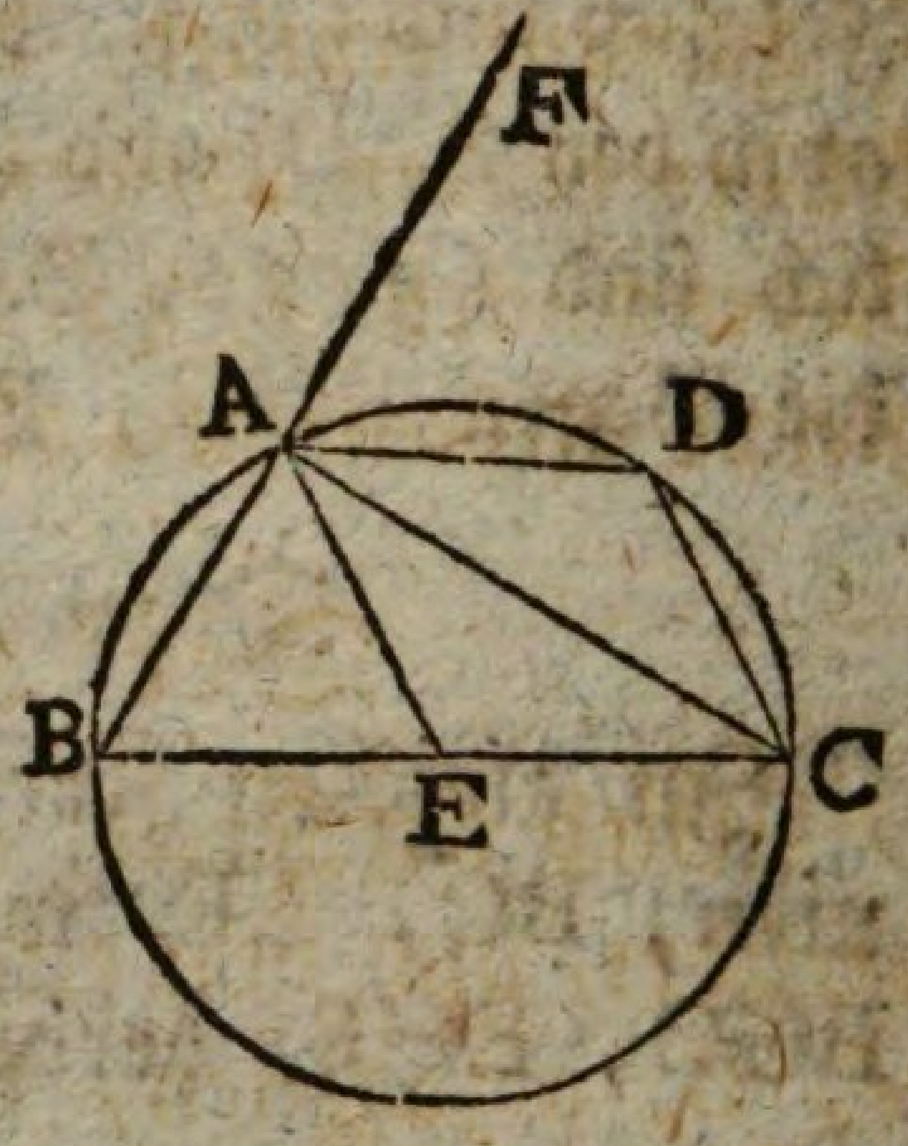


Denn da AC = CB, CD gemein, und bey C rechte Winkel: so ist (1, 4. S.) AD = DB; folglich sind (3, 28. S.) auch die Bogen AD, DB gleich.

Der

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise, BAC, ist ein rechter; aber der Winkel im größern Kreisabschnitte, ABC, ist kleiner, und der im kleinern, ADC, größer als ein rechter. Hingegen ist der Winkel des größern Kreisabschnittes, CABC, größer, und des kleinern, CADC, kleiner, als ein rechter.



Des Kreises ABCD Mittelpunkt sey E, sein Durchmesser BC. Nimm im Umkreise über BC willkührlich zwey Punkte A, D, und ziehe die geraden Linien BA, AC, AD, DC: so wird der Halbkreis von BC, und dem Bogen BADC; der größere Abschnitt von CA, und dem Bogen ABC; der kleinere von CA, und dem Bogen ADC eingeschlossen. Ziehe ferner EA, und verlängere BA nach F. Hier ist:

Erstlich. Der Winkel im Halbkreise BAC = R. Denn es ist (1, 15. E.) EB = EA, also (1, 5. S.) EAB = EBA, und eben so, weil EA = EC, EAC = ECA; folglich (1, 2. G.) BAC = EBA + ECA. Nun ist (1, 32. S.) FAC = EBA + ECA. Folglich ist (1, 1. G) BAC = FAC = R. (1, 10. E.) **Oder**: Es ist (1, 32. S.) AEC = 2 BAE, und AEB = 2 EAC, folglich AEC + AEB = 2 BAC. Nun ist (1, 13. S.) AEC + AEB = 2 R. Folglich ist 2 BAC = 2 R., folglich BAC = R.

Zweytens. Der Winkel im größern Abschnitte ABC < R. Denn im △ ABC ist (1, 32. S.) ABC + BAC < 2 R., aber BAC = R., folglich ABC < R.

Drittens. Der Winkel im kleinern Abschnitte ADC < R. Denn in der vierseitigen Figur ABCD ist (3, 22. S.) ABC + ADC = 2 R., aber ABC < R., folglich ADC > R.

Vier-

Viertens. Der Winkel des größern Abschnitts CABC > R. Denn er ist offenbar größer, als der rechte Winkel CAB.

Fünftens. Der Winkel des kleinern Abschnitts CADC < R. Dennn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel CAF.

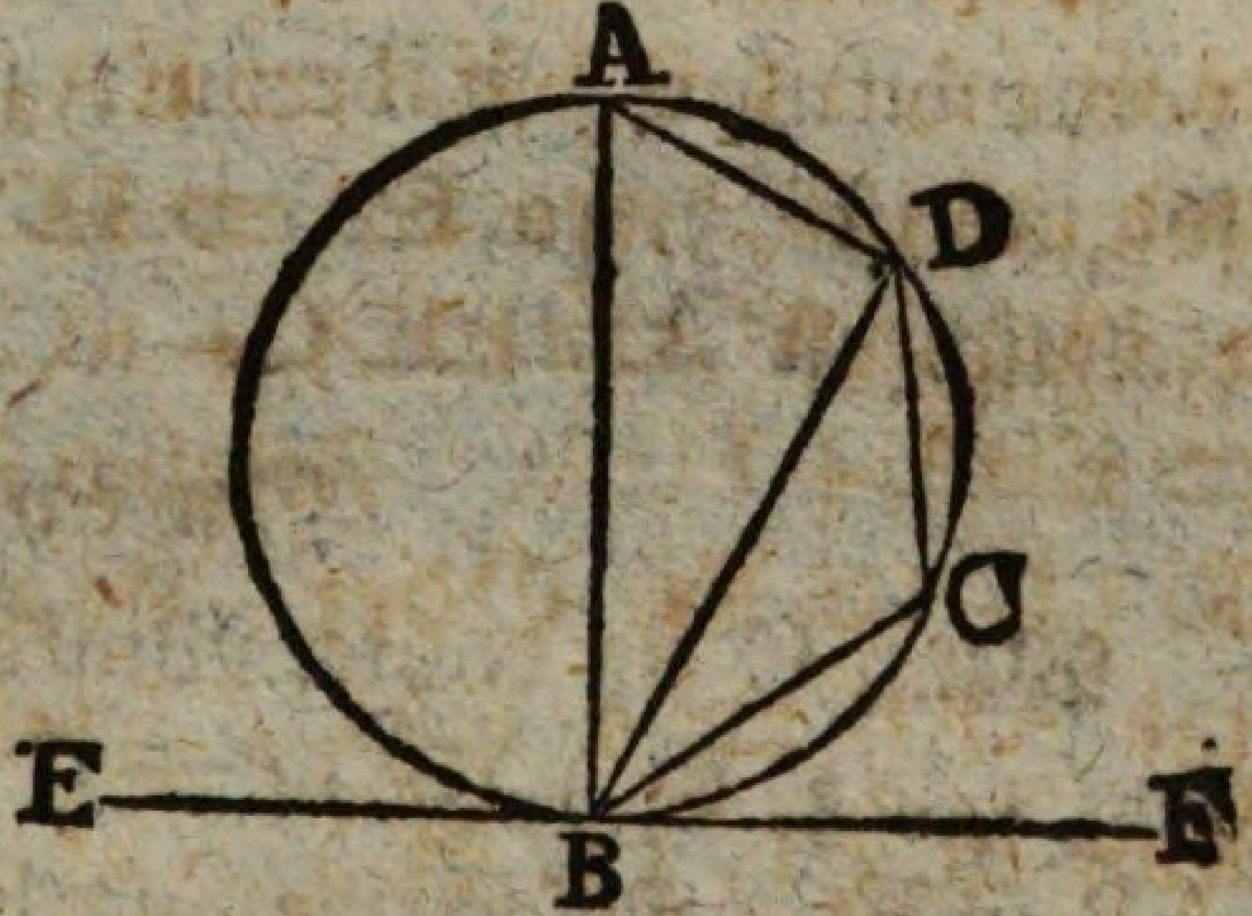
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen gleich ist, er ein rechter sey; weil sein Nebenwinkel (1, 32. S.) denselben beyden Winkeln gleich ist, gleiche Nebenwinkel aber (1, 10. E.) rechte sind.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Kreis, ABCD, von einer geraden Linie, EF, berührt, und von einer andern aus dem Berührungspunkte, B, gezogenen, BD, geschnitten: so sind die Winkel, DBF, DBE, welche die schneidende Linie mit der berührenden macht, den Winkeln in den Nebenabschnitten des Kreises gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf EF in B den Perpendikel BA. Im Bogen BD nimm willkührlich einen Punkt C, und ziehe AD, DC, CB: so ist zu beweisen, daß DBF = DAB, und DBE = DCB.



Erstlich. Im Perpendikel BA ist (3, 19. S.) des Kreises Mittelpunkt, folglich (3, 31. S.) ADB = R. = ABD + BAD. Nun ist ABF = R = ABD + DBF. Folglich ist (1, 1. G.) ABD + BAD = ABD + DBF. Folglich (1, 3. G.) BAD = DBF.

Zweytens, in der vierseitigen Figur ABCD ist (3, 22. S.) BAD + DCB = 2 R. = DBF + DBE. Nun ist erwiesen, daß BAD = DBF. Folglich ist (1, 3. G.) DCB = DBE.

Der

Der 33. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen Winkel fasse, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel, C, gleich ist.

Der gegebene Winkel C ist entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel.

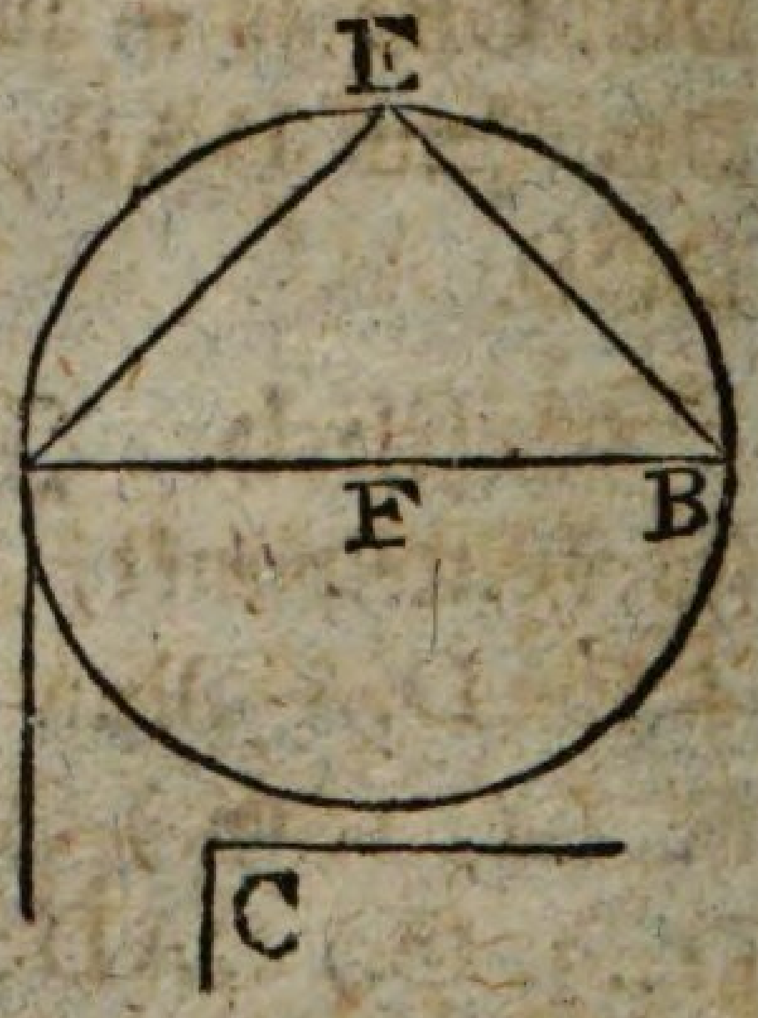
Erster Fall.

Wenn C ein spitzer Winkel ist. Setze an A (1, 23. S.) BAD = C. Errichte in A auf DA (1, 11. S.) den Perpendikel AE, und halbire (1, 10. S.) AB in F. Errichte in F auf AB (1, 11. S.) den Perpendikel FG, und ziehe GB: so ist, weil AF = FB, auch FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB, folglich geht ein um G mit GA beschriebener Kreis auch durch B.

Er werde nun beschrieben und sey ABE, und BE gezogen: so ist AEB = C.

Denn da DA auf dem Durchmesser AE im Endpunkte A perpendikular, so berührt sie (3, 16. S.) den Kreis in A, folglich ist (3, 32. S.) BAD = AEB. Nun ist BAD = C. Folglich ist AEB = C.

Zweyter Fall.

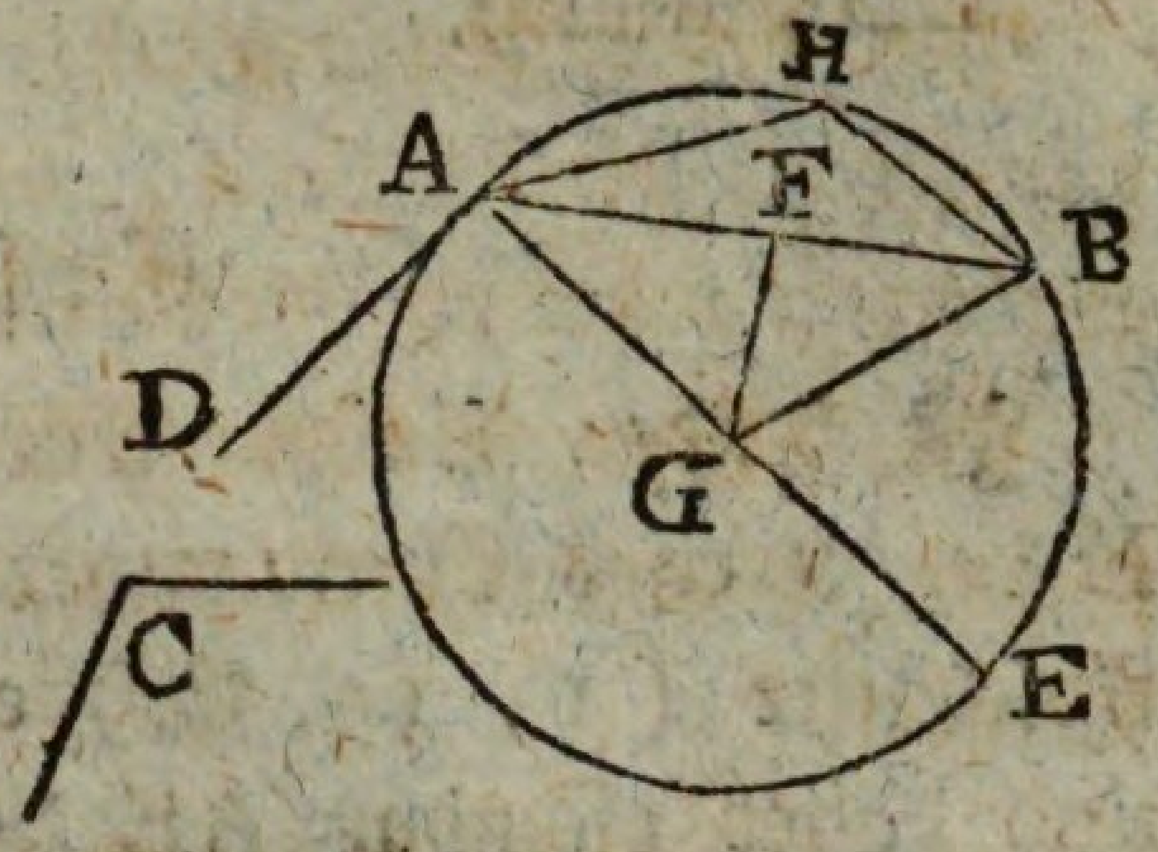


Wenn C ein rechter Winkel ist. Setze an A (1, 23. S.) BAD = C, und halbire AB in F. Beschreibe aus F mit FA, oder FB, den Kreis AEB. Im Umkreise nimm willkührlich einen Punkt E, und ziehe AE, EB: so ist AEB = C.

Denn hier ist wiederum (3, 16. S.) DA eine Berührungslinie, weil BAD = R. Auch ist BAD = AEB, weil AEB der Winkel im Halbkreise, also gleichfalls ein rechter ist. Nun ist BAD = C, folglich auch AEB = C.

Drit-

Dritter Fall.

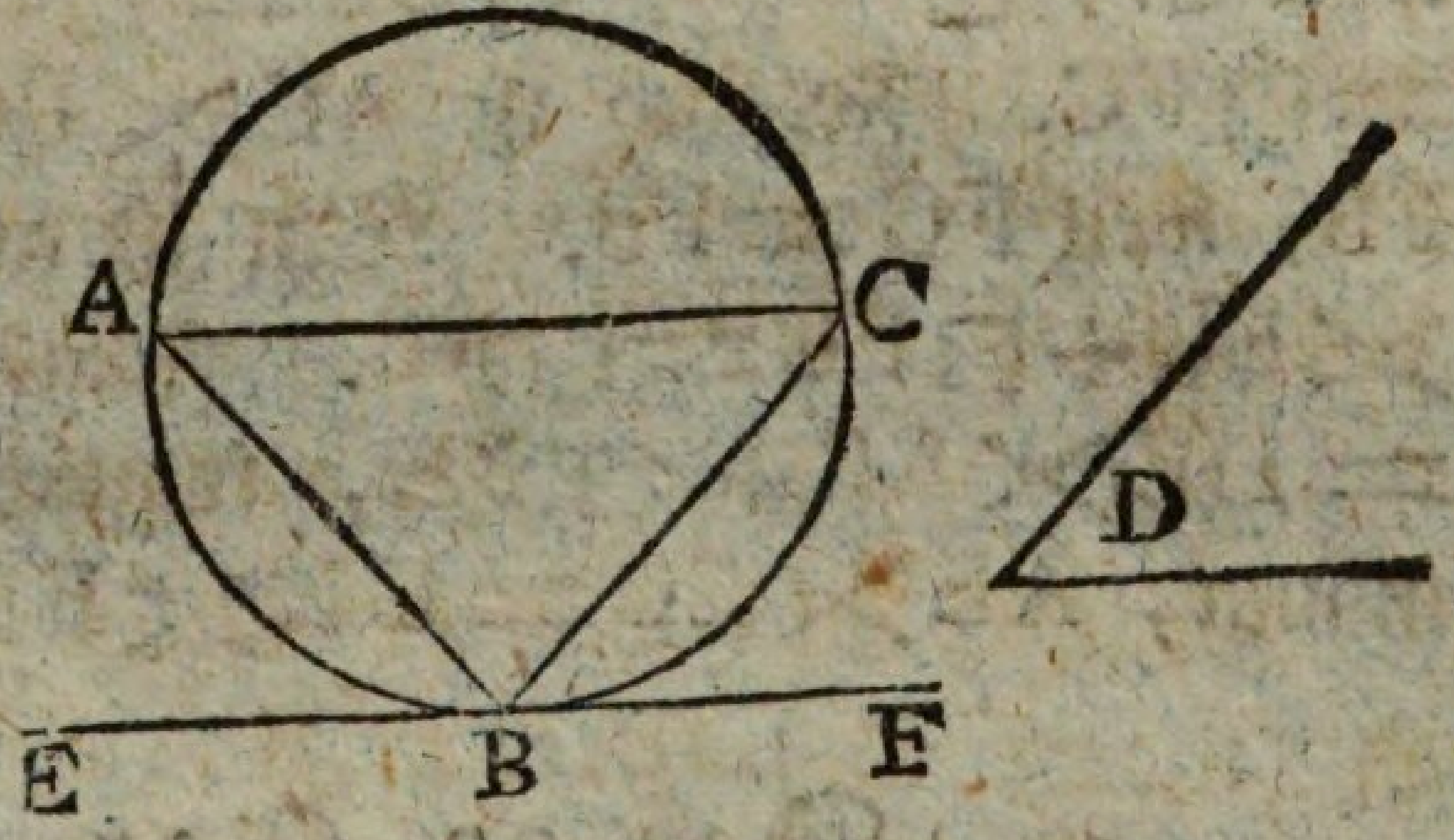


Wenn C ein stumpfer Winkel ist. An A setze (1, 23. S.) BAD = C. Auf DA errichte in A (1, 11. S.) den Perpendikel AE. Halbire AB in F, und errichte den Perpendikel FG. Ziehe GB, so ist, weil AF = FB, auch FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Aus G beschreibe mit GA, oder GB, den Kreis AEB. Nimm in dem Bogen AB willkührlich den Punkt H, und ziehe AH, AB: so ist AHB = C.

Denn hier ist wieder DA (3, 16. S.) eine Berührungslinie, folglich (3, 32. S.) BAD, das ist C = AHB.

Der 34. Satz. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise, ABC, einen Abschnitt zu nehmen, der einen Winkel fasse, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel, D, gleich ist.



Ziehe an B (3, 17. S.) die Berührungslinie EBF. An FB setze in B (1, 23. S.) FBC = D. Im Umkreise nimm jenseits willkührlich den Punkt A, und ziehe AB, AC: so ist BAC = D.

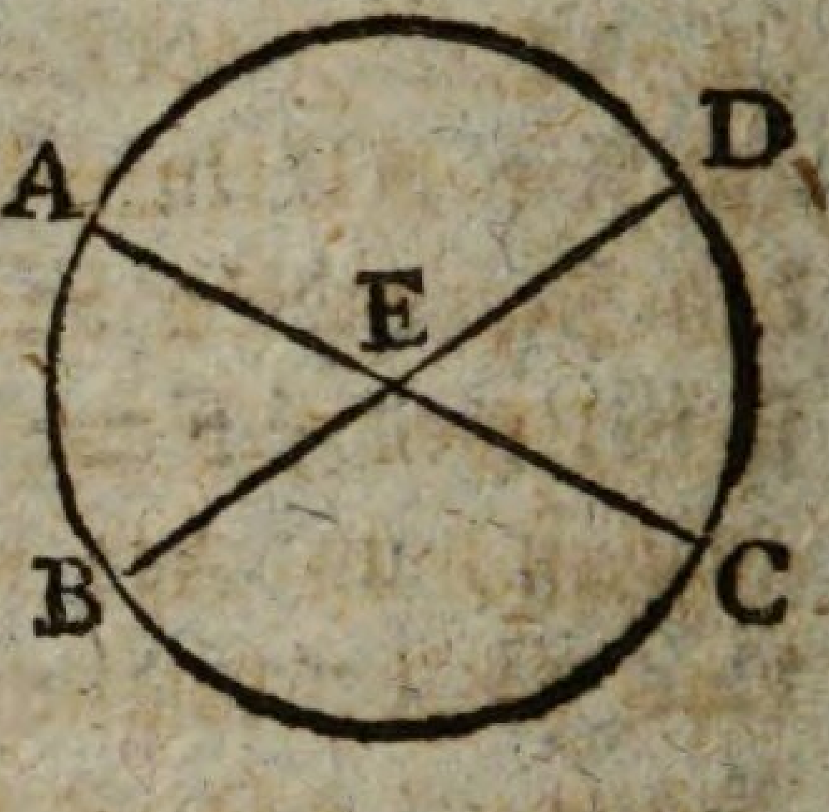
Denn da EF eine Berührungslinie, so ist (3, 32. S.) FBC, das ist D = BAC.

Der 35. Satz. Lehrsatz.

Schneiden einander in einem Kreise, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD: so ist das unter den Abschnitten der einen, AC, enthaltene Rectangel, AE × EC, dem unter

unter den Abschnitten der andern, BD, enthaltenen, $BE \times ED$, gleich.

Erster Fall.



Ist beyder Linien Durchschnittspunkt E des Kreises Mittelpunkt: so sind die Abschnitte (1, 15. E.) einander gleich, und daher offenbar $AE \times EC = BE \times ED$.

Zweyter Fall.

Ist E aber nicht der Mittelpunkt des Kreises, so sey solcher F. Aus F fälle auf AC BD die Perpendikel FG, FH, und ziehe FB, FC, FE: so ist (3, 3. S.) $AG = GC$, folglich (2, 5. S.) $AE \times EC + \square GE = \square GC$, folglich, wenn $\square GF$ hinzukommt, (1, 2. G.) $AE \times EC + \square GE + \square GF = \square GC + \square GF$. Nun ist, weil bey G rechte Winkel, (1, 47. S.) $\square GE + \square GF = \square FE$, und $\square GC + \square GF = \square FC$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = \square FC = \square FB$, weil $FC = FB$. Nun ist aus eben den Gründen $DE \times EB + \square FE = \square FB$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = DE \times EB + \square FE$, folglich, wenn man $\square FE$ wegnimmt, $AE \times EC = DE \times EB$.

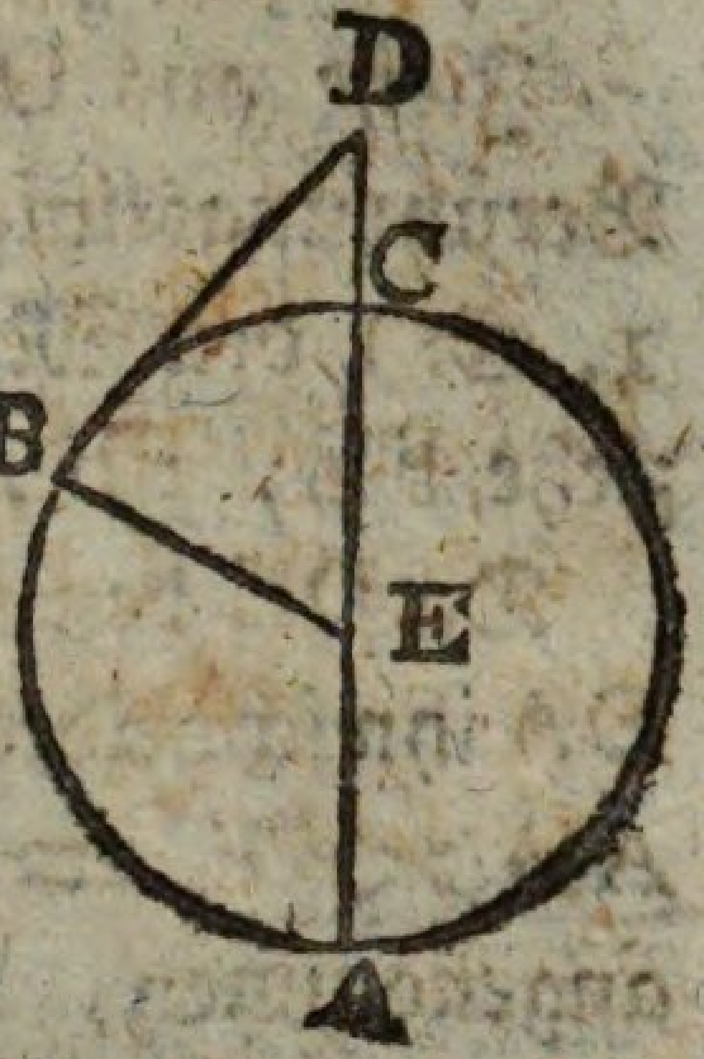
Der 36. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC, genommenen Punkte, D, zwey gerade Linien an den Umkreis, von denen ihn die eine, DCA, schneidet, die andere, DB, berührt: so ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC, enthaltene Rectangel dem Quadrate der Berührungslinie, DB, gleich.

Erster

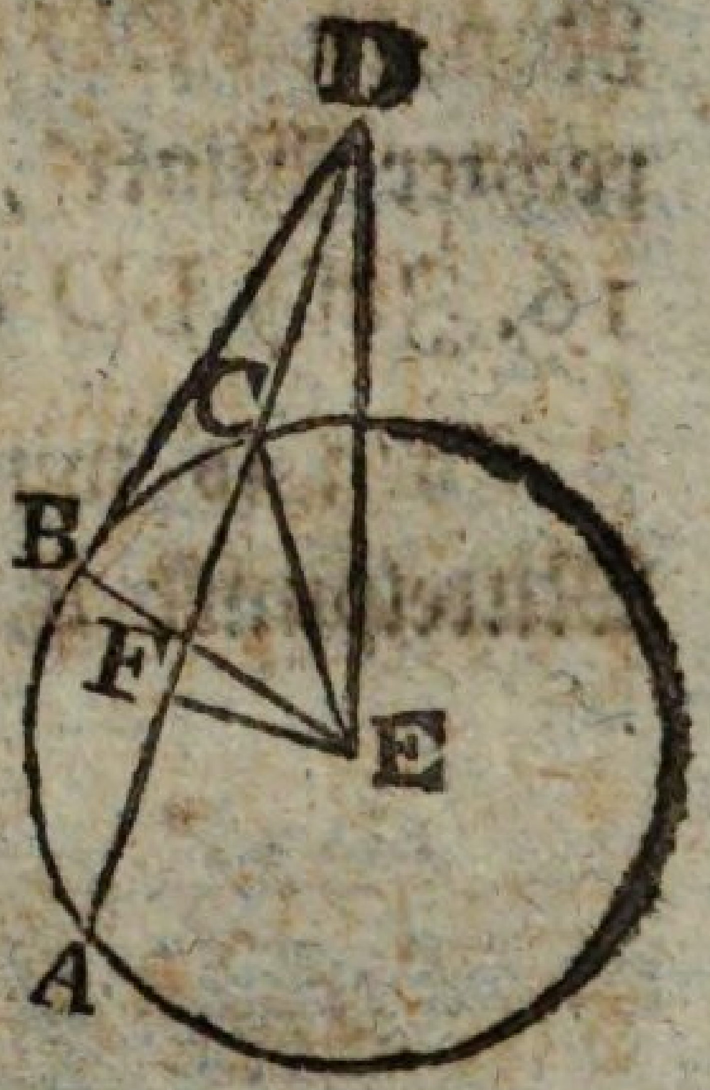
Erster Fall.

Die schneidende Linie DA gehe durch den Mittelpunkt E. Ziehe EB, so ist (3, 18. S.) EBD ein rechter Winkel, und daher (1, 47. S.) $\square ED = \square DB + \square BE$. Nun ist, weil $CE = EA$, (2, 6. S.) $AD \times DC + \square CE = \square ED$, oder, (weil $CE = BE$) $AD \times DC + \square BE = \square ED$. Folglich ist $AD \times DC + \square BE = \square DB + \square BE$, folglich, wenn man $\square BE$ wegnimmt, $AD \times DC = \square DB$.



Zweyter Fall.

Die schneidende Linie DA gehe nicht durch den Mittelpunkt E. Aus E fälle auf AC (1, 12. S.) den Perpendikel EF, und ziehe EB, EC, ED: so ist (3, 3. S.) AC in F halbirt, folglich (2, 6. S.) $AD \times DC + \square FC = \square FD$, folglich, wenn $\square FE$ hinzukommt, (1, 2. S.) $AD \times DC + \square FC + \square FE = \square FD + \square FE$. Nun ist, weil bey F rechte Winkel, (1, 47. S.) $\square FC + \square FE = \square EC =$ (1, 15. E.) $\square EB$, und $\square FD + \square FE = \square DE =$ (1, 47. S.) $\square DB + \square EB$. Folglich ist $AD \times DC + \square EB = \square DB + \square EB$, folglich, wenn man $\square EB$ wegnimmt, $AD \times DC = \square DB$.

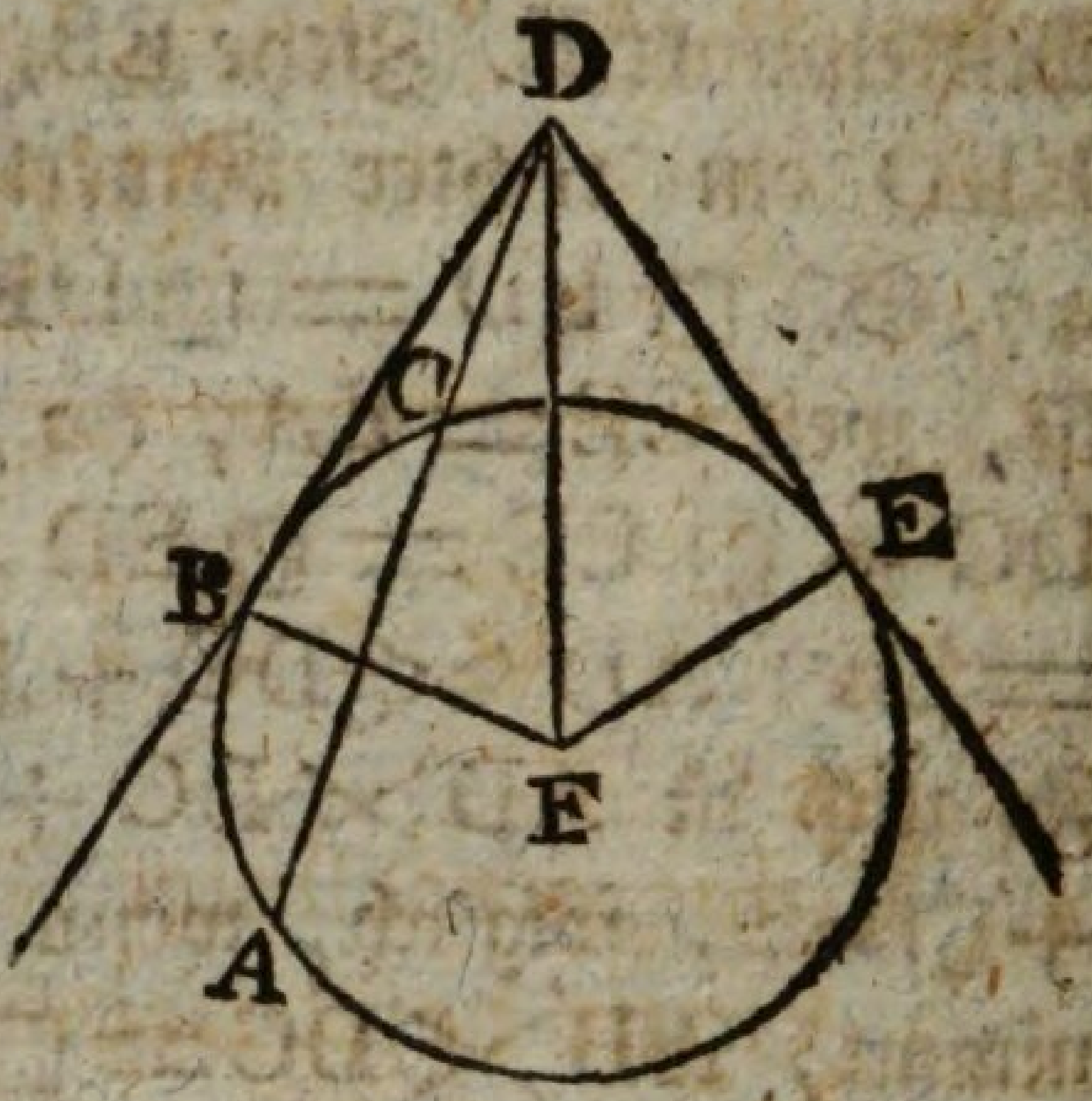


Der 37. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC, genommenen Punkte, D, zwey gerade Linien an den Umkreis, von denen die eine, DCA, ihn schneidet, die andere, DB, an ihn fällt; und ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC, enthaltene Rectangel dem Quadrate

der an den Umkreis fallenden Linie, DB, gleich: so ist letztere eine Berührungslinie des Kreises.

Ziehe aus D (3, 17. S.) die Berührungslinie DE. Nimm (3, 1. S.) den Mittelpunkt F, und ziehe FE, FB, FD.



Da DE den Kreis berührt, und DA ihn schneidet: so ist (3, 36. S.) AD $\times$ DC $=$ □ DE. Nun ist angenommen, AD $\times$ DC $=$ □ DB. Folglich ist □ DB $=$ □ DE, und daher DB $=$ DE. Nun ist auch (1, 15. E.) FB $=$ FE, auch FD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) FBD $=$ FED. Nun ist FED ein rechter Winkel. Folglich ist auch FBD ein rechter Winkel, also BD auf FB perpendikular, folglich (3, 16. Zus.) BD eine Berührungslinie.

Eben so wird auch der Beweis geführt, wenn des Kreises Mittelpunkt F in DA ist.

Euklid's

Euklid's Elemente

Viertes Buch.

Erklärungen.

1. Eine geradlinige Figur heißt **in eine geradlinige Figur beschrieben**, wenn jeder Winkel der eingeschriebenen Figur eine Seite derjenigen, in welche sie beschrieben ist, trifft.

2. Eine geradlinige Figur heißt gleichermaßen **um eine geradlinige Figur beschrieben**, wenn jede Seite der umschriebenen Figur einen Winkel derjenigen, um welche sie beschrieben ist, trifft.

3. Eine geradlinige Figur heißt **in einen Kreis beschrieben**, wenn jeder Winkel der eingeschriebenen Figur des Kreises Umring trifft.

4. Eine geradlinige Figur heißt **um einen Kreis beschrieben**, wenn jede Seite der umschriebenen Figur des Kreises Umring berührt.

5. Ein Kreis heißt gleichermaßen **in eine geradlinige Figur beschrieben**, wenn des Kreises Umring jede Seite der Figur, in welche er beschrieben ist, berührt.

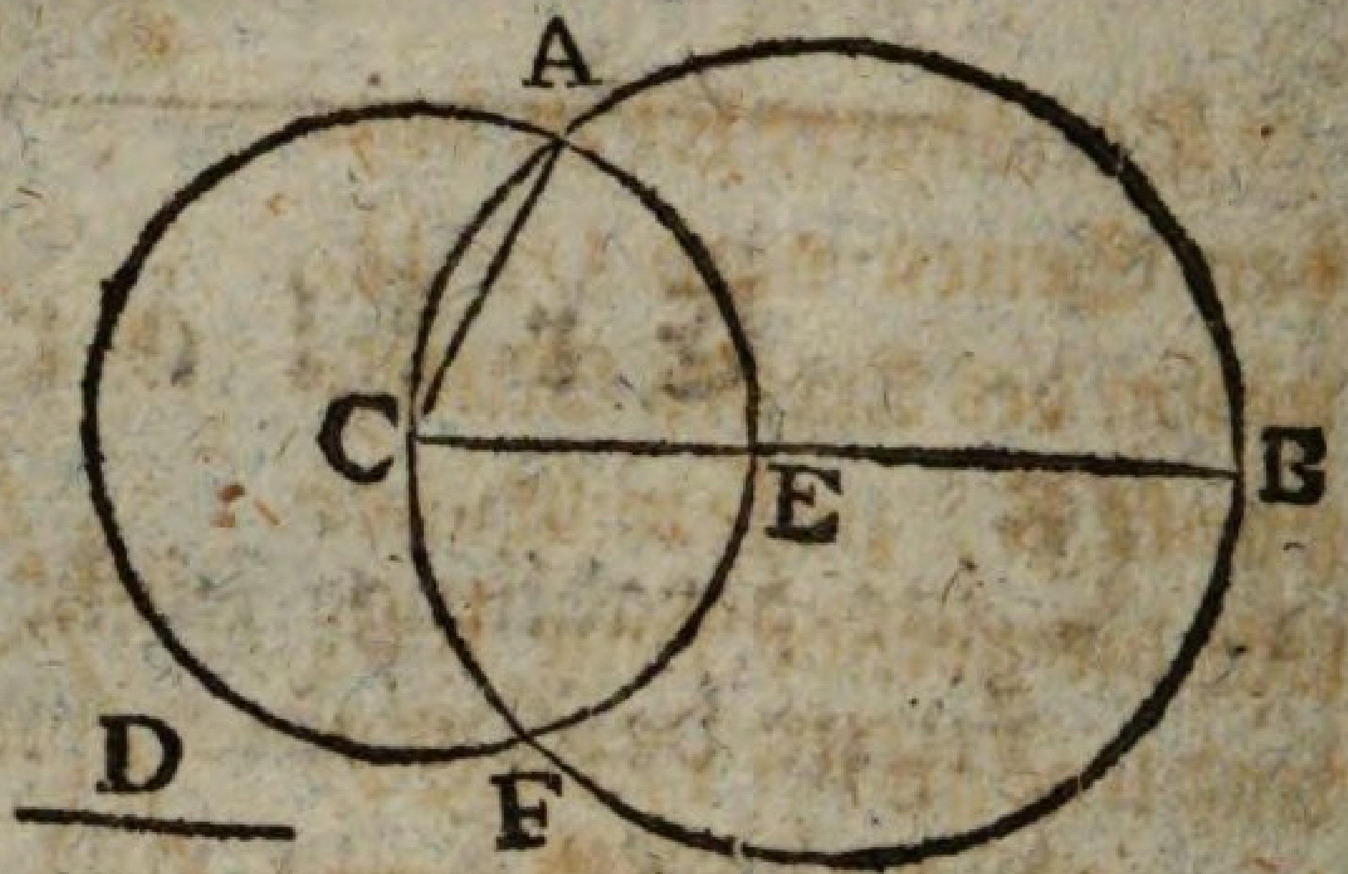
6. Ein Kreis heißt **um eine geradlinige Figur beschrieben**, wenn des Kreises Umring jeden Winkel der Figur, um welche er beschrieben ist, trifft.

7. Eine gerade Linie heißt **in einen Kreis eingetragen**, wenn ihre Endpunkte in des Kreises Umringe sind.

Der 1. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABC, eine gerade Linie einzutragen, welche einer gegebenen, des Kreises Durchmesser nicht übertreffenden geraden Linie, D, gleich sey.

Ziehe des Kreises Durchmesser BC. Ist nun BC = D, so ist das Verlangte geschehen. Ist aber BC > D, so mache (1, 3. S.) CE = D, beschreibe aus C mit CE den Kreis AEF, und ziehe CA: so ist diese die verlangte Linie.

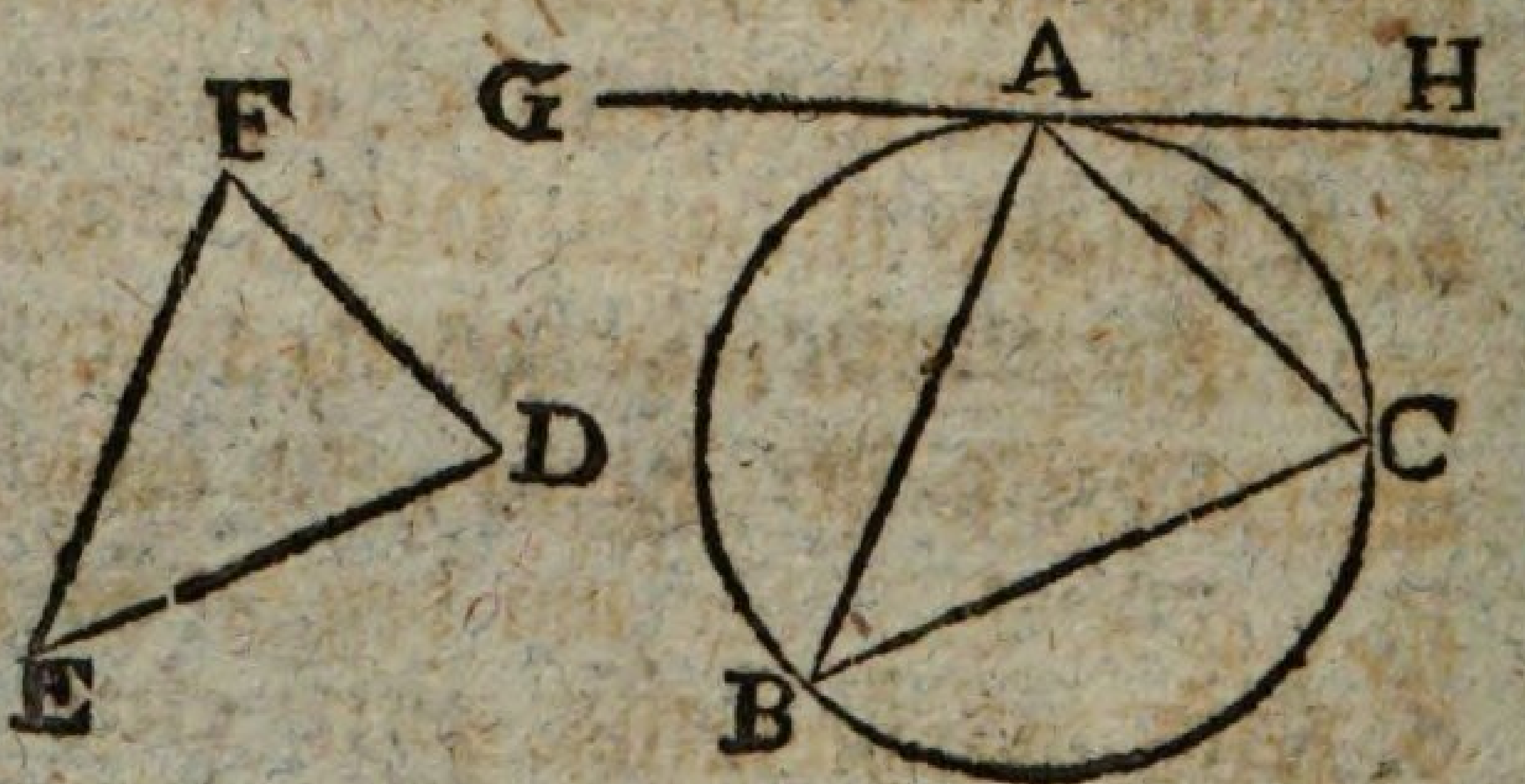


Denn da (1, 15. E.) CA = CE, aber CE = D: so ist (1, 1. G.) die (4, 7. E.) eingetragene CA = D.

Der 2. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABC, einen Triangel zu beschreiben, der einem gegebenen Triangel, DEF, gleichwinklig sey.

In des Kreises Umringe nimm willkührlich den Punkt A, ziehe (3, 16. Zus.) die Berührungslinie GAH, lege an A (1, 23. S.) die Winkel HAC = E, und GAB = D, und ziehe BC: so ist ABC der verlangte Triangel.

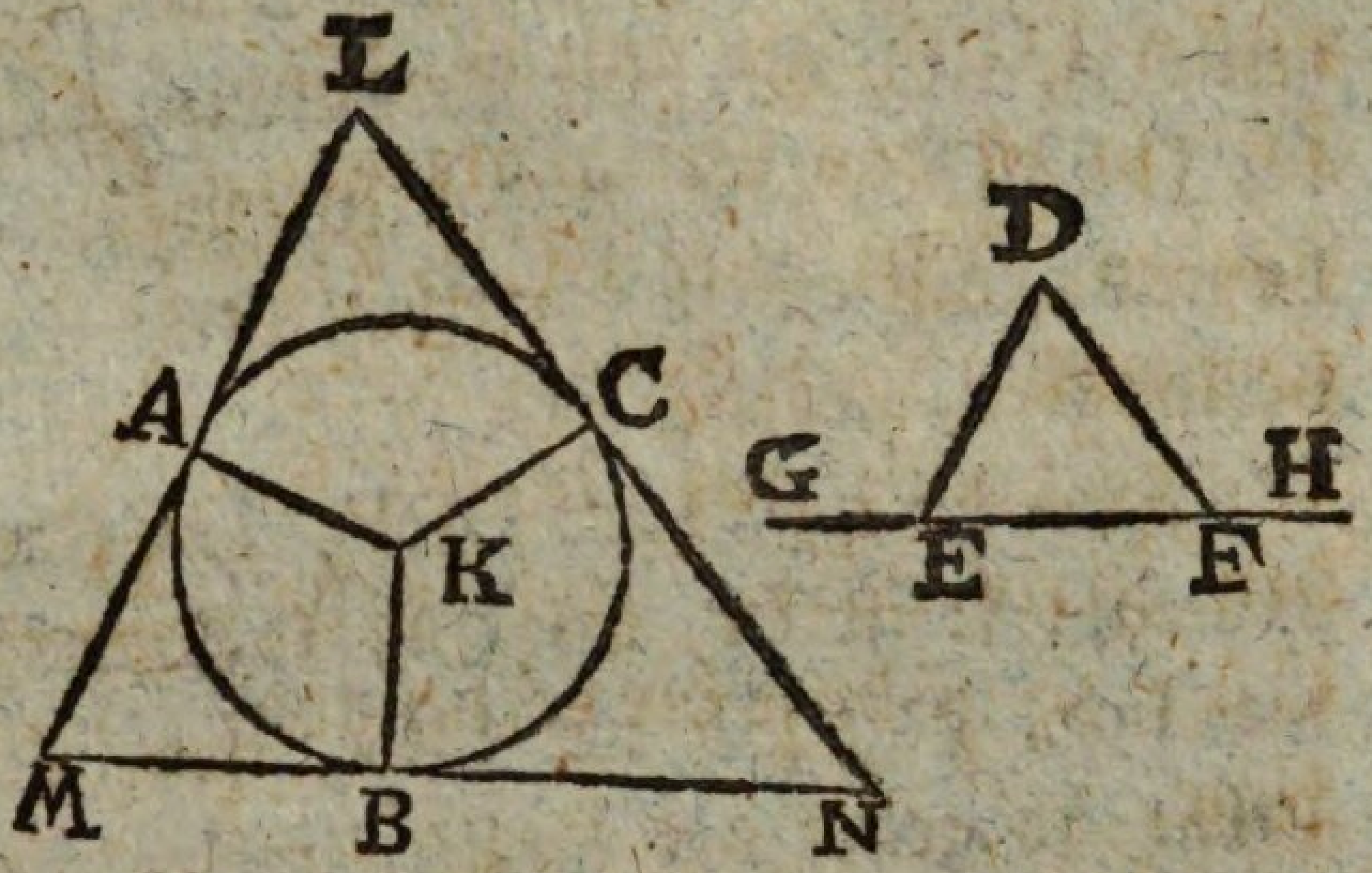


Denn da (3, 32. S.) HAC = ABC, aber HAC = E: so ist (1, 1. G.) ABC = E. Nun ist aus eben den Gründen ACB = D. Folglich ist (1, 32. S.) BAC = F. Demnach ist der (4, 3. E.) in den Kreis beschriebene △ ABC dem △ FED gleichwinklig.

Der

Der 3. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABC, einen Triangel zu beschreiben, der einem gegebenen Triangel, DEF, gleichwinklig sey.



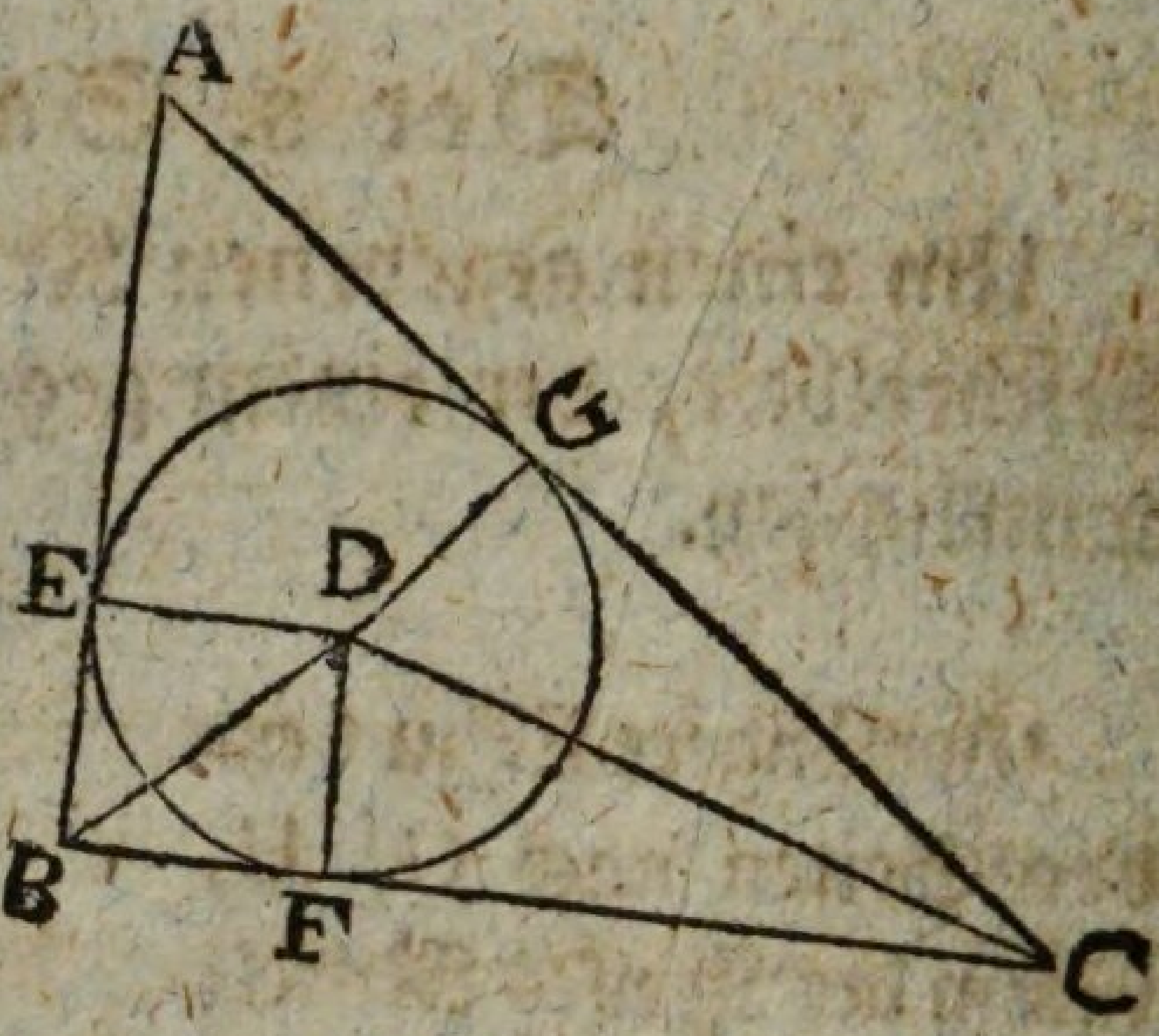
Verlängere EF zu beyden Seiten nach G, H, nimm des Kreises Mittelpunkt K, ziehe willkührlich die gerade Linie KB, und lege an K (1, 23. S.) die Winkel BKA = DEG, und BKC = DFH. Ziehe endlich (3, 16. Zus.) an den Kreis durch die Punkte, A, B, C, die Berührungslinien LM, MN, NL: so ist LMN der verlangte Triangel.

Denn da (3, 18. S.) bey A und B rechte Winkel, und in der vierseitigen Figur AMBK, welche in zwey Triangel zerlegt werden kann, (1, 32. S.) alle Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich sind: so ist AMB + BKA = 2 R. = DEG + DEF, (nach 1, 13. S. und 1, 1. G.). Nun ist nach Obigem BKA = DEG. Folglich ist (1, 3. G.) AMB = DEF. Da nun auf eben die Art erweislich, daß BNC = DFE: so ist (1, 32. S.) auch ALC = EDF. Demnach ist (4, 4. E.) der um den Kreis beschriebene △ LMN dem △ DEF gleichwinklig.

Der 4. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Triangel, ABC, einen Kreis zu beschreiben,

Halbire (1, 9. S.) irgend zwey Winkel des Triangels, ABC, BCA, mittelst BD, CD, welche (1, 11. G.) in D zusammentreffen, fälle (1, 12. S.) aus D auf des Triangels Seiten AB, BC, CA, die Perpendikel DE, DF, DG, und beschreibe aus D mit einem derselben den verlangten Kreis EFG.



Denn da EBD = DBF, DEB = DFB = R., und BD gemein: so ist (1, 26. S.) DE = DF. Da nun eben so erweislich, daß DF = DG, folglich (1, 1. G.) auch DE = DG: so gehet der Kreis, welcher aus D mit einer der gleichen Linien DE, DF, DG, beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, bey welchen rechte Winkel sind, berührt also (3, 16. S.) jede Seite des Triangels, und ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

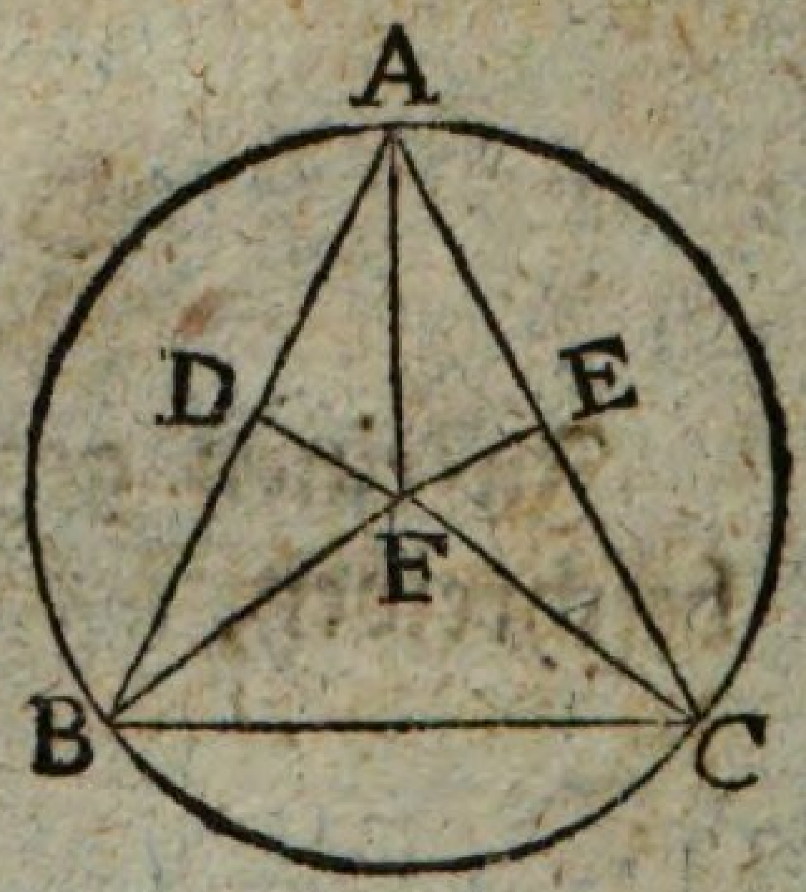
Der 5. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Triangel, ABC, einen Kreis zu beschreiben.

Halbire (1, 10. S.) zwey Seiten des Triangels, AB, AC, in D, E; errichte (1, 11. S.) in diesen Punkten auf den Seiten die Perpendikel DF, EF, welche (1, 11. G.) in einem Punkte F, entweder innerhalb des Triangels, oder auf dessen dritten Seite, oder außerhalb zusammentreffen; und beschreibe aus F mit FA den verlangten Kreis ABC.

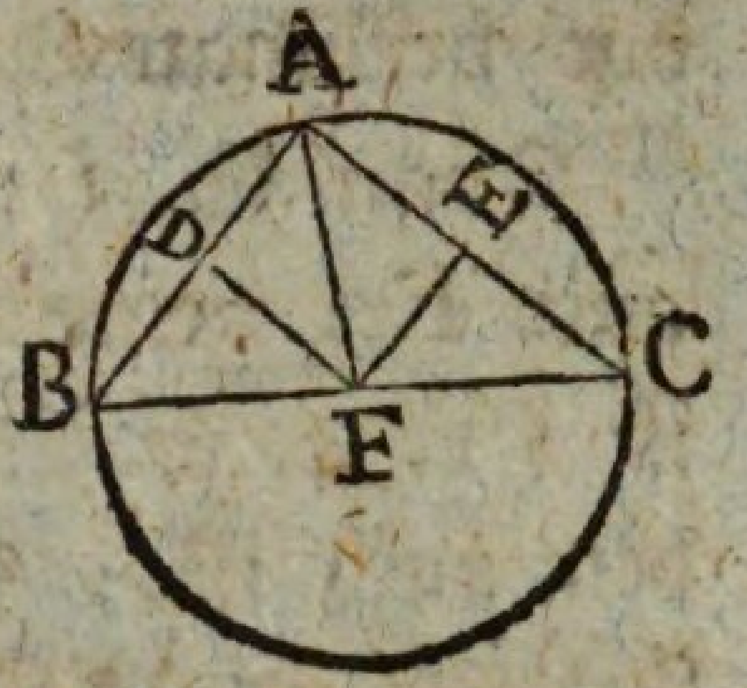
Erster Fall.

Es falle F innerhalb des Triangels. Ziehe FA, FB, FC: so ist AD = DB, auch DF gemein und perpendikular, folglich (1, 4. S.) AF = FB. Da nun eben so erweislich, daß AF = FC, also (1, 1. G.) auch FB = FC: so gehet ein Kreis



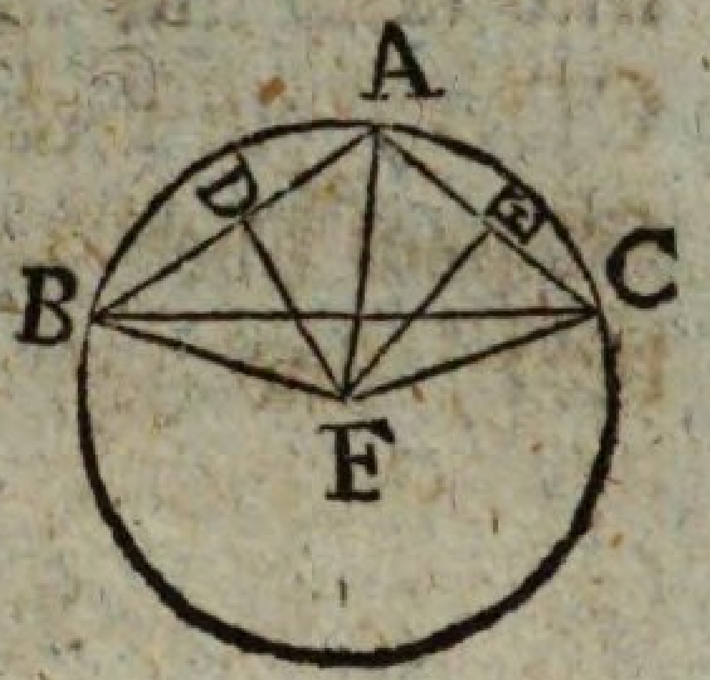
aus F mit FA beschrieben, auch durch die übrigen Punkte, B, C, und ist also (4, 6. S.) um den Triangel beschrieben.

Zwenter Fall.



Es falle F auf die Seite BC. Ziehe FA: so wird, wie beym ersten Falle, bewiesen: daß F der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises sey.

Ditter Fall.



Es falle F außerhalb des Triangels. Ziehe FA, FB, FC: so ist wieder AD=DB, auch DF gemein und perpendikular, folglich (1, 4. S.) AF=FB. Eben so wird bewiesen, daß AF=FC. Folglich ist F der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises.

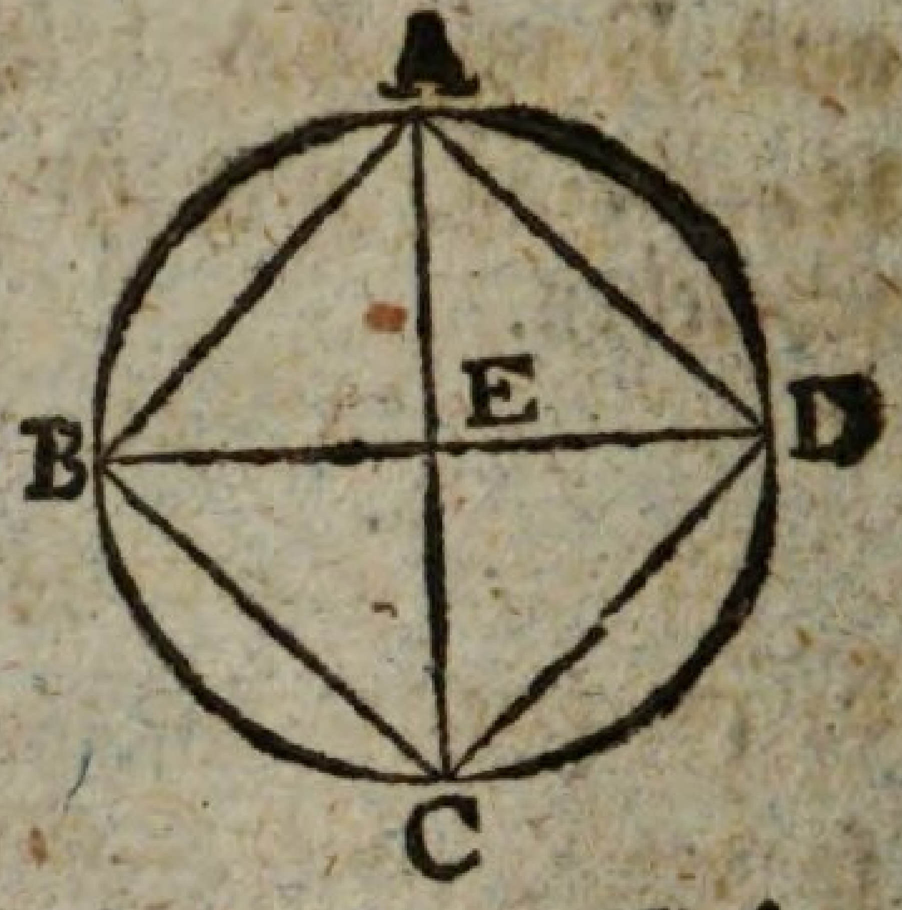
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß der Winkel BAC beym ersten Falle im größern Kreisabschnitte, also spitz, beym zweyten im Halbkreise, also ein rechter, beym dritten im kleinern Kreisabschnitte, also stumpf sey, nach (3, 31. S.). Ist demnach in dem gegebenen Triangel der Winkel BAG spitz, so treffen die Perpendikel DF, EF, innerhalb des Triangels, ist er ein rechter Winkel, auf BC, und ist er stumpf, außerhalb des Triangels zusammen.

Der 6. Satz. Aufgabe.

In einem gegebenen Kreis, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.

Ziehe zwey Durchmesser des Kreises AC, BD, (1, 11. S.) auf einander perpendikular, auch noch die AB, BC, CD, DA: so ist die vierseitige Figur ABCD das verlangte Quadrat.



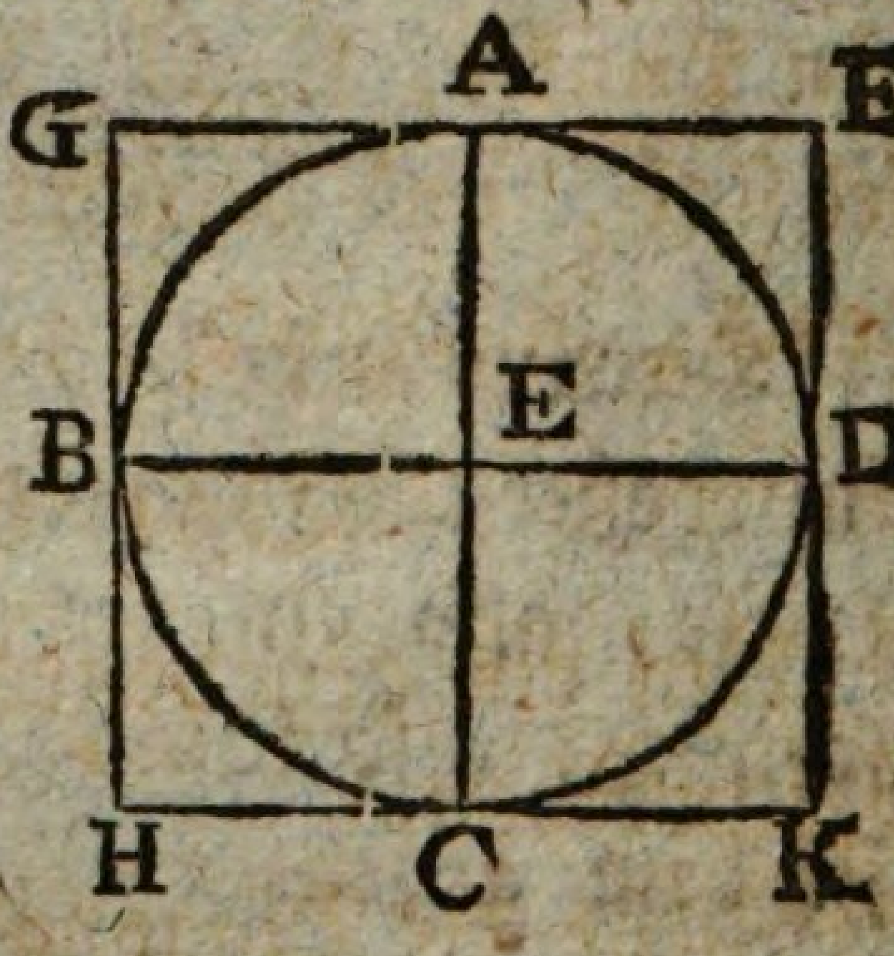
Denn da (1, 15. E.) BE = ED, auch EA gemein und perpendikular: so ist (1, 4. S.) BA = AD. Nun ist nach denselben Gründen auch BC, CD, jede für sich, der BA, AD, gleich. Folglich ist ABCD gleichseitig.

Da BD des Kreises Durchmesser, also (3, 31. S.) BAD, und auch aus gleichen Gründen jeder der Winkel, ABC, BCD, CDA, ein rechter Winkel ist: so ist ABCD rechtwinklig, nach Obigem aber auch gleichseitig; folglich (1, 30. E.) ein Quadrat, und (4, 3. E.) in den Kreis beschrieben.

Der 7. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.

Ziehe zwey Durchmesser des Kreises AC, BD, (1, 11. S.) auf einander perpendikular, und (3, 16. Zus.) durch die Punkte A, B, C, D, an den Kreis Berührungslinien FG, GH, HK, KF: so ist FGHK das verlangte Quadrat.



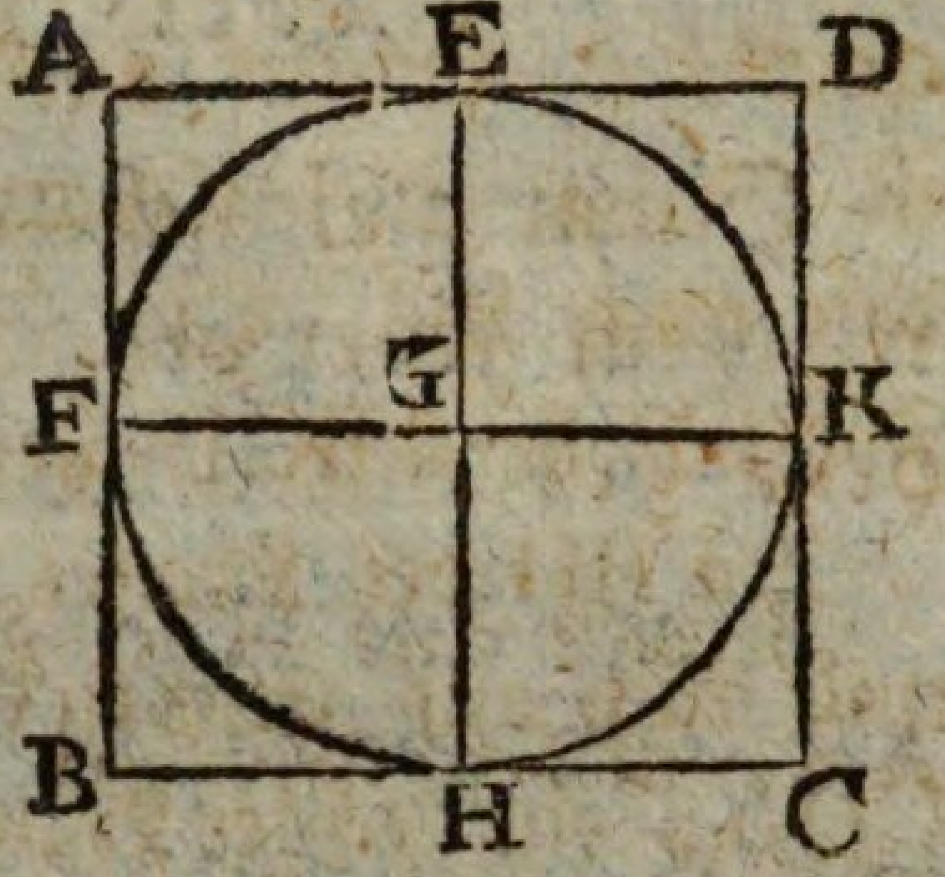
Denn da bey A, B, C, D, (3, 18. S.) rechte Winkel sind, aber auch bey E: so sind (1, 28. 30. S.) FG, BD, HK, desgleichen GH, AC, FK, parallel. Demnach ist FGHK sowohl, als auch jede der Figuren, GD, DH, GC, CF, ein Parallelogramm. Folglich ist (1, 34. S.) GF = BD = HK, und GH = AC = FK. Nun ist (1, 15. E.) AC = BD. Folglich ist GF = HK = GH = FK, also FGHK, gleichseitig. Nun ist (1, 34. S. u. 3, 18. S.) AGB = FDE = R., und dieß eben so von den Winkeln bey H, K, F, erweislich, also FGHK

auch

auch rechtwinklig. Folglich ist (1, 30. E.) FGHK ein Quadrat, und (4, 4. E.) um den Kreis beschrieben.

Der 8. Satz. Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat, ABCD, einen Kreis zu beschreiben.

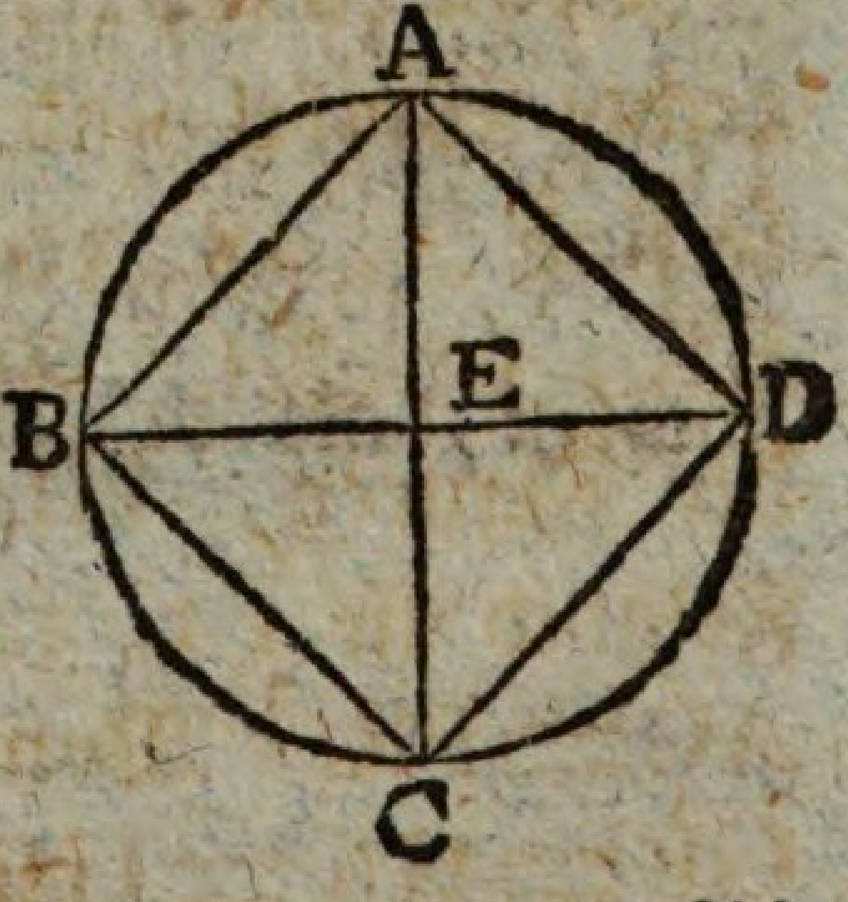


Halbire zwey Seiten AD, AB, in E, F; ziehe (1, 31. S.) durch E die EH der AB oder CD, und durch F die FK der AD oder BC parallel; und beschreibe aus beyder Linien Durchschnitte G mit GE den verlangten Kreis.

Denn nach Obigem sind AG, GB, GC, GD, Parallelogramme, folglich (1, 34. S.) ihre gegenüberliegenden Seiten gleich. Nun ist AD = AB, also (1, 7. G.) AE = AF. Folglich ist GF = GE. Nun wird eben so bewiesen, daß GH, GK, jede für sich, der GF, GE, gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus G mit GE beschrieben auch durch die übrigen Punkte, F, H, K, bey welchen (1, 34. S.) rechte Winkel sind, und berührt also (3, 16. S.) jede Seite des Quadrats, ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Um ein gegebenes Quadrat, ABCD, einen Kreis zu beschreiben.



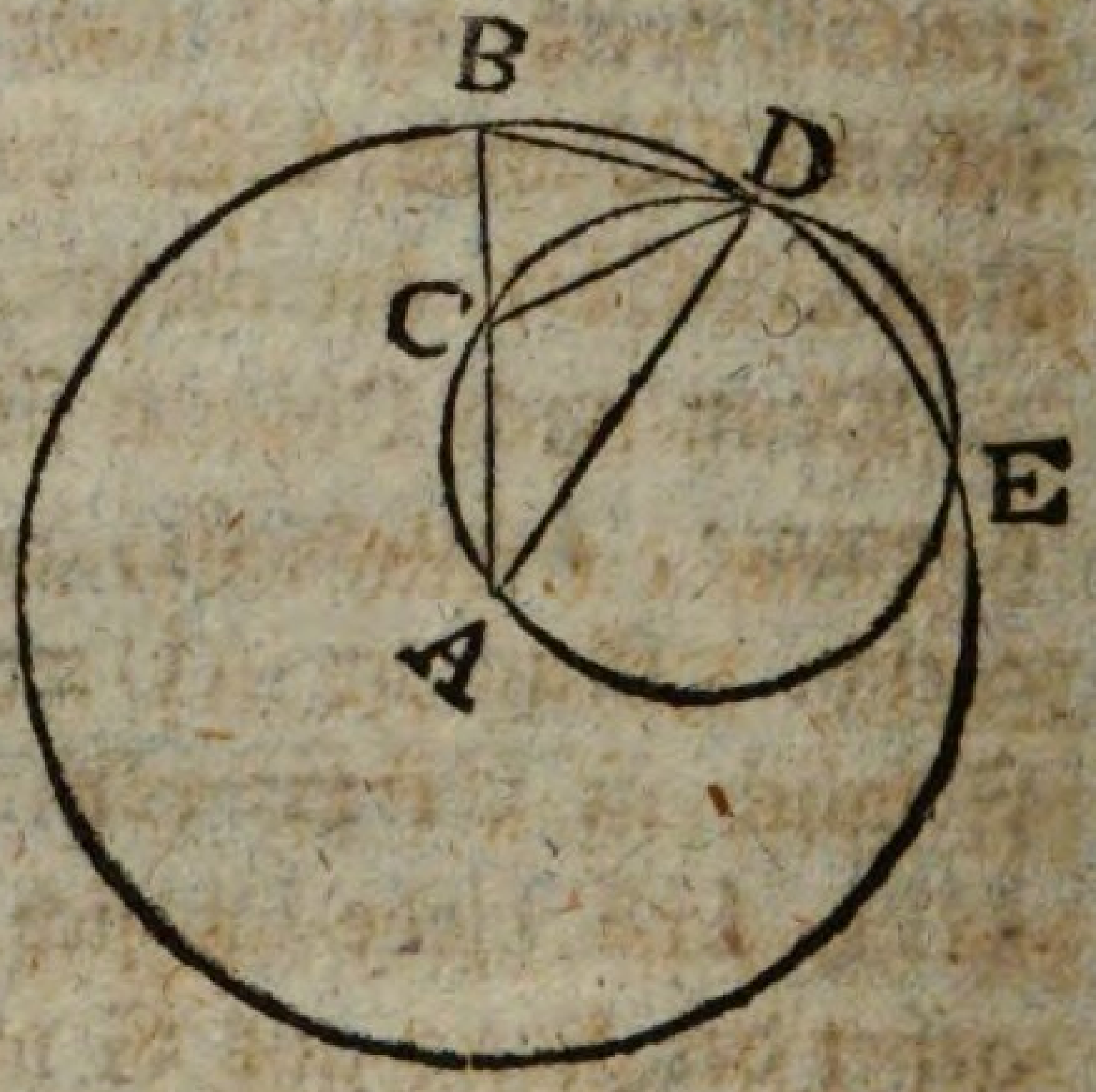
Ziehe die Diagonalen AC, BD, und beschreibe aus ihrem Durchschnitte E mit EA den verlangten Kreis.

Denn da (1, 30. E.) AB = AD, und BC = CD, auch AC gemein: so ist (1, 8. S.) BAC = CAD = ½ R. Nun ist eben so erweislich, daß ABD = DBC = ½ R. Folglich ist BAC = ABD, folglich (1, 6. S.) EA = EB. Nun wird eben so bewiesen, daß EC, ED, jede

jede für sich, der EB, EA, gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus E mit EA beschreiben auch durch die übrigen Punkte B, C, D, und ist also (4, 4. E.) um das Quadrat beschrieben.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Einen gleichschenkligen Triangel zu beschreiben, in welchem jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des dritten Winkels sey.



Nimm eine beliebige gerade Linie AB, und schneide sie (2, 11. S.) in C so, daß AB $\times$ BC $=$ □ CA. Aus A beschreibe mit AB den Kreis BDE, trage in denselben (4, 1. S.) BD $=$ AC, und ziehe AD: so ist ABD der verlangte gleichschenklige Triangel.

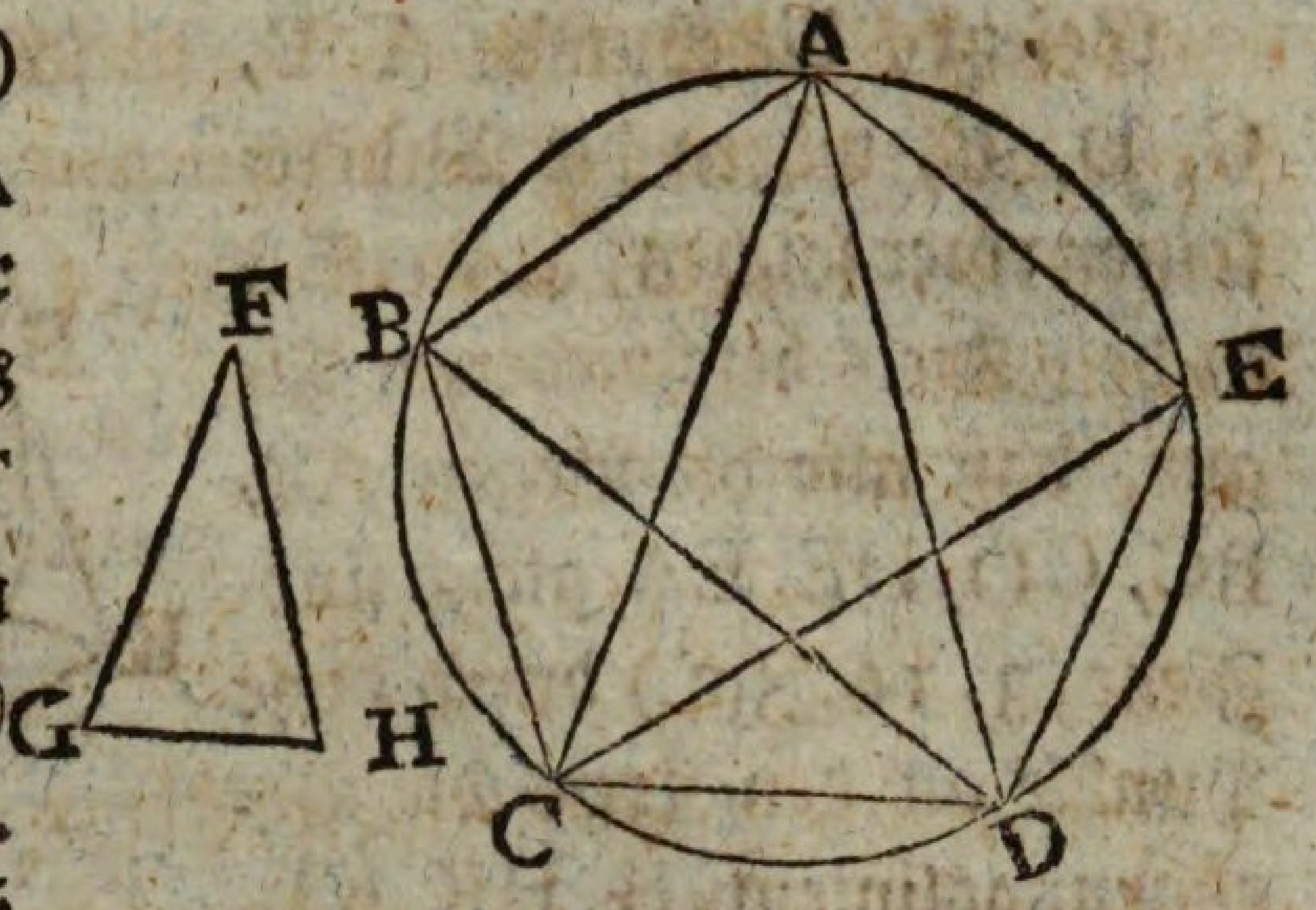
Denn ziehet man DC, und beschreibt (4, 5. S.) um den △ ACD den Kreis ACDE: so ist, weil AB $\times$ BC $=$ □ CA $=$ □ DB, (3, 37. S.) BD eine Berührungslinie des Kreises ACDE, folglich (3, 32. S.) BDC $=$ DAC, folglich, wenn CDA hinzukommt, ADB $=$ DAC $+$ CDA. Nun ist, weil (1, 15. E.) AD $=$ AB, (1, 5. S.) ADB $=$ ABD; aber (1, 32. S.) DAC $+$ CDA $=$ BCD. Folglich ist ADB $=$ ABD $=$ BCD, folglich (1, 6. S.) BD $=$ DC $=$ CA, folglich (1, 5. S.) DAC $=$ CDA, folglich BCD $=$ 2 DAC. Demnach ist auch ADB sowohl, als ABD $=$ 2 DAC.

Der 11. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCDE, eine gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur zu beschreiben.

Be-

Beschreibe (4, 10. S.) einen gleichschenkligen △ FGH, in welchem jeder der Winkel G, H, das Doppelte des dritten F sey. In den gegebenen Kreis beschreibe (4, 2. S.) einen dem △ FGH gleichwinkligen △ ACD, daß



CAD = F, ACD = G, und ADC = H, also CAD = $\frac{1}{2}$ ACD — $\frac{1}{2}$ ADC sey. Halbire endlich (1, 9. S.) ACD und ADC, mittelst CE, BD, und ziehe CB, BA, AE, ED: so ist ABCDE die verlangte fünfseitige Figur.

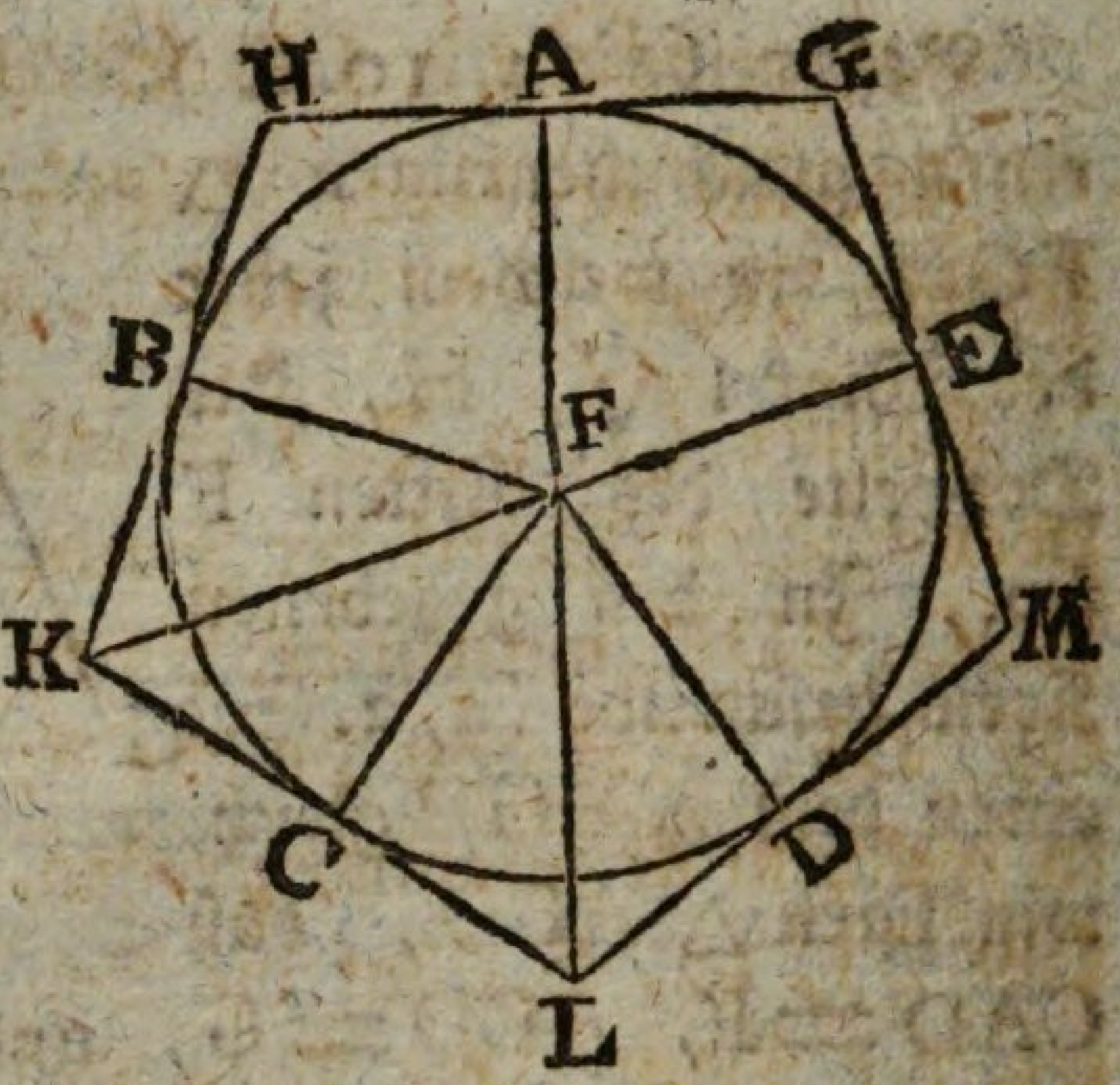
Denn da nach obiger Construction die fünf Winkel, CAD, ECD, ECA, ADB, BDC, gleich sind: so sind (3, 26. S.) die Kreisbogen CD, DE, EA, AB, BC, folglich (3, 29. S.) die eben so benannten geraden Linien gleich. Folglich ist ABCDE gleichseitig

Da nach Obigem der Bogen AB = DE, folglich, wenn der Bogen BCD hinzukommt, der Bogen ABCD = BCDE: so ist (3, 27. S.) DEA = EAB. Nun ist eben so erweislich, daß jeder der Winkel, ABC, BCD, CDE, jedem der Winkel DEA, EAB, gleich sey. Folglich ist ABCDE auch gleichwinklig, und (4, 3. E.) in den Kreis beschrieben.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABCDE, eine gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur zu beschreiben.

Gesetzt,



Gesetzt, die Punkte A, B, C, D, E, wären die Winkelspitzen einer solchen (4, 11. S.) in den Kreis beschriebenen Figur, daß also die Bogen AB, BC, CD, DE, EA, gleich sind. Ziehe (3, 16. Zus.) durch diese Punkte an den Kreis die Berührungslinien GH, HK, KL, LM, MG: so ist GHKLM die verlangte Figur.

Denn es sey F des Kreises Mittelpunkt, und FB, FK, FC, FL, FD, gezogen: so sind (3, 18. S.) bey B und C rechte Winkel; folglich ist (1, 47. S.) □FK = □FB + □BK = □FC + □CK. Nun ist (1, 15. E.) FB = FC, also auch □FB = □FC. Folglich ist (1, 3. G.) □BK = □CK, also auch BK = CK; folglich, da auch FB = FC, und FK gemein, (1, 8. S.) KFB = KFC, und FKB = FKC; folglich BFC = 2 KFC, und BKC = 2 FKC. Eben so wird bewiesen, daß CFD = 2 LFC, und CLD = 2 FLC. Nun ist, weil BC, CD, gleiche Bogen, (3, 27. S.) BFC = CFD. Folglich ist (1, 7. G.) KFC = LFC, folglich ist, da bey C rechte Winkel, und FC gemein, (1, 26. S.) CK = CL, und FKC = FLC.

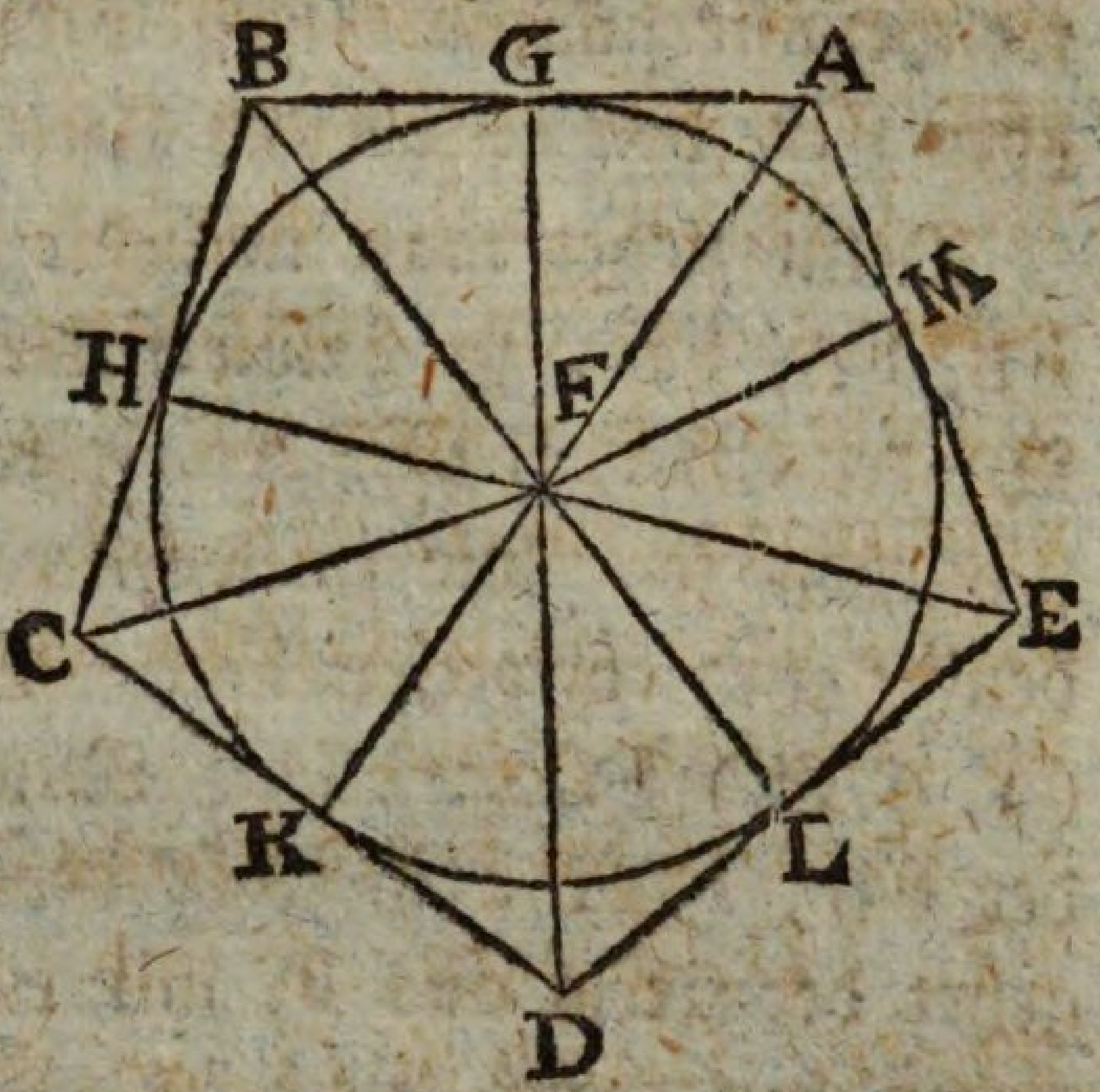
Da hiernach CK = CL, folglich LK = 2 CK, und eben so erweislich KH = 2 BK, aber nach Obigem CK = BK: so ist LK = KH. Aus eben den Gründen ist jede der HG, GM, ML, jeder der LK, KH, gleich. Folglich ist GHKLM gleichseitig.

Da ferner FKC = FLC, also auch 2 FKC = 2 FLC, aber nach Obigem 2 FKC = BKC, und 2 FLC = CLD: so ist BKC = CLD. Aus eben den Gründen ist jeder der Winkel BHA, AGE, EMD, jedem der BKC, CLD, gleich. Folglich ist GHKLM auch gleichwinklig, und (4, 4. G.) um den Kreis beschrieben.

Der

Der 13. Satz. Aufgabe.

In eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur, ABCDE, einen Kreis zu beschreiben.



Halbire (1, 9. S.) irgend zwey nächste Winkel der Figur, BCD, CDE, mittelst der Linien CF, DF. Aus dem Punkte E, in welchem sie zusammentreffen, fälle (1, 12. S.) auf die Seiten der Figur, die Perpendikel FG, FH, FK, FL, FM, und beschreibe aus F mit einem derselben den verlangten Kreis.

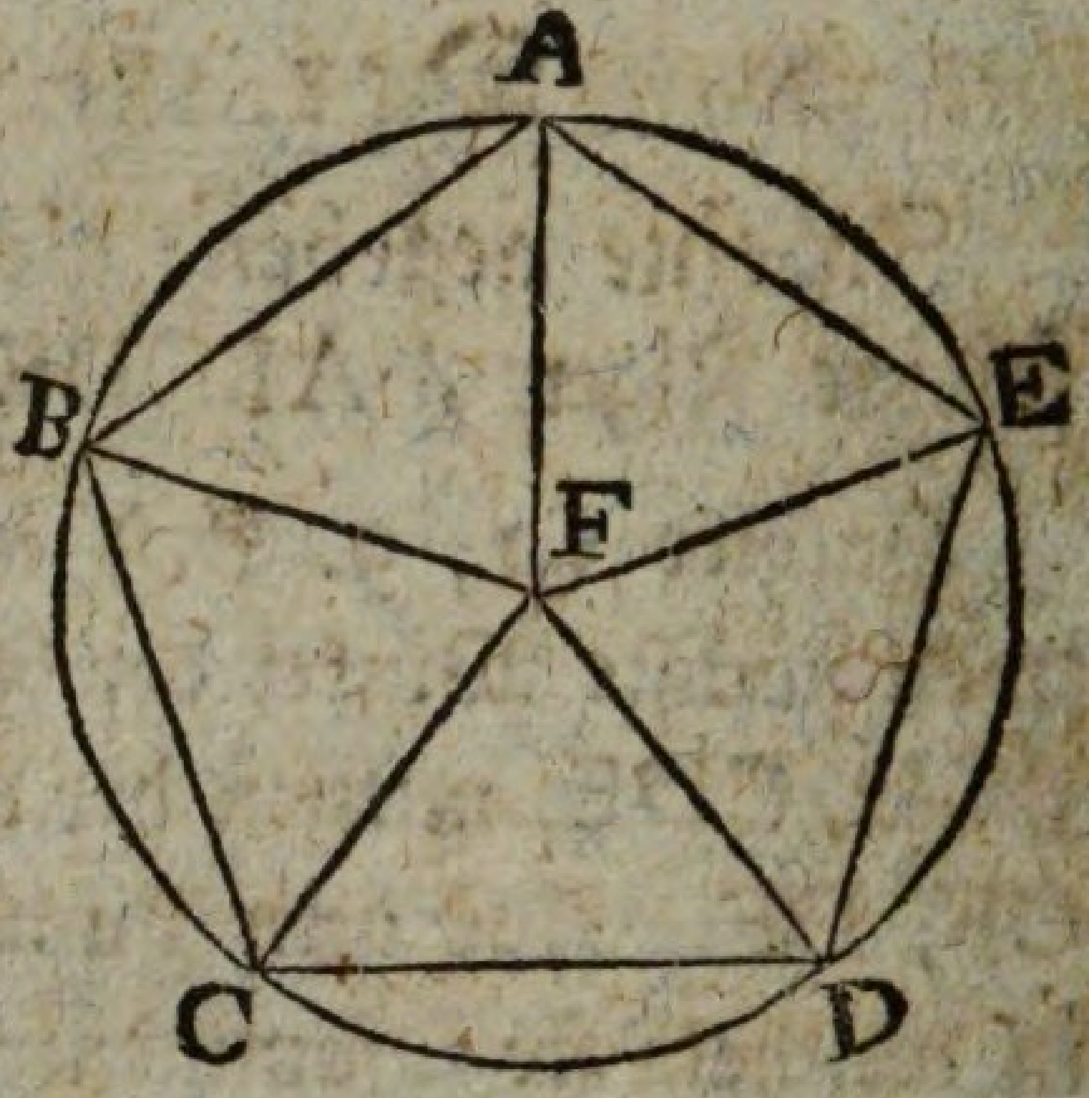
Denn ziehet man noch FB, FA, FE: so ist FCB = FCD, CB = CD, und EC gemein, folglich (1, 4. S.) CBF = CDF. Nun ist CDE = 2 CDF, und ABC = CDE. Folglich ist auch ABC = 2 CBF, folglich ABC von FB halbirt. Eben so beweist man, daß BAE, AED, von FA, FE halbirt sind.

Da FCH = FCK, bey H und K rechte Winkel, und FC gemein: so ist (1, 26. S.) FH = FK. Da nun eben so erweislich, daß jede der FG, FL, FM, jeder der FH, FK gleich sey: so gehet der Kreis aus F, mit einer dieser gleichen Linien FG beschrieben, auch durch die übrigen Punkte H, K, L, M, bey denen rechte Winkel sind, und berührt also (3, 16. S.) jede Seite der Figur, ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

Der 14. Satz. Aufgabe.

Um eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur, ABCDE, einen Kreis zu beschreiben.

Hal-

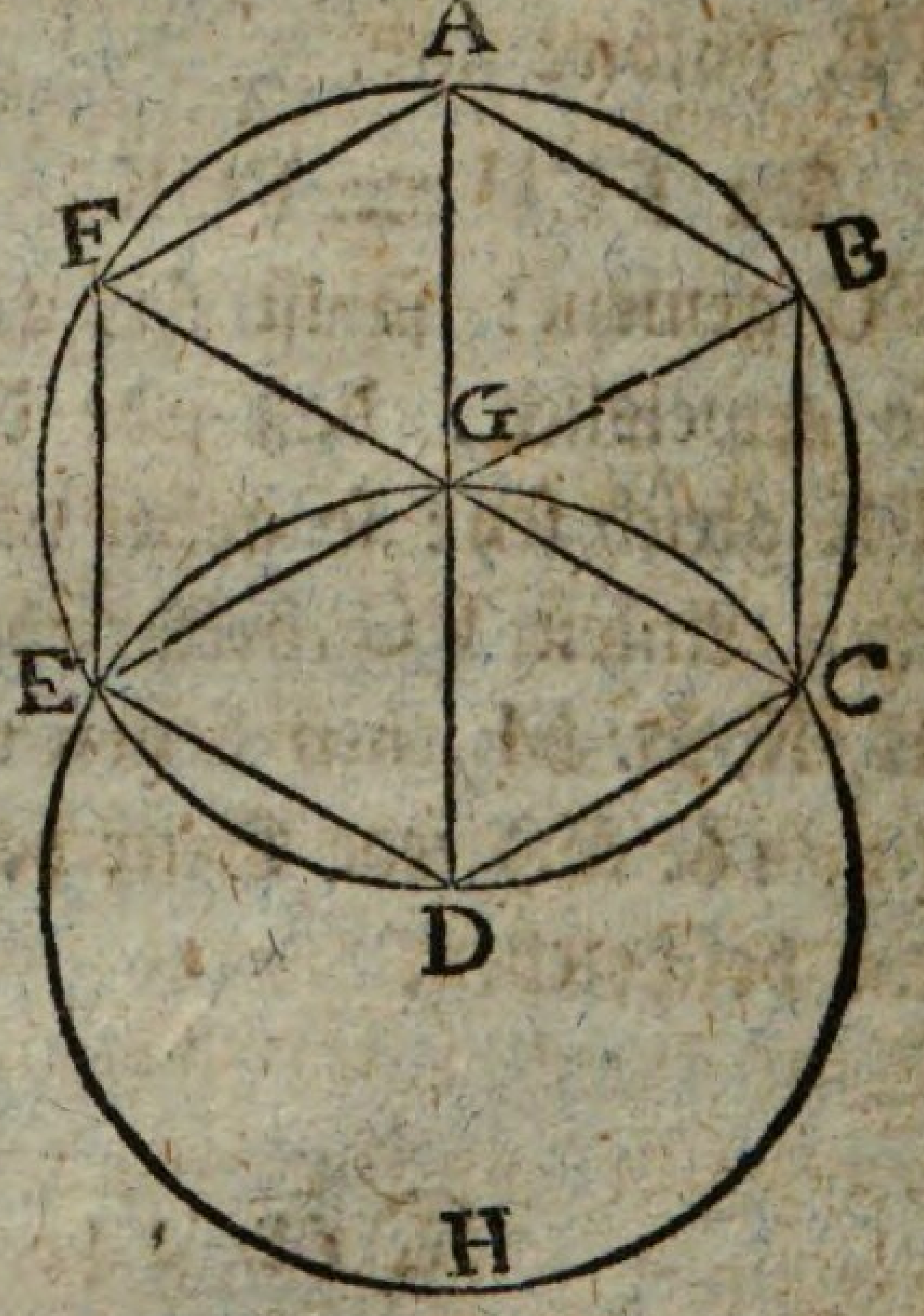


Halbire zwey nächste Winkel der Figur, BCD, CDE, mittelst der Linien CF, DF, und beschreibe aus F, in welchem sie zusammentreffen mit CF, oder FD, den verlangten Kreis.

Denn ziehet man noch die Linien FB, FA, FE, so halbiren diese die Winkel CBA, BAE, AED, welches sich eben so, wie im vorhergehenden Satze, beweisen läßt. Da also FCD = FDC, so ist (1, 6. S.) FC = FD. Nun ist eben so erweislich, daß jede der FB, FA, FE, jeder der FC, FD gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus F, mit einer dieser gleichen Linien, FC, beschrieben, auch durch die übrigen Punkte der Figur, und ist also (4, 6. S.) um dieselbe beschrieben.

Der 15. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCDEF, eine gleichseitige und gleichwinklige sechsseitige Figur zu beschreiben.



Nimm des Kreises Mittelpunkt G, ziehe einen Durchmesser AD, und beschreibe aus D mit DG den Kreis EGCH. Ziehe EG, CG, verlängere sie bis B, F, und ziehe AB, BC, CD, DE, EF, FA: so ist ABCDEF die verlangte Figur.

Denn da im Kreise um G (1, 15. E.) GE = GD, und im Kreise um D GD = DE: so ist △ GED gleichseitig, folglich (1, 5. S.) auch gleichwinklig, folglich (1, 32. S.) EGD das Drittel von zwey rechten Winkeln, so wie aus eben den Gründen DGC, folgl. auch CGB, weil (1, 13. S.) EGC + CGB = 2R. Demnach sind obgenannte drey Winkel, aber auch (1, 15. S.) ihre

ihre Scheitelwinkel, folglich alle um G herumliegende sechs Winkel einander gleich. Daher sind (3, 26 S.) die Bogen also auch (3, 29. S.) die Linien AB, KC, CD, DE, EF, FA, einander gleich. Folglich ist ABCDEF gleichseitig,

Da nach Obigem der Bogen FA = ED, folglich, wenn der Bogen ABCD hinzukommt, der Bogen FABCD = EDCBA: so ist (3, 27. S.) DEF = EFA. Nun ist eben so erweislich, daß jedem dieser beyden Winkel jeder der übrigen Winkel der Figur gleich sey. Folglich ist die Figur auch gleichwinklig, und (4, 3. E.) in den Kreis beschrieben.

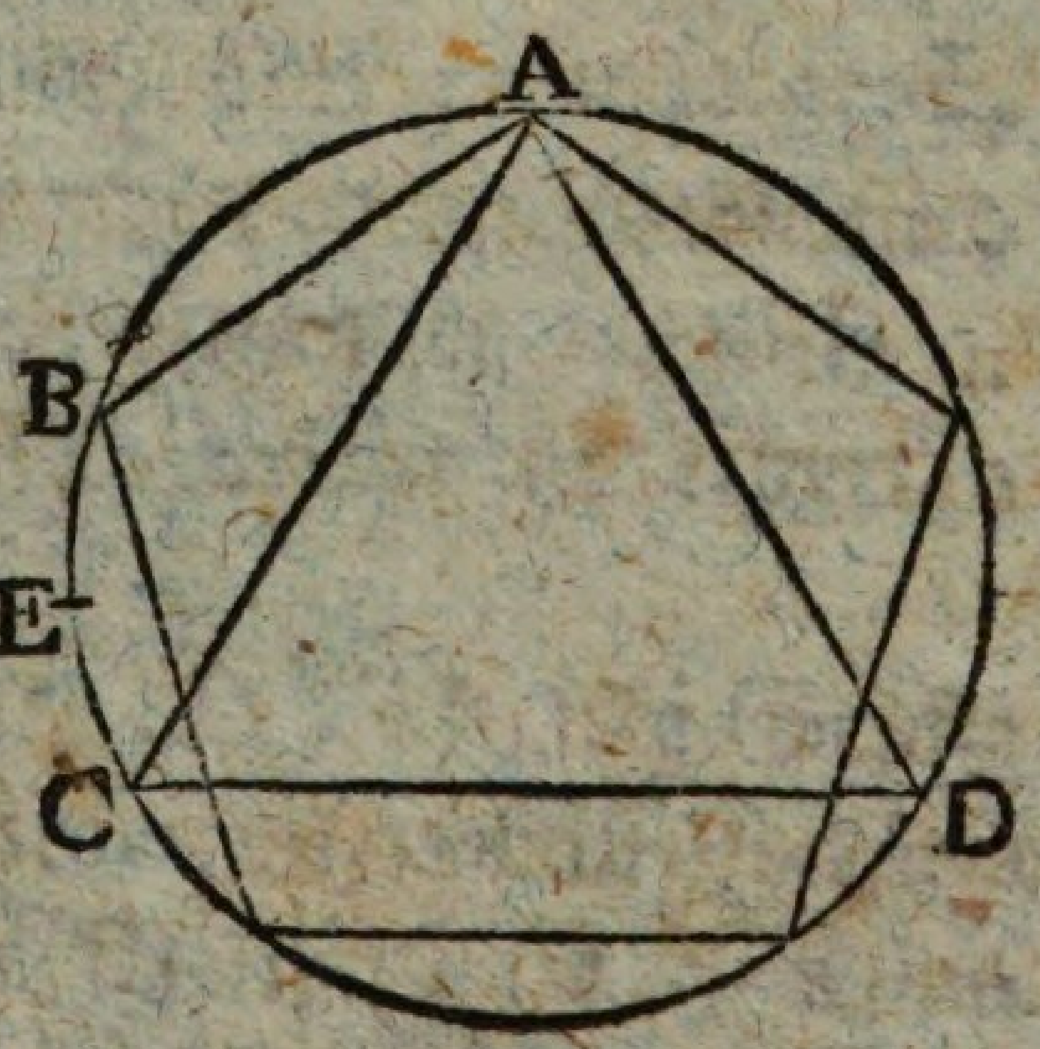
Zusatz.

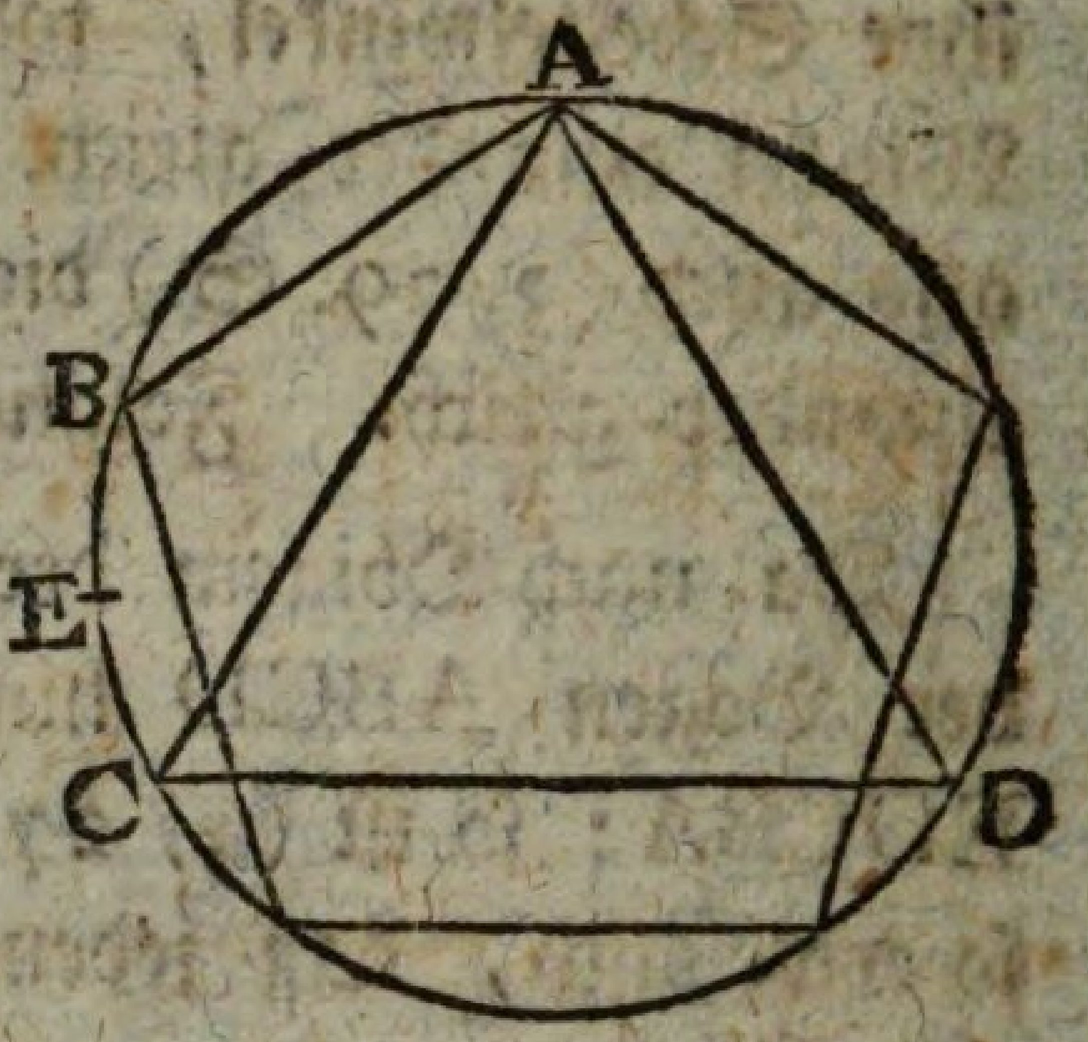
Hieraus erhellet, daß die Seite einer in den Kreis zu beschreibenden Figur mit sechs gleichen Seiten dem Halbmesser des Kreises gleich sey. Auch ergiebt sich aus dem, was von der Figur mit fünf gleichen Seiten gelehret worden, daß mittelst der Berührungslinien durch die Winkelspitzen, A, B, C, D, E, F, eine Figur mit sechs gleichen Seiten um den Kreis beschrieben werde; desgleichen, wie auf ähnliche Art in und um eine gegebene Figur mit sechs gleichen Seiten, ein Kreis beschrieben werden könne.

Der 16. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCD, eine gleichseitige und gleichwinklige funfzehnseitige Figur zu beschreiben.

Es sey (4, 2. S.) AC die Seite eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Triangels, und AB die Seite einer in den Kreis beschriebenen Figur von fünf gleichen Seiten. Halbire (3, 30. S.) den Bogen BC in E: so ist die gerade Linie CE die Seite der verlangten Figur.





Denn wäre der Umkreis in funfzehn gleiche Theile getheilt: so enthält der Bogen ABC, als der dritte Theil **fünf**, der Bogen AB aber, als der fünfte Theil, **drey**, folglich der übrige Bogen BC **zwey** solcher Theile, daß also der Bogen CE **ein** solcher Theil ist, folglich die gerade Linie CE (4, 1. S.) sich funfzehnmal an einander in den Kreis eintragen, also eine gleichseitige und gleichwinklige funfzehnseitige Figur in den Kreis beschreiben läßt.

Zusatz.

Aus dem, was von der Figur mit fünf gleichen Seiten gelehret worden, ergiebt sich, daß mittelst der Berührungslinien durch die funfzehn Theiluugspunkte des Umkreises eine Figur mit funfzehn gleichen Seiten und Winkeln um den Kreis beschrieben werde; desgleichen, wie auf ähnliche Art in und um eine gegebene Figur mit funfzehn gleichen Seiten und Winkeln, ein Kreis beschrieben werden könne.

Euklid's Elemente

Fünftes Buch.

Erklärungen.

1. Ein **Theil** ist eine Größe von der andern, die kleinere von der größern, wenn sie die größere genau misset.
2. Ein **Vielfaches** aber ist die größere von der kleinern, wenn sie von der kleinern genau gemessen wird.
3. **Verhältniß** ist eine gewisse Beziehung zweyer gleichartigen Größen auf einander in Rücksicht der Größe. (Quantität.)
4. Eine **Verhältniß zu einander** haben Größen, welche vervielfältigt einander übertreffen können.
5. In **einerley Verhältniß** sind Größen, A, B, C, D, die erste zur zweyten, und die dritte zur vierten, wenn von beliebigen Gleichvielfachen der ersten und dritten, A, C, und beliebigen Gleichvielfachen der zweyten und vierten, B, D, die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer sind, als die Vielfachen der zweyten und vierten, nach der Ordnung mit einander verglichen.
6. **Proportionirt** heißen Größen, welche in einerley Verhältniß sind.
7. Eine **größere Verhältniß** aber, als die dritte Größe zur vierten, hat die erste zur zweyten, wenn von gedachten Gleichvielfachen das Vielfache der ersten wohl das Vielfache der zweyten, hingegen das Viel-

fache der dritten nicht das Vielfache der vierten, übertrifft.

8. **Proportion** ist die Gleichheit der Verhältnisse.

9. Eine Proportion besteht zwischen drey Gliedern zum wenigsten.

10. Von drey Proportionalgrößen, A, B, C, ist die Verhältniß der ersten zur dritten (A : C) das **Zwiefache** der Verhältniß der ersten zur zweyten (A:B), oder es ist A:C = 2 (A:B).

11. Von vier (an einander hangenden oder stetigen) Proportionalgrößen, A, B, C, D, ist die Verhältniß der ersten zur vierten (A:D) das **Dreyfache** der Verhältniß der ersten zur zweyten (A:B) oder A:D = 3 (A:B); und so nach einander immer um Eins mehr, so lange noch (an einander hangende) Proportionalgrößen vorhanden sind.

12. **Gleichnamig (homolog)** sind Vorderglieder mit Vordergliedern, und Hinterglieder mit Hintergliedern.

13. **Verwechselt** wird eine Verhältniß, wenn man (in einer Proportion A:B = C:D) setzt: das Vorderglied zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Hintergliede (A:C = B:D.)

14. **Umgekehrt** wird eine Verhältniß (A:B), wenn man das Hinterglied zum Vordergliede, und das Vorderglied zum Hintergliede macht (B:A).

15. Die **Verbindung** einer Verhältniß (A:B) entsteht, wenn man setzt: das Vorderglied und Hinterglied zusammen als Ein Glied zu demselben Hintergliede (A+B:B).

16. Die **Trennung** einer Verhältniß (A:B) entsteht, wenn man setzt: der Ueberschuß, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft, zu demselben Hintergliede (A = B:B).

17. Die **Zurückkehrung** einer Verhältniß (A:B) entsteht, wenn man setzt: das Vorderglied zum Ueberschusse,

schusse, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft (A : A — B).

18. **Aus dem Gleichen** entsteht eine Verhältniß, wenn mehrere Größen (A, B, C, D) mit eben so vielen andern (a, b, c, d), je zwey von jenen mit je zwey von diesen, proportionirt sind, und man setzt von jenen die erste zur letzten, wie von diesen die erste zur letzten (A : D = a : d). **Oder:** wenn alsdann mit Weglassung aller mittlern, die äußern von jenen mit den äußern von diesen proportionirt werden.

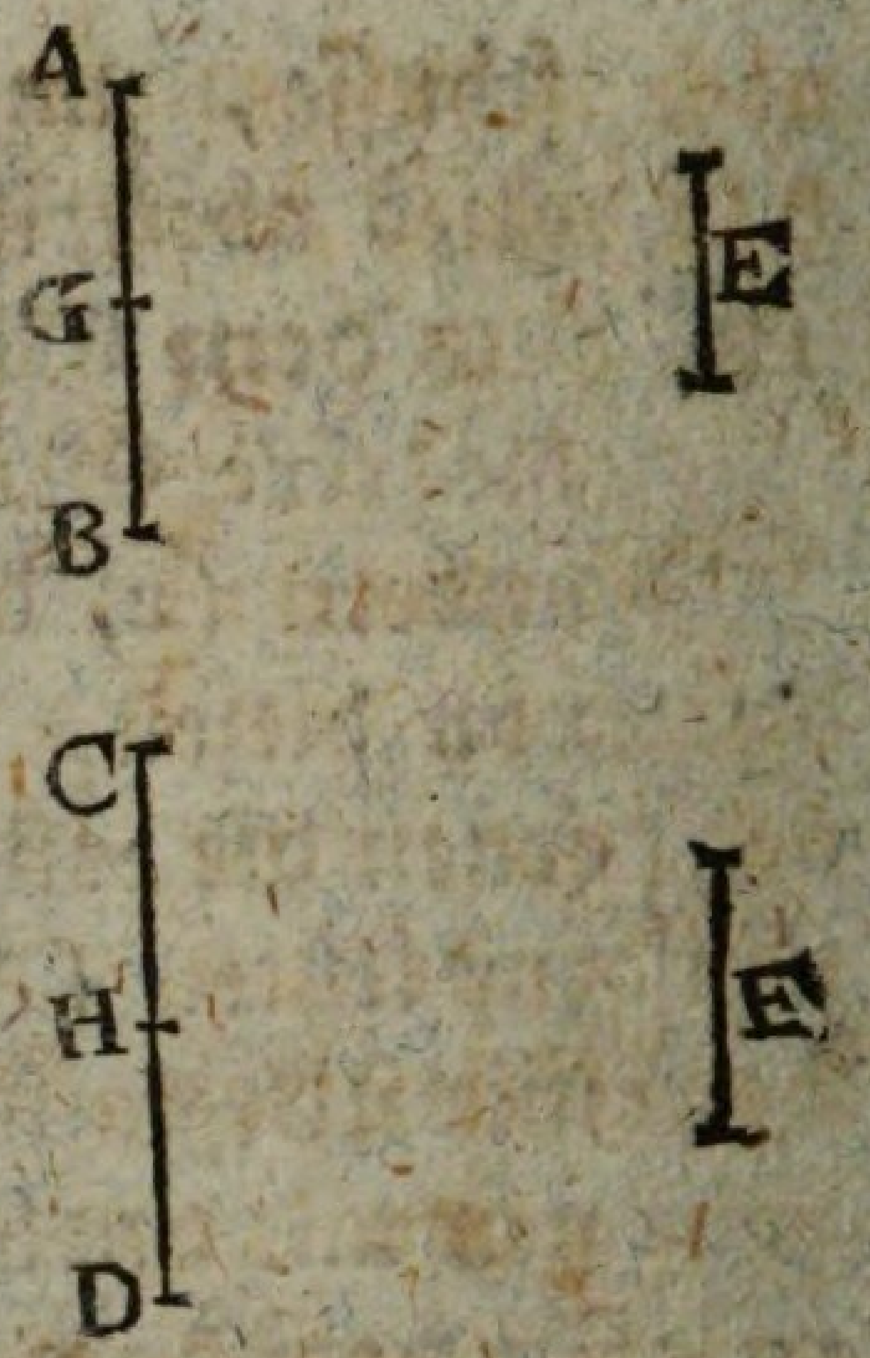
19. In **geordneter Proportion** sind mehrere Größen, A, B, C, D, mit eben so vielen andern, a, b, c, d, wenn die beyden ersten von jenen mit den beyden ersten von diesen proportionirt sind (A : B = a : b), und bey jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bey diesen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe ist (B : C = b : c, C : D = c : d).

20. In **zerstreuter Proportion** sind mehrere Größen A, B, C, D, mit eben so vielen andern a, b, c, d, wenn die beyden ersten von jenen mit den beyden letzten von diesen proportionirt sind (A : B = c : d), und bey jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bey diesen die nächst vorhergehende Größe zum Vordergliede ist (B : C = b : c, C : D = a : b).

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Ist von mehrern Größen, AB, CD, und eben so vielen andern, E, F, jede der erstern, von einer der letztern (AB von E, CD von F) ein Gleichvielfaches: so sind auch die erstern zusammen von den letztern (AB + CD von E + F) dasselbe Vielfache.

AB ist ein so Vielfaches von E, wie CD von F. So viele der E gleiche Größen also in AB, eben so viele der F gleiche Größen sind in CD. Theilt man daher AB in ihre der E gleiche Theile, AG, GB, und CD in ihre der F gleiche Theile, CH, HD: so ist die Menge der Theile in beyden gleich. Da also AG = E, und CH = F: so ist AG + CH = E + F. Nun ist aus eben den Gründen auch GB + HD = E + F. So viele der E

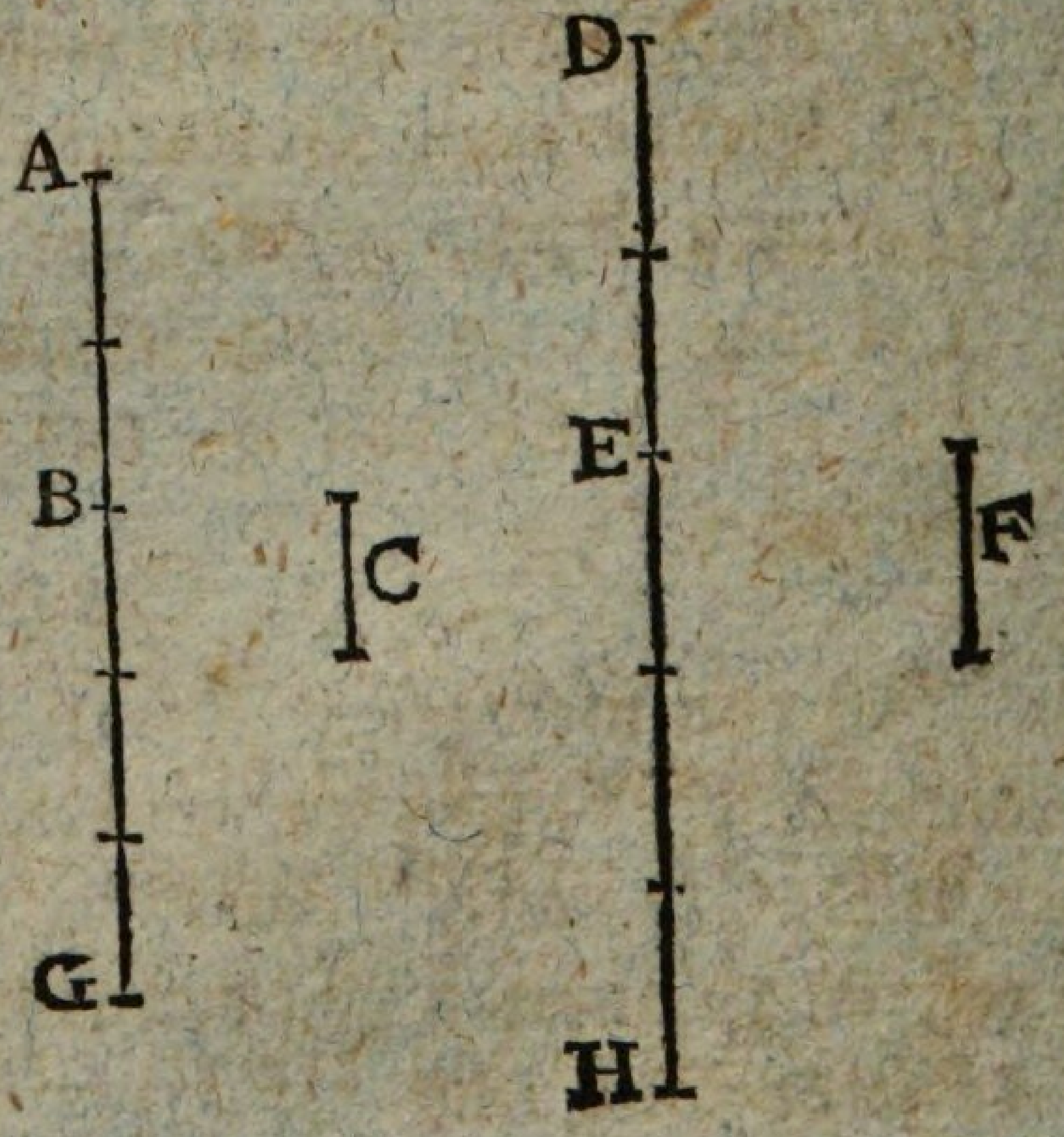


gleiche Größen folglich in AB sind, eben so viele der E + F gleiche Größen sind in AB + CD. Demnach ist AB + CD von E + F dasselbe Vielfache, das AB von E ist.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe, AB, von einer zweyten, C, und eine dritte, DE, von einer vierten, F, ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte, BG, von der zweyten, und eine sechste, EH, von der vierten, wieder ein Gleichvielfaches: so ist **verbunden** die erste und fünfte zusammen, AG, von der zweyten, und die dritte und sechste zusammen, DH, von der vierten, auch ein Gleichvielfaches.

AB ist ein so Vielfaches von C, wie DE von F. So viele der C gleiche Größen also in AB, eben so viele der F gleiche Größen sind in DE. Und, aus eben den Gründen, so viele der C gleiche Größen in BG, so viele der F gleiche Größen sind in EH. Folglich ist C in der ganzen AG, so vielmal enthalten, als F in der ganzen DH. Dem-

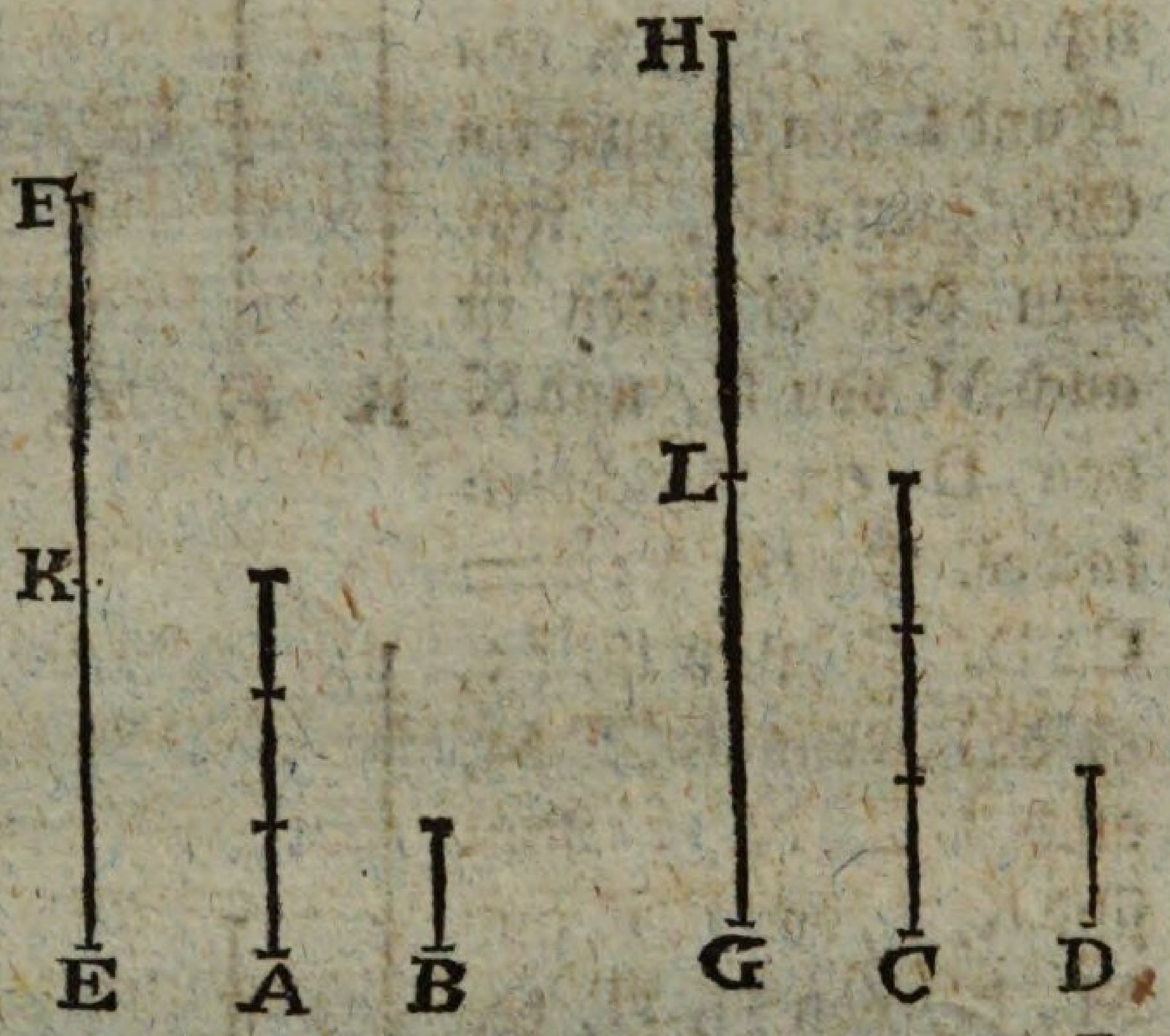


nach

nach ist AG ein so Vielfaches von C, wie DH von F, also AG von C, und DH von F ein Gleichvielfaches.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe, A, von einer zweyten, B, und eine dritte, C, von einer vierten, D, ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte, EF, von der ersten, und eine sechste, GH, von der dritten, wiederum ein Gleichvielfaches: so ist **aus dem Gleichen**, die fünfte von der zweyten, und die sechste von der vierten, auch ein Gleichvielfaches.



EF ist ein so Vielfaches von A, wie GH von C. So viele der A gleiche Größen also in EF, eben so viele der C gleiche Größen sind in GH. Theilt man daher EF in ihre der A gleiche Theile, EK, KF, und GH in ihre der C gleiche Theile, GL, LH: so ist die Menge der Theile in beyden gleich. Da ferner A von B, und C von D, ein Gleichvielfaches, aber EK = A, und GL = C: so ist auch EK von B, und GL von D ein Gleichvielfaches. Nun ist aus eben den Gründen KF von B, und LH von D ein Gleichvielfaches. Folglich ist **verbunden** (5, 2. S.) EF von B, und GH von D, auch ein Gleichvielfaches.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, und eine dritte, C, zu einer vierten, D, einerley Verhältniß (A:B = C:D): so haben bey beliebiger Vervielfältigung, die Gleichvielfachen der ersten und dritten, E, F, zu den Gleich-

Gleichvielfachen der zweyten und vierten, G, H, nach der Ordnung genommen, auch einerley Verhältniß (E:G = F:H).

Nimm von E, F, beliebige Gleichvielfache, K, L, auch von G, H, beliebige Gleichvielfache, M, N. Nun ist E von A, und F von C, ein Gleichvielfaches. Folglich ist (5, 3. S.) K von A und L von C, auch ein Gleichvielfaches. Aus eben den Gründen ist auch M von B, und N von D ein Gleichvielfaches. Nun ist A:B = C:D. Folglich ist, (5, 5. E.) wenn K ⋝ M, auch L ⋝ N. Nun sind K, L, von E, F, und M, N, von G, H, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) E:G = F:H.

Zusatz.

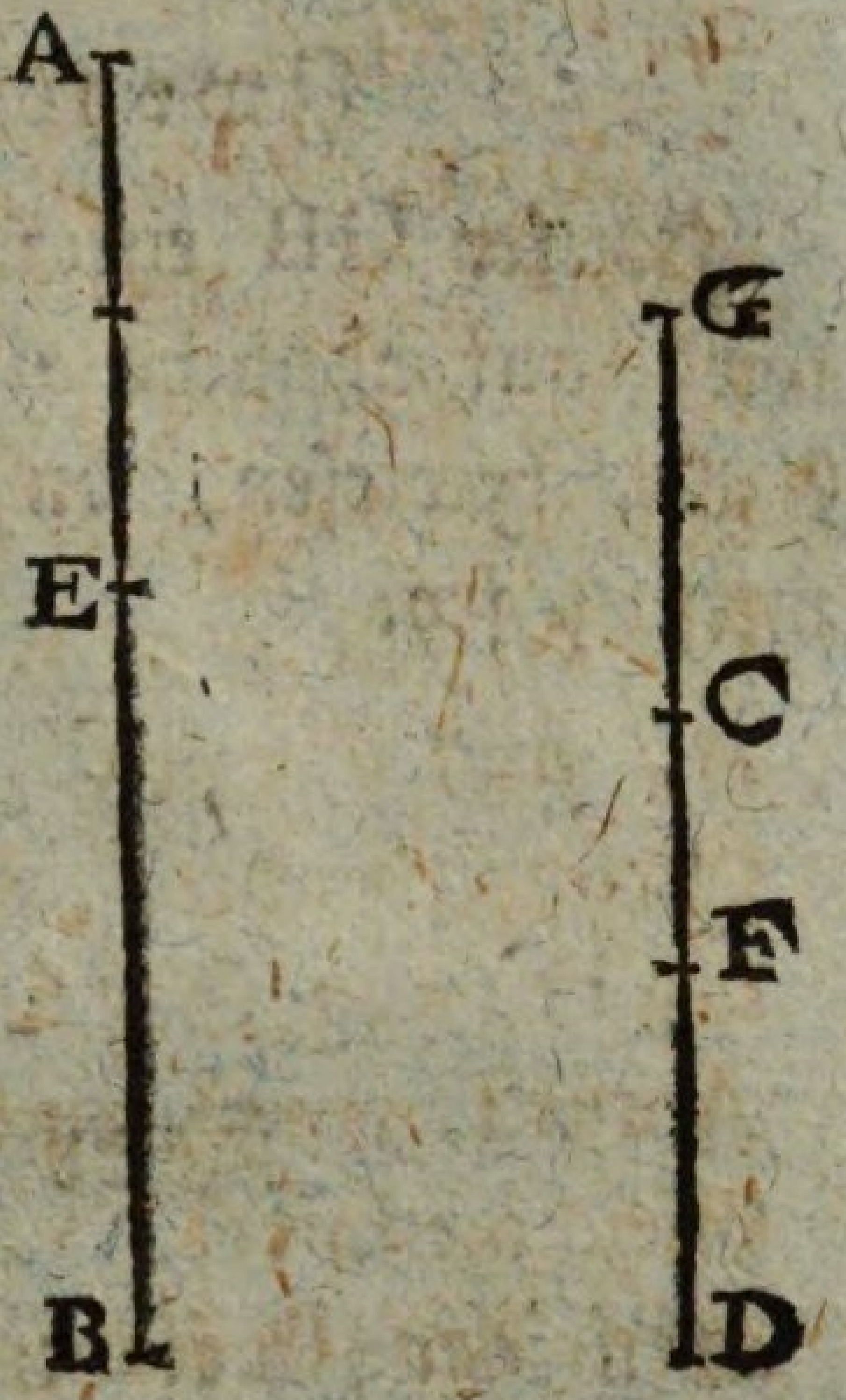
Da bewiesen worden, daß, wenn K ⋝ M, auch L ⋝ N ist: so ist offenbar, wenn M ⋝ K, auch N ⋝ L, folglich (1, 5. E.) G:E = H:F; woraus erhellet, daß vier proportionirte Größen, auch **umgekehrt** proportionirt sind.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Größen, die erste, AB, von der zweyten, CD, und ein Stück der ersten, AE, von einem Stücke der

der zweyten, CF, ein Gleichvielfaches: so ist auch jener Rest, EB, von diesem Reste, FD, dasselbe Vielfache.

Man setze CG so, daß AE von CF, und EB von CG ein Gleichvielfaches sey: so ist (5, 1. S.) AB von GF dasselbe Vielfache, welches auch AB von CD ist. Demnach ist AB das Gleichvielfache von GF und CD, folglich (1, 6. G.) GF = CD, folglich, wenn man CF wegnimmt, (1, 3. G.) CG = FD. Nun ist AE von CF, und EB von CG ein Gleichvielfaches. Folglich ist auch EB von FD dasselbe Vielfache, welches AE von CF, also auch AB von CD ist.

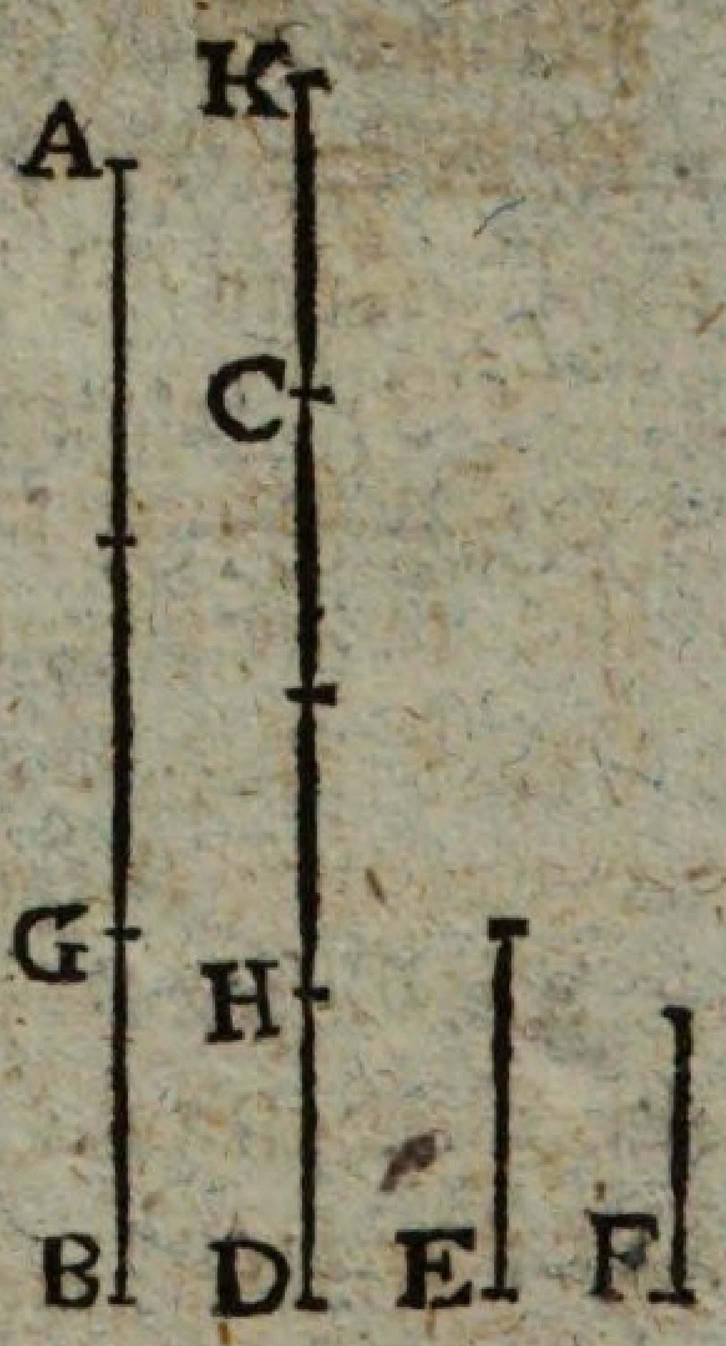


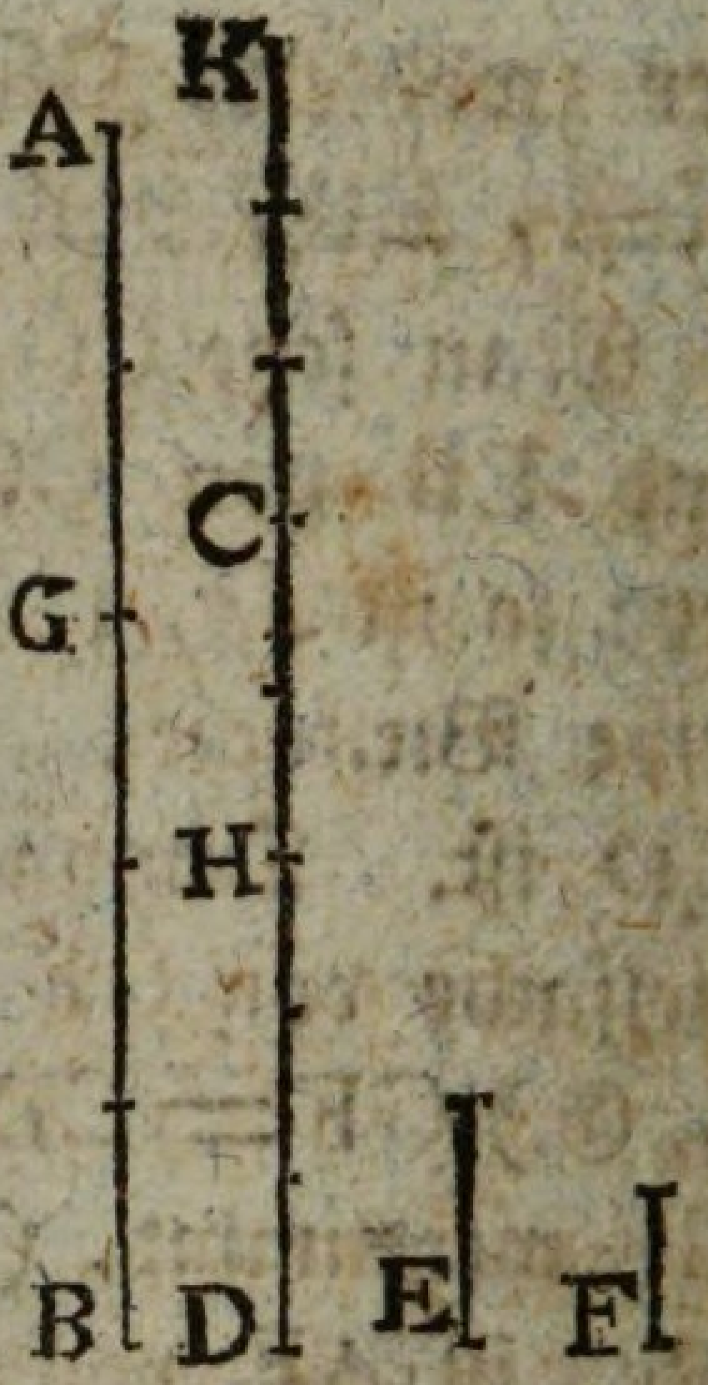
Der 6. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Größen, AB, CD, Gleichvielfache von zwey andern, E, F, auch gewisse Stücke der erstern, AG, CH, Gleichvielfache von diesen andern: so sind die Reste, GB, HD, entweder diesen andern gleich, oder auch Gleichvielfache von ihnen.

Erster Fall.

Es sey GB = E, so sage ich, daß auch HD = F sey. Man setze CK = F. Nun ist auch GB = E, aber AG von E, und CH von F ein Gleichvielfaches. Folglich ist (5, 2. S.) AB von E, und HK von F dasselbe Vielfache, welches auch CD von F ist. Demnach sind HK, CD, einerley Vielfaches von F, folglich ist (1, 1. G.) HK = CD, folglich, wenn man CH wegnimmt, (1, 3. G.) CK = HD. Nun ist CK = F. Folglich ist (1, 1. G.) HD = F. Demnach ist, wenn GB = E, auch HD = F.





Zweyter Fall.

Es sey GB ein Vielfaches von E, so wird auf ähnliche Art, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß HD von F eben so vielfach sey.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Gleiche Größen, A, B, haben zu einer und derselben Größe, C; und eine und dieselbe Größe, C, hat zu gleichen Größen, A, B, einerley Verhältniß.

Erster Theil.

Jede der beyden gleichen Größen, A, B, hat zu der C einerley Verhältniß. Mache von A, B, die Gleichvielfachen D, E, und von C ein andres beliebiges Vielfache, F: so ist, weil $A = B$, auch $D = E$, also, wenn $D \gtreqless F$, auch $E \gtreqless F$, folglich (5, 5. E.) $A:C = B:C$.

Zweyter Theil.

Die C hat zu jeder der beyden gleichen Größen A, B, einerley Verhältniß. Denn nach voriger Construction ist wieder $D = E$, also, wenn $F \gtreqless D$, auch $F \gtreqless E$, folglich (5, 5. E.) $C:A = C:B$.

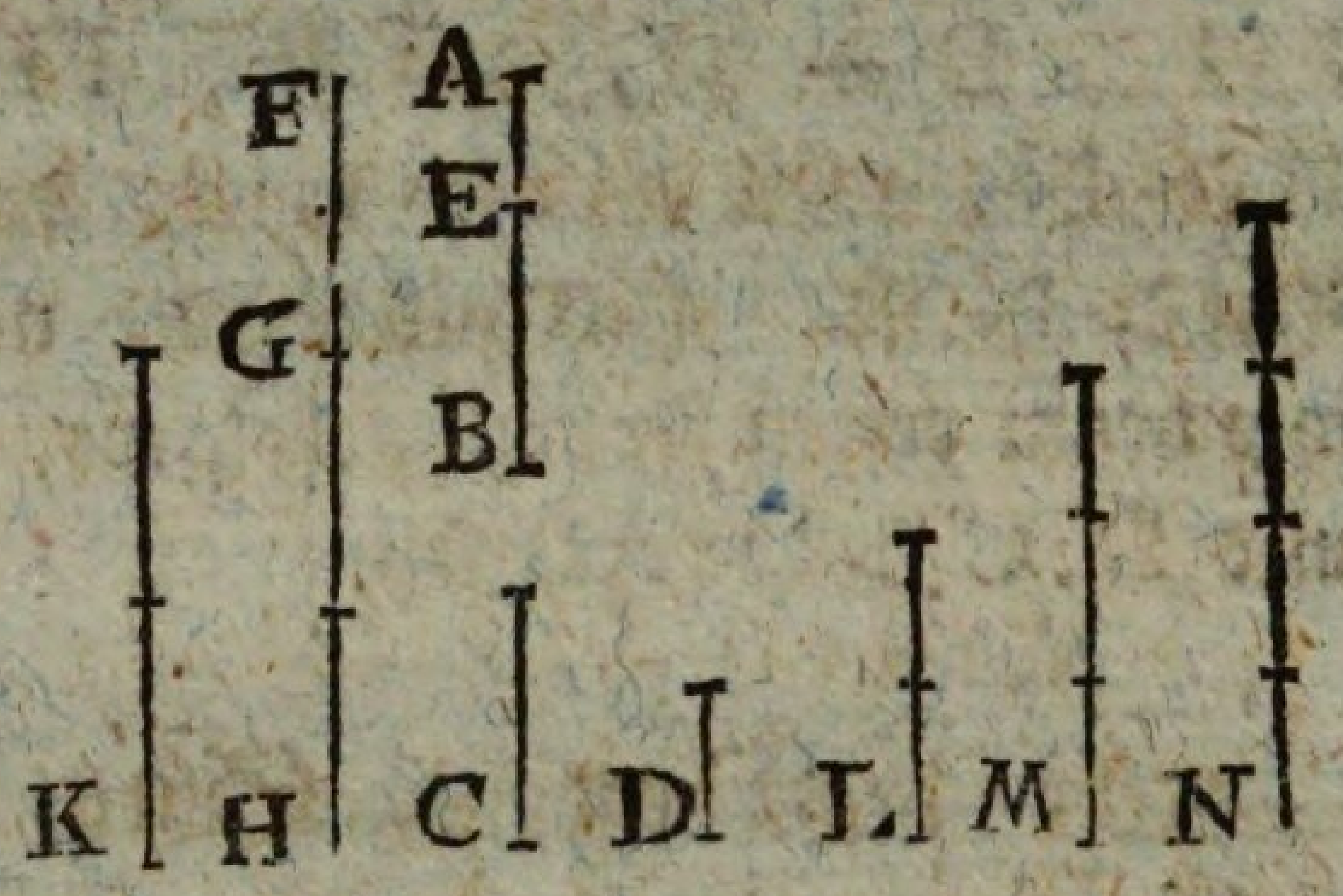
Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Von zwey ungleichen Größen, AB, C, hat die größere, AB, zu einer und derselben Größe, D, eine größere Verhältniß, als die kleinere, C; und eine und dieselbe Größe, D, zu der kleinern, C, eine größere Verhältniß, als zu der größern, AB.

Da $AB > C$, so setze $BE = C$; da dann (5, 4. E.) das kleinere der beyden Stücke AE, EB, vervielfältigt irgend einmal die D übertreffen wird. Es ist aber solches kleinere entweder AE oder EB.

Erster Fall.



Es sey AE das kleinere Stück, und irgend ein Vielfaches davon $FG > D$. So vielfach nun FG von AE, so vielfach mache GH von EB, und K von C. Von D nimm das Zwiefache L, das Dreyfache M, und so nach der Ordnung immer weiter, bis zu einem Vielfachen, wie hier das Vierfache N, welches zuerst größer ist, als K, daß also noch nicht $K < M$ sey.

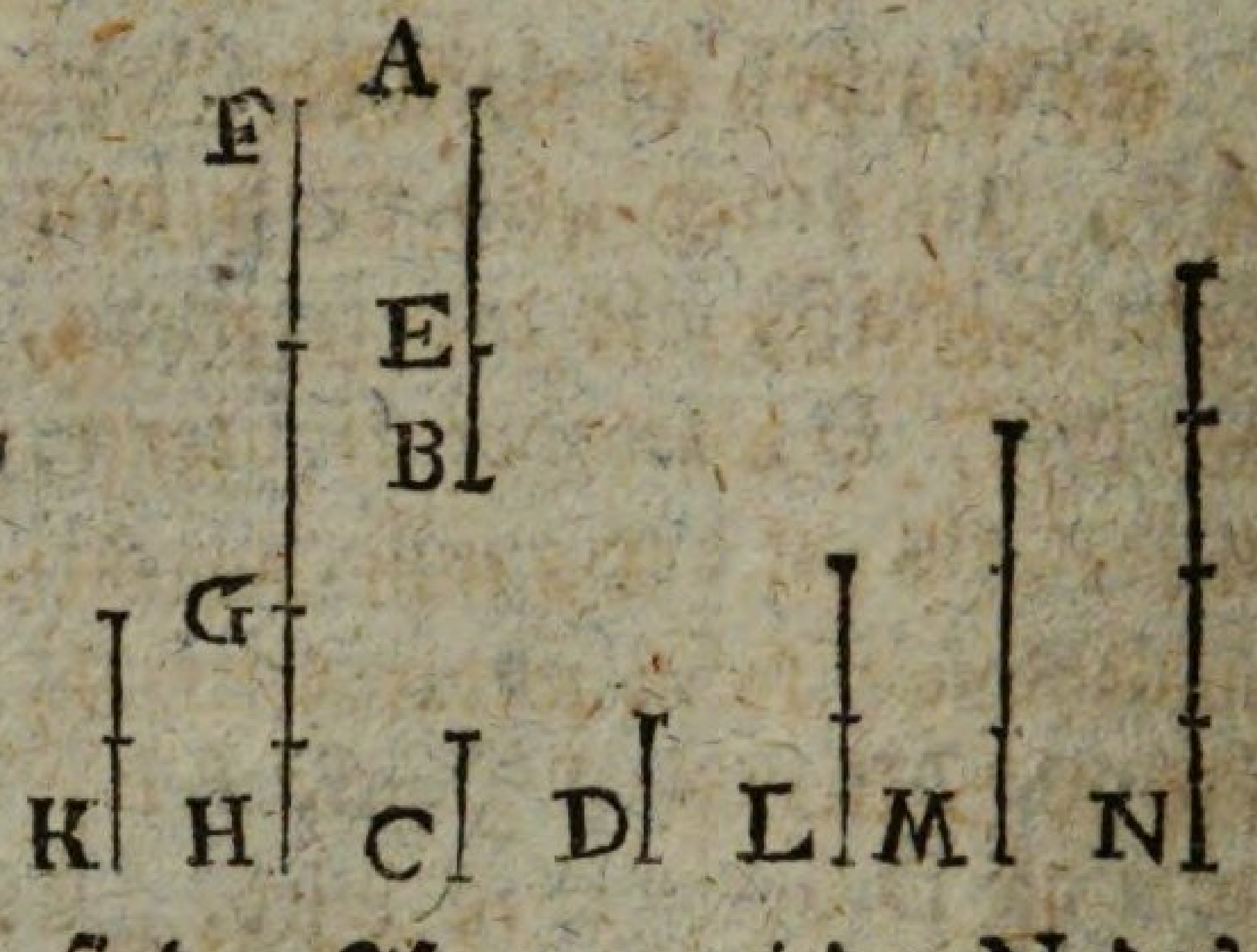
Da FG von AE, und GH von EB ein Gleichvielfaches: so ist (5, 1. S.) FH von AB dasselbe Vielfache, welches auch K von C ist. Demnach sind FH, K, Gleichvielfache der beyden ungleichen Größen AB, C.

Da GH ein so Vielfaches von EB, wie K von C, aber $EB = C$: so ist auch $GH = K$. Nun ist nicht $K < M$. Folglich ist auch nicht $GH < M$. Nun ist $FG > D$. Folglich ist $FH > D + M$, folglich, weil $D + M = N$ ist, $FH > N$.

Da nach Obigem N ein Vielfaches von D, und FH, K, das Gleichvielfache von AB, C; und $FH > N$, aber $K < N$, also auch $N > K$, und $N < FH$; so ist (5, 7. E.) $AB : D > C : D$, und $D : C > D : AB$.

Zwey-

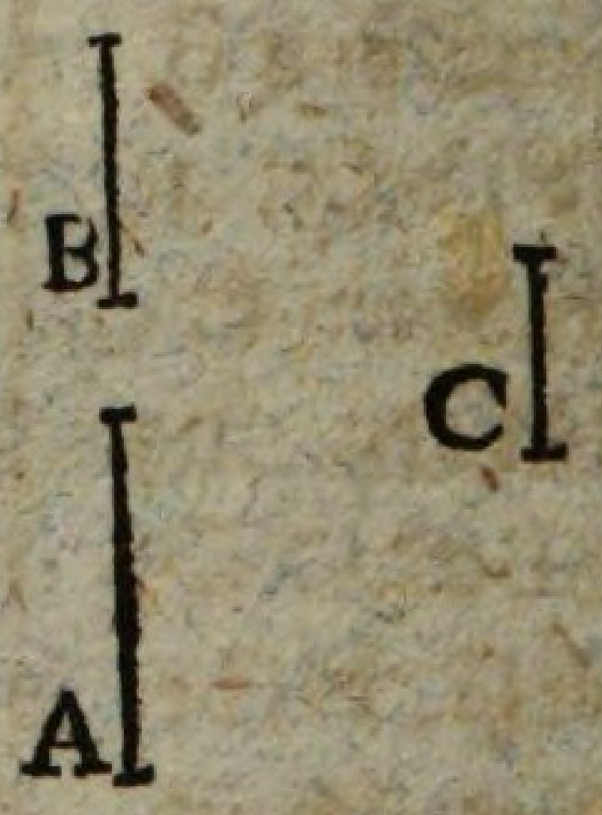
Zweyter Fall.



Es sey EB das kleinere Stück, und sein Vielfaches GH $>$ D. So vielfach nun GH von EB, so vielfach mache FG von AE, und K von C: so wird, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß K $=$ GH, und daß FH, K, von AB, C, Gleichvielfache sind. Ist nun wieder N das Vielfache von D, welches zuerst größer, als FG ist: so ist wiederum nicht FG $<$ M. Nun ist GH $>$ D. Folglich ist FH $>$ D $+$ M, das ist, FH $>$ N. Hingegen ist nicht K $>$ N, weil FG $>$ GH, das ist, FG $>$ K, aber nicht FG $>$ N ist. Hieraus wird, nach eben denselben Schlüssen, wie beym ersten Falle, gefolgert, daß wieder AB:D $>$ C:D, und D:C $>$ D:AB sey.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Größen, A, B, welche zu einer und derselben Größe, C, einerley Verhältniß haben, oder zu welchen eine und dieselbe Größe, C, einerley Verhältniß hat, sind einander gleich.



Wären A, B, ungleich, so wären (5, 8. S.) die Verhältnisse der beyden Größen zur dritten C, und der dritten Größe zu beyden ungleich, welches der Voraussetzung widerspricht. Folglich können A, B, nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

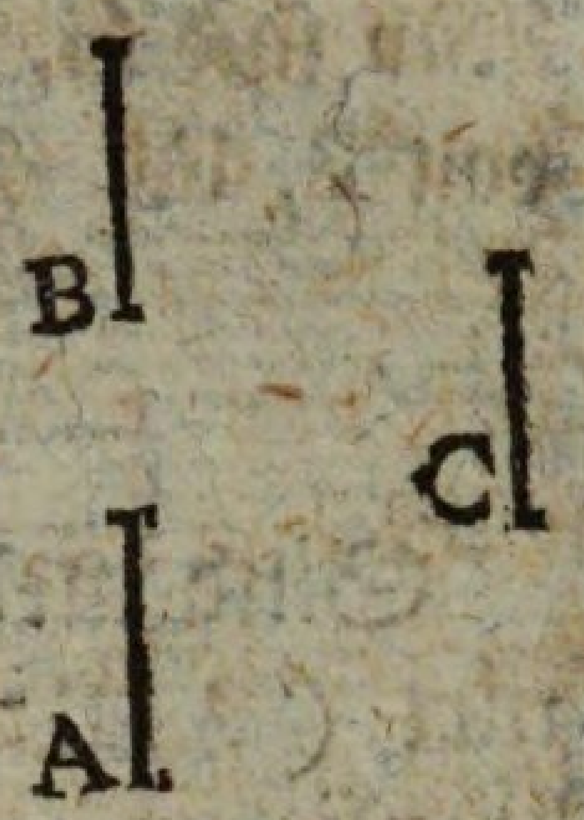
Der 10. Satz. Lehrsatz.

Von zwey Größen, A, B, ist die, welche zu einer und derselben Größe, C, eine größere Verhältniß hat, die größere; die aber, zu welcher eine und dieselbe Größe, C, eine größere Verhältniß hat, die kleinere.

Erster

Erster Theil.

Es sey A : C > B : C, so sage ich, daß A > B ist. Denn wäre dieß nicht; so wäre entweder A = B, folglich (5, 7. S.) A : C = B : C; oder A < B, folglich (5, 8. S.) A : C < B : C. Da nun beydes wider die Voraussetzung: so ist weder A = B, noch A < B, also A > B.



Zweyter Theil.

Es sey C : B > C : A, so sage ich, daß B < A ist. Denn wäre dieß nicht: so wäre entweder B = A, folglich (5, 7. S.) C : B = C : A; oder B > A, folglich (5, 8. S.) C : B < C : A. Da nun beydes gegen die Voraussetzung: so ist weder B = A, noch B > A, also B < A.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Verhältnisse, A : B, E : F, welche einer und derselben Verhältniß, C : D, gleich sind, sind selbst einander gleich.

Nimm von A, C, E, beliebige Gleichvielfache, G, H, K, auch von B, D, F, beliebige Gleichvielfache, L, M, N. Da A : B = C : D, aber G, H, beliebige Gleichvielfache von A, E, und L, M, von B, D: so

ist, (5, 5. E.) wenn G ⋛ L, auch H ⋛ M. Da ferner C : D = E : F, aber H, K, beliebige Gleichvielfache von C, E, und M, N, von D, F: so ist, (5, 5. E.) wenn H ⋛ M, auch

auch K $\angle$ N. Folglich ist, wenn G $\angle$ L, auch K $\angle$ N. Nun sind G, K, beliebige Gleichvielfache von A, E, und L, N, von B, F. Folglich ist (5, 5. E.) A:B = E:F.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, D, E, F, proportionirt (A:B = C:D = E:F): so verhalten sich alle Vorderglieder zusammen, A + C + E, zu allen Hintergliedern, B + D + F, wie ein Vorderglied A zu seinem Hintergliede, B.

Nimm von A, C, E, beliebige Gleichvielfache G, H, K, auch von B, D, F, beliebige Gleichvielfache L, M, N: so sind (5, 1. S.) G und (G + H + K) von A und (A + C + E); desgleichen L und (L + M + N) von B und (B + D + F) Gleichvielfache. Nun ist, weil A:B = C:D = E:F, (5, 5. E.) wenn G $\angle$ L, auch H $\angle$ M, auch K $\angle$ N, und daher, wenn G $\angle$ L, auch (G + H + K) $\angle$ (L + M + N). Folglich ist (5, 5. E.) A:B = (A + C + E):(B + D + F).

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, C, zu einer vierten, D; aber die dritte zur vierten, eine größere Verhältniß, als eine fünfte, E, zu einer sechsten, F: so hat auch die erste zur zweyten eine größere Verhältniß, als die fünfte zur sechsten.

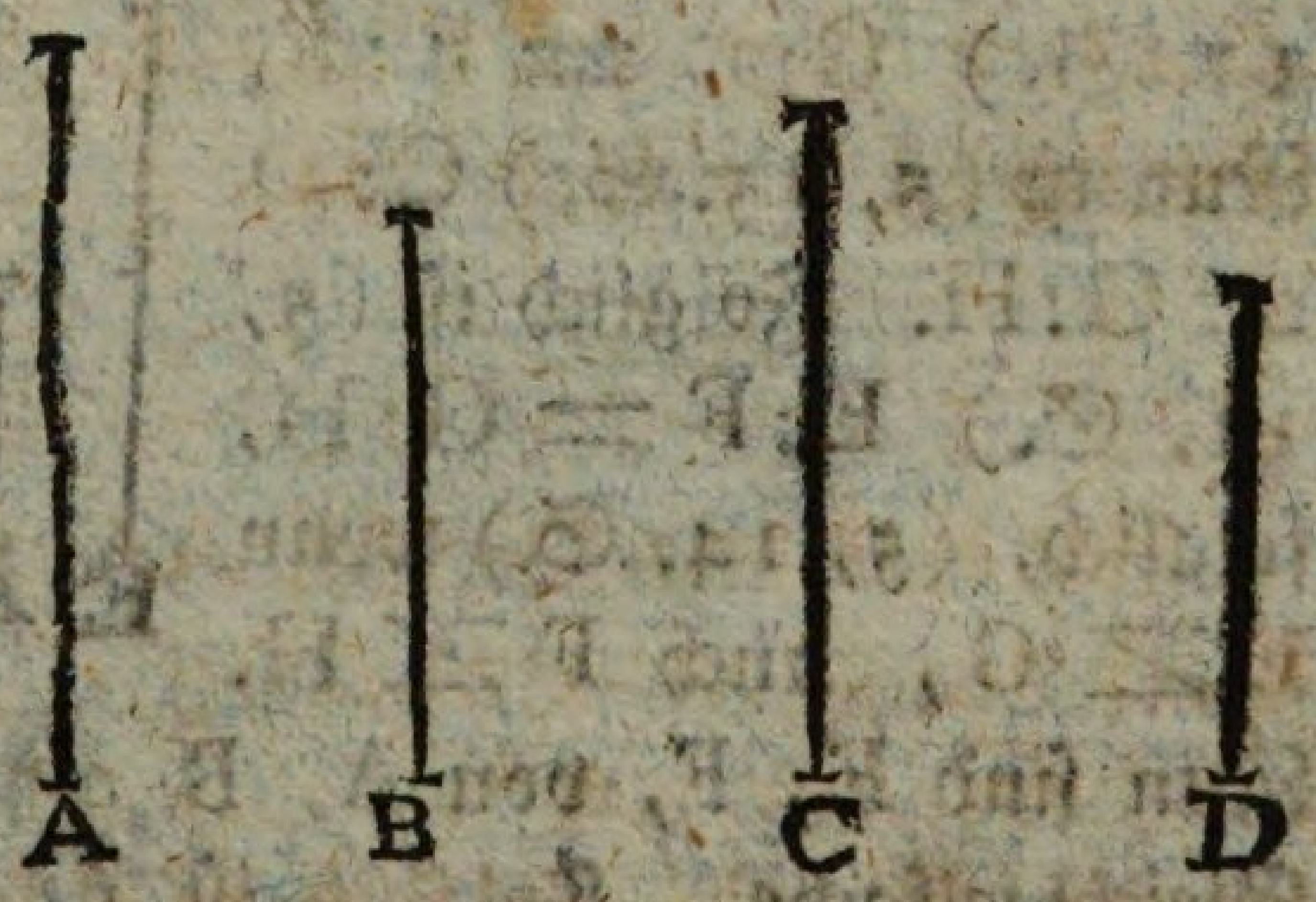
Da C:D>E:F, so giebt es von C, E, solche Gleichvielfache G, H, und von D, F, solche Gleichvielfache, K, L, daß (5, 7. E.) wohl G>K, aber nicht H>L. So vielfach nun G von C ist, eben so vielfach sey M von A, und so vielfach K

von D ist, eben so vielfach sey N von B. Aber C:D=A:B, und G>K. Folglich ist (5, 5. E.) M>N, hingegen nach Obigem nicht H>L. Nun sind M, H, von A, E, und N, L, von B, F, Gleichvielfache. Folglich ist (5, 7. E.) A:B >E:F.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, C, zu einer vierten, D; und ist die erste entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die dritte: so ist auch die zweyte im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die vierte.

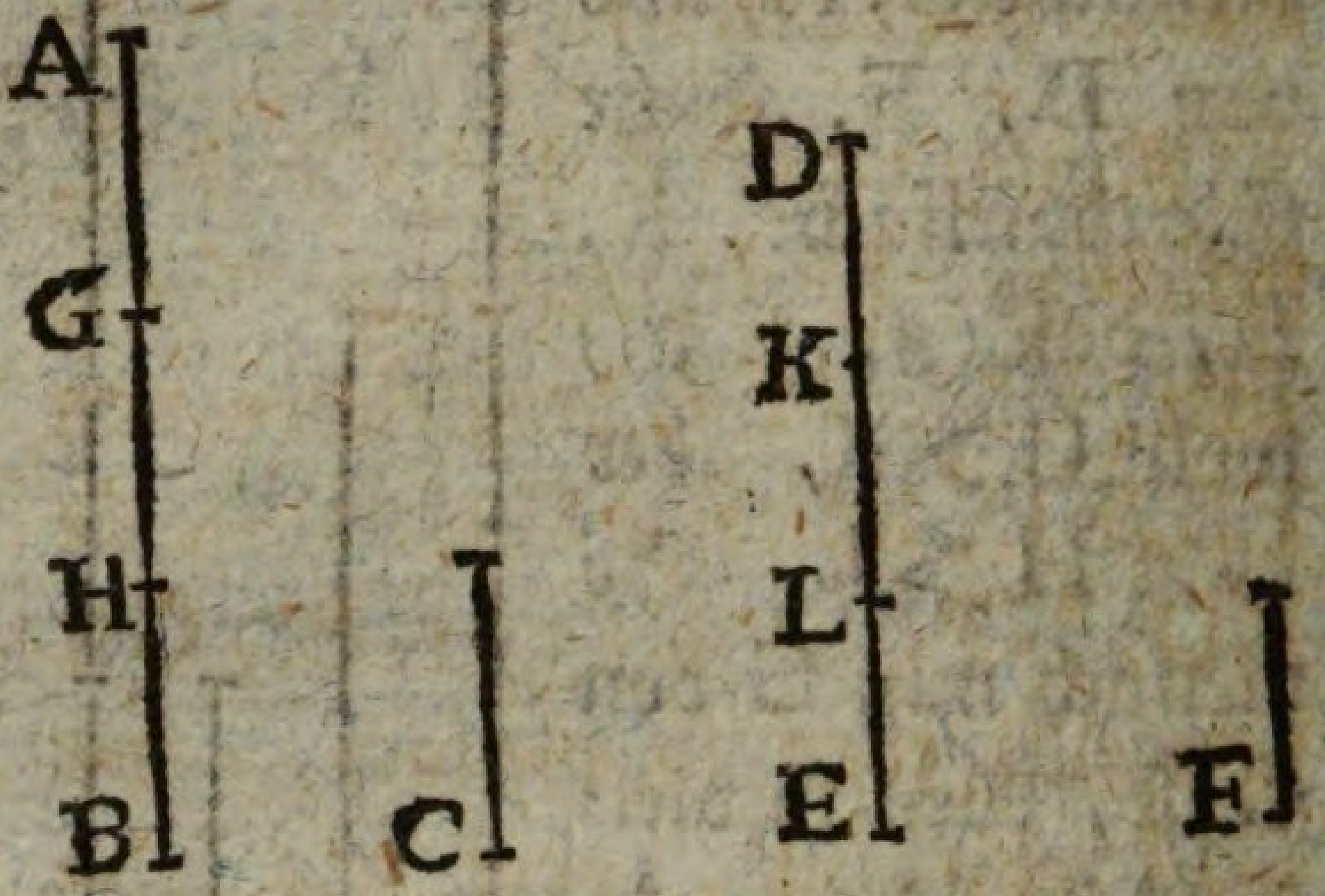
Ist A>C, so ist (5, 8. S.) A:B>C:B. Nun ist C:D=A:B. Folglich ist (5, 13. S.) C:D>C:B, folglich (5, 10. S.) B>D. Demnach ist, wenn A>C, auch B>D. Auf ähnliche Art wird erwiesen,



daß B=D sey, wenn A=C ist, und daß B<D sey, wenn A<C ist.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

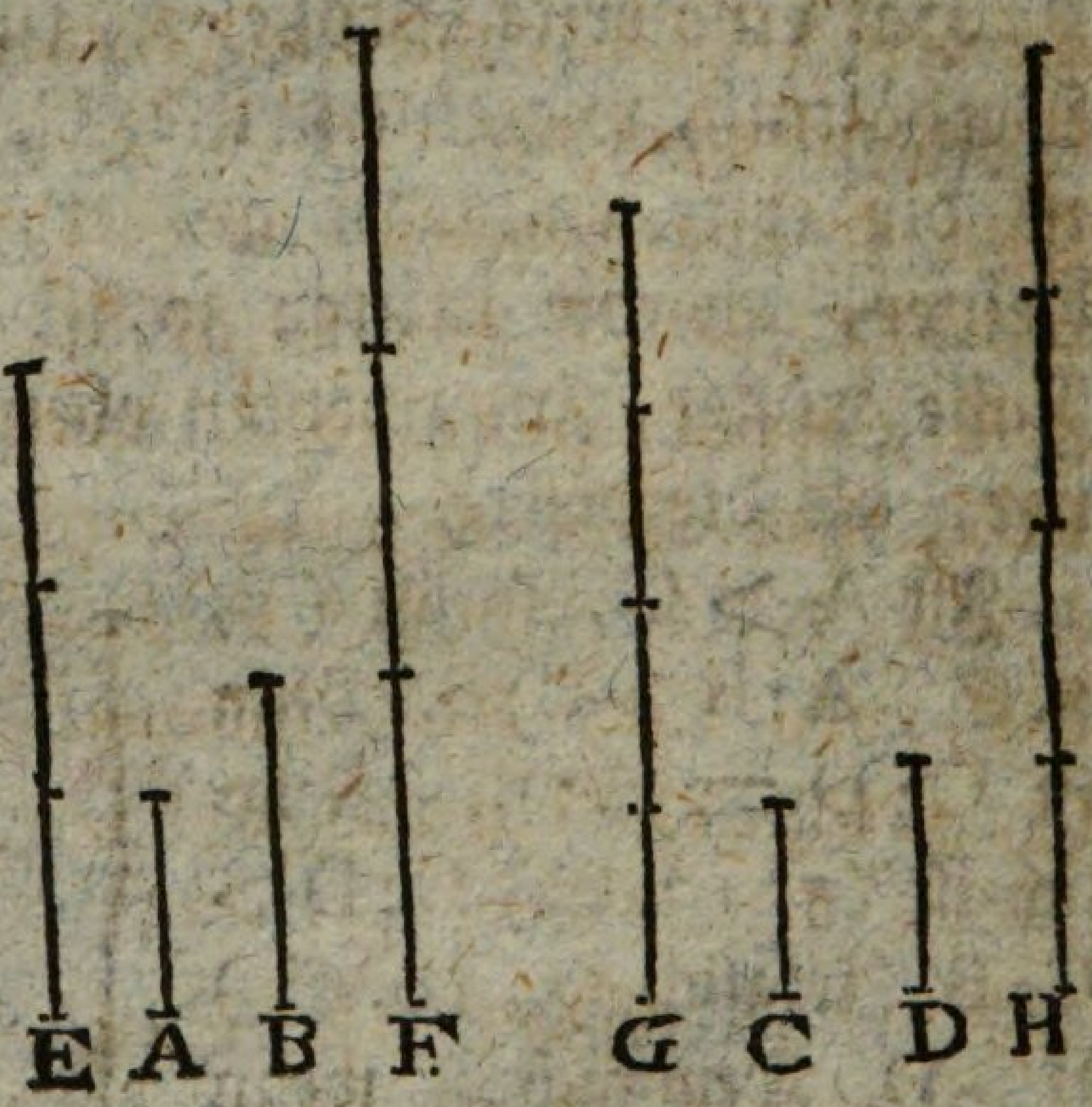
Theile, C, F, sind mit ihren Gleichvielfachen, AB, DE, in einerley Verhältniß.



AB ist ein so Vielfaches von C, wie DE von F. So viele der C gleiche Theile AG, GH, HB, also in AB sind, eben so viele der F gleiche Theile DK, KL, LE, sind in DE. Demnach ist (5, 7. u. 11. S.) AG:DK = GH:KL = HB:LE, folglich (5, 12. S.) AG:DK = AB:DE. Nun ist AG = C, und DK = F. Folglich ist C:F = AB:DE.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

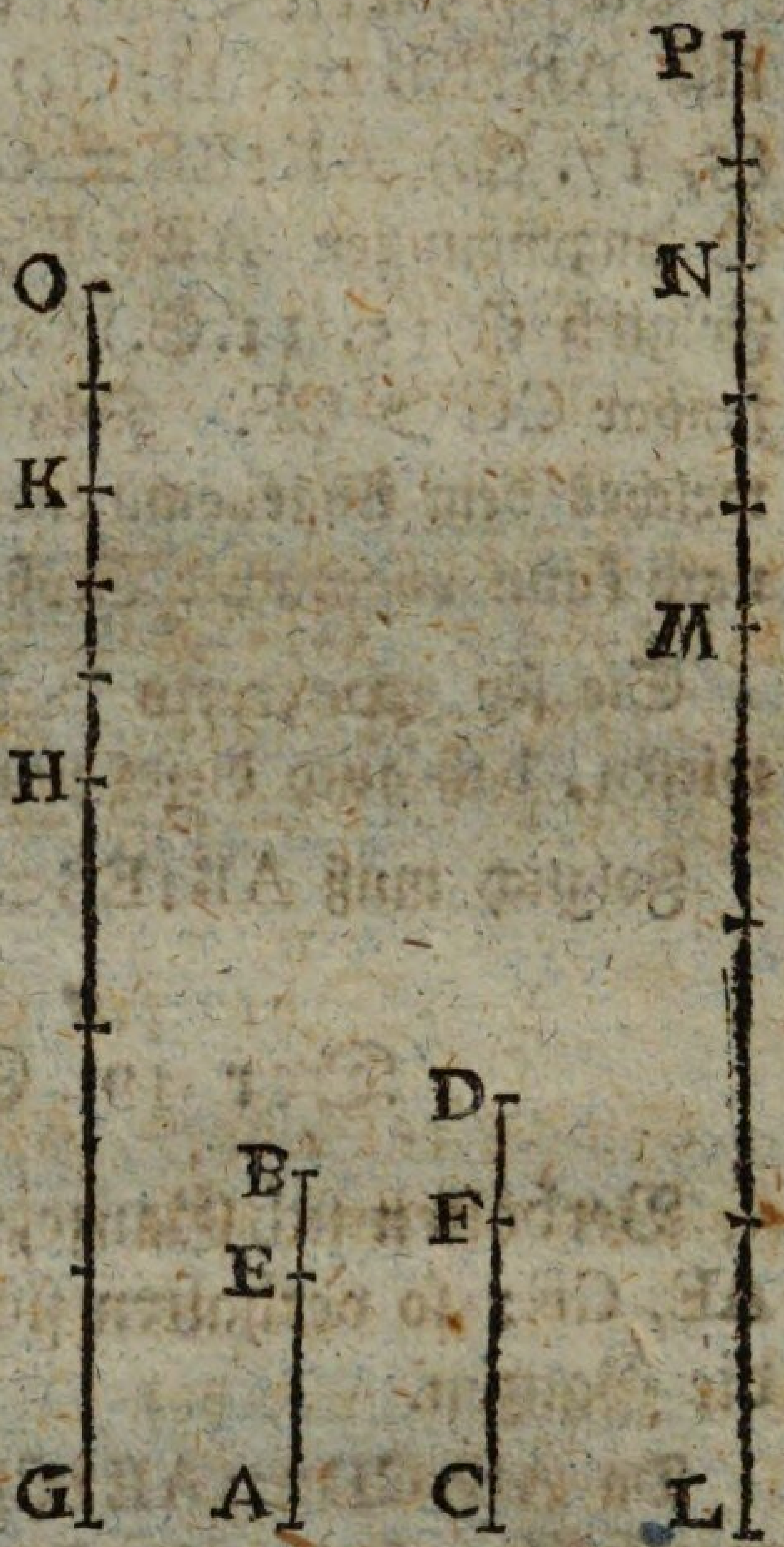
Sind vier Größen, A, B, C, D, proportionirt; so sind sie auch **verwechselt** proportionirt.



Nimm von A, B, Gleichvielfache E, F, und von C, D, Gleichvielfache G, H: so ist (5, 15. S.) A:B = E:F. Nun ist A:B = C:D. Folglich ist (5, 11. S.) C:D = E:F. Nun ist (5, 15. S.) C:D = G:H. Folglich ist (5, 11. S.) E:F = G:H, folglich, (5, 14. S.) wenn E ≥ G, auch F ≥ H. Nun sind E, F, von A, B, und G, H, von C, D, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A:C = B:D.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Sind **verbundene** Größen, AB, BE, CD, DF, proportionirt: so sind auch die **getrennten**, AB, EB, CF, FD, proportionirt.

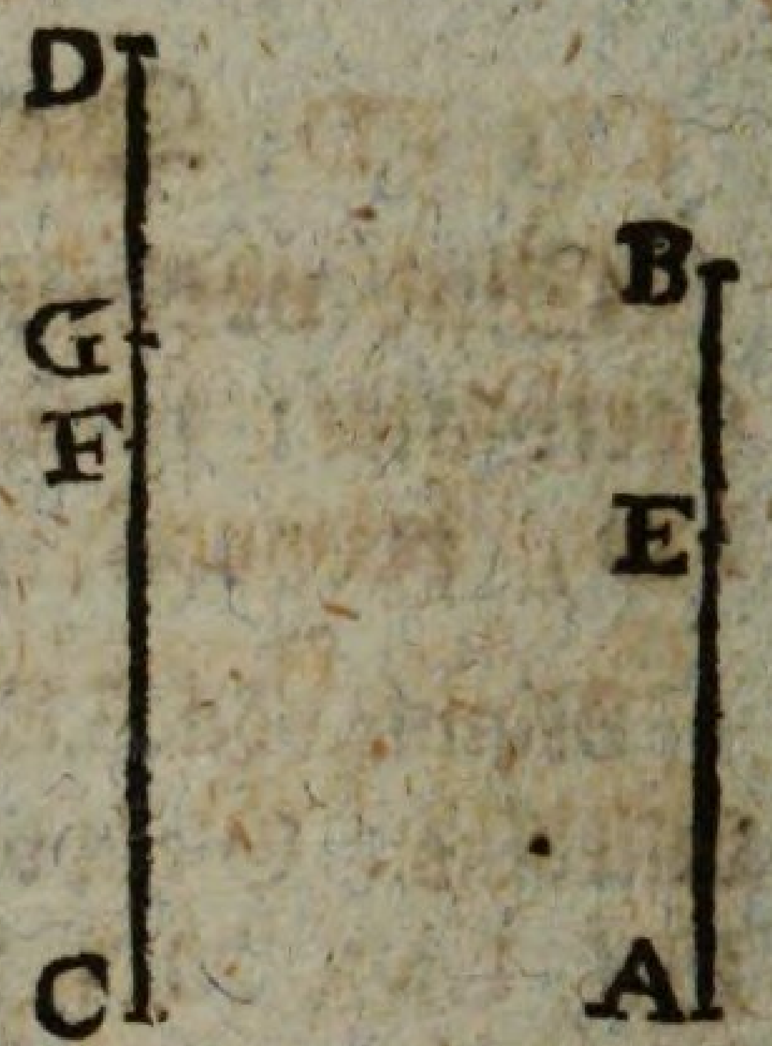


Nimm von AE, EB, CF, FD, beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN, desgleichen von EB, FD, beliebige Gleichvielfache KO, NP: so ist (5, 1. S.) GK von AB eben so vielfach, wie GH von AE, oder wie LM von CF, folglich (5, 1. S.) wie LN von CD. Da ferner HK von EB so vielfach, wie MN von FD, aber auch KO von EB so vielfach, wie NP von FD: so ist (5, 2. S.) HO von EB so vielfach, wie MP von FD. Demnach sind GK, LN Gleichvielfache von AB, CD; und HO, MP, Gleichvielfache von BE, DF. Nun ist angenommen AB : BE = CD : DF. Folglich ist (5, 5. E.) wenn GK $\gtreqless$ HO, auch LN $\gtreqless$ MP, folglich, dort HK, hier MN weggenommen, wenn GH $\gtreqless$ KO, auch LM $\gtreqless$ NP. Nun sind GH, LM, von AE, CF, und KO, NP, von EB, FD, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

Sind **getrennte** Größen, AE, EB, CF, FD, proportionirt: so sind auch die **verbundenen** AB, EB, CD, FD, proportionirt.

STADTBIBLIOTHEK AUGSBURG



Verhielte sich AB zu EB nicht wie CD zu FD, sondern wie CD zu irgend einer andern Größe: so müßte diese entweder kleiner oder größer, als DF seyn.

Sie sey **zuerst** < DF, etwa GD, daß also AB : EB = CD : GD wäre; so wäre (5, 17. S.) AE : EB = CG : GD. Nun ist angenommen AE : EB = CF : FD. Folglich ist (5, 11. S.) CG : GD = CF : FD. Nun ist offenbar CG > CF. Folglich ist (5, 14. S.) GD > FD, welches dem Angenommenen GD < FD widerspricht. Demnach kann obgedachte Größe nicht < DF seyn.

Sie sey **zweytens** > DF, so wird auf eben die Art bewiesen, daß auch dieses unmöglich sey.

Folglich muß AB : EB = CD : FD seyn.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Verhalten sich Ganze, AB, CD, wie Stücke von ihnen, AE, CF: so verhalten sich auch die Reste, EB, FD, wie die Ganzen.

Da AB : CD = AE : CF, so ist **verwechselt** (5, 16. S.) AB : AE = CD : CF, folglich **getrennt** (5, 17. S.) EB : AE = FD : CF, folglich **verwechselt** (5, 16. S.) EB : FD = AE : CF. Nun ist angenommen AB : CD = AE : CF. Folglich ist (5, 11. S.) EB : FD = AB : CD.

Zusatz.

Da bewiesen worden, daß, wenn AB : CD = AE : CF, auch AB : CD = EB : FD sey; so ist **verwechselt** AB : EB = CD

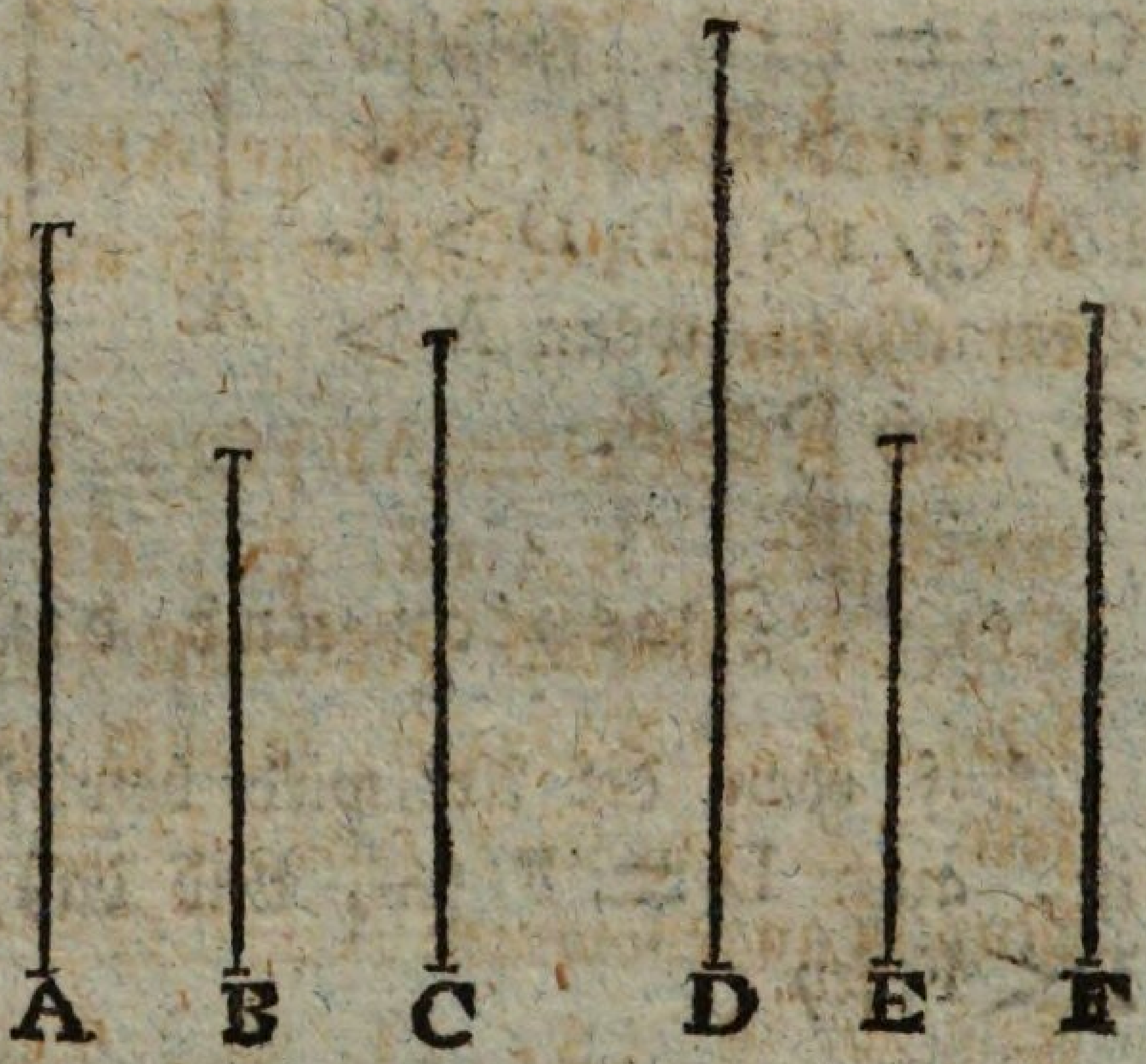
CD:FD. Folglich sind **verbundene** Größen proportionirt. Nun ist aber auch bewiesen, daß AB:AE = CD:CF, oder AB:AB — EB = CD:CD — FD, das ist (5, 17. E.) **zurückkehrend**. Hieraus erhellet, daß, wenn **verbundene** Größen proportionirt sind, sie auch **zurückkehrend** proportionirt sind.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, in **geordneter** Proportion, und ist von jenen, die erste, A, entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die letzte, C; so ist auch von diesen die erste, D, im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die letzte, F.

Erster Fall.

Es sey A > C, so ist (5, 8. S.) A:B > C:B. Nun ist (5, 19. E.) angenommen, A:B = D:E. Folglich ist (5, 13. S.) D:E > C:B. Nun ist (5, 19. E. und 5, 4. Zus.) C:B = F:E. Folglich ist D:E > F:E, folglich (5, 10. S.) D > F. Demnach ist, wenn A > C, auch D > F.



Zweyter und dritter Fall.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß, wenn A = C ist, auch D = F sey, und daß, wenn A < C ist, auch D < F sey.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, in **zerstreuter** Proportion, und ist von jenen die erste, A, entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die letzte, C: so ist auch von diesen die erste, D, im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die letzte, F.

Erster Fall.

Es sey A > C: so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist (5, 20. E.) angenommen, A : B = E : F. Folglich ist (5, 13. S.) E : F > C : B. Nun ist (5, 20. E. und 5, 4. Zus.) C : B = E : D. Folglich ist E : F > E : D, folglich (5, 10. S.) D > F. Demnach ist, wenn A > C, auch D > F.

Zweyter und dritter Fall.

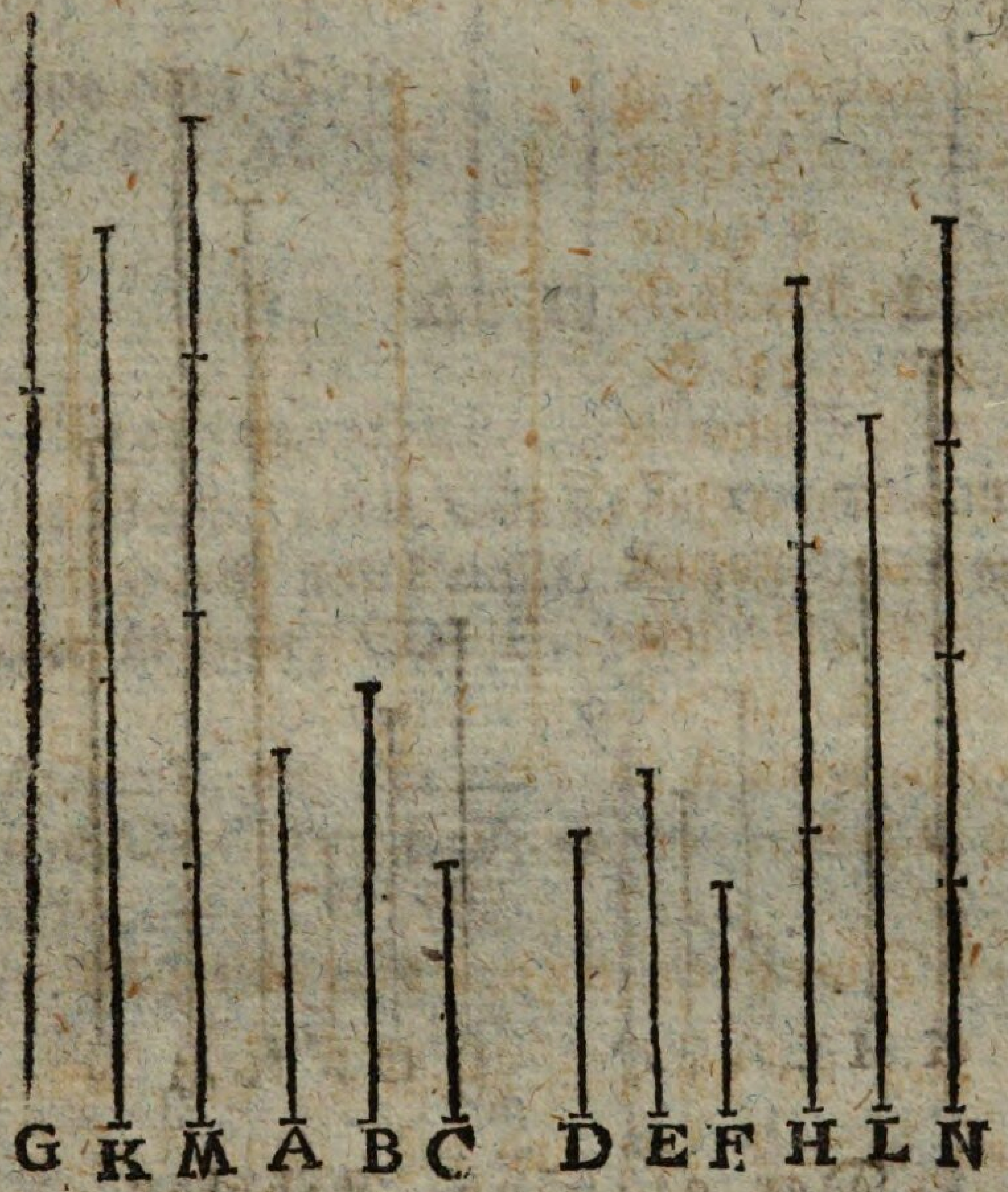
Auf eben die Art wird bewiesen, daß, wenn A = C ist, auch D = F sey, und daß, wenn A < C ist, auch D < F sey.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind mrhrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, **geordnet** proportionirt: so sind sie **aus dem Gleichen** proportionirt.

Nimm

Nimm von A, D, beliebige Gleichvielfache G, H, und von B, E, beliebige Gleichvielfache K, L, desgleichen von C, F, beliebige Gleichvielfache M, N. Nun ist (5, 19. E.) angenommen A:B=D:E, und daher (5, 4. S.) G:K=H:L. Auf eben die Art ist K:M=L:N. Folglich ist, (5, 20. S.) wenn G⋝M, auch H⋝N. Nun sind G, H, von A, D, und M, N, von C, F, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A:C=D:F.



Der 23. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, **zerstreut**, proportionirt: so sind sie **aus dem Gleichen** proportionirt.

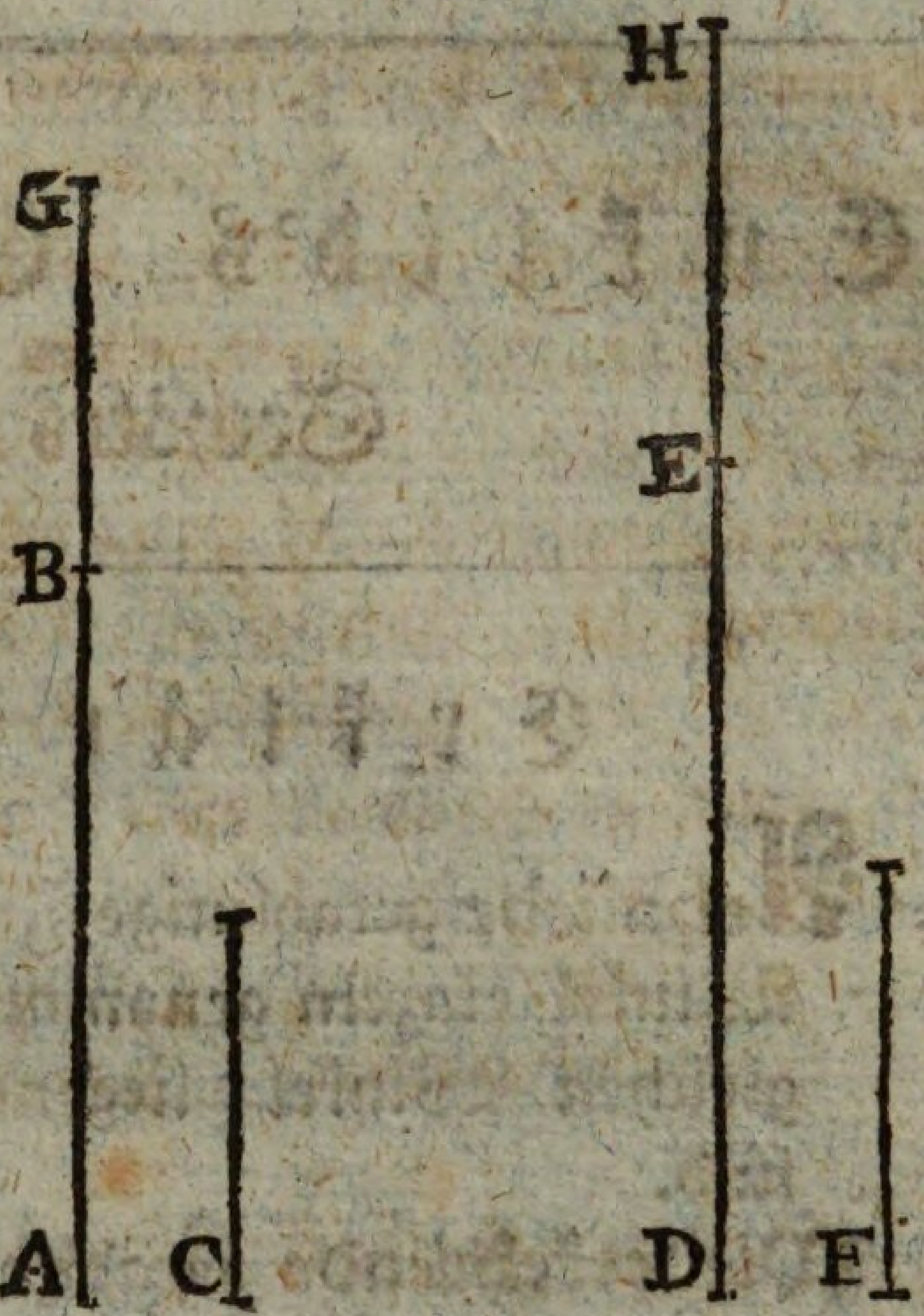
Nimm von A, B, D, beliebige Gleichvielfache, G, H, K, desgleichen von C, E, F, beliebige Gleichvielfache L, M, N: so ist (5, 15. S.) A:B = G:H, und E:F = M:N. Nun ist (5, 20. E.) angenommen A:B = E:F. Folglich ist (5, 11. S.) G:H = M:N. Nun ist (5, 20. E.) auch angenommen B:C = D:E, und daher (5, 15. S.) H:L = K:M. Folglich ist, (5, 21. S.) wenn G ≧ L, auch K ≧ N. Nun sind G, K, von A, D, und L, N, von C, F, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A:C = D:F.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, AB, zu einer zweyten, C, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, DE, zu einer vierten F, und eine fünfte, BG, zur zweyten dieselbe Verhältniß, wie eine sechste, EH, zur vierten: so hat auch **verbunden**, die erste und fünfte, AG, zur zweyten, C, dieselbe Verhältniß, wie die dritte und sechste, DH, zur vierten, F.

Da

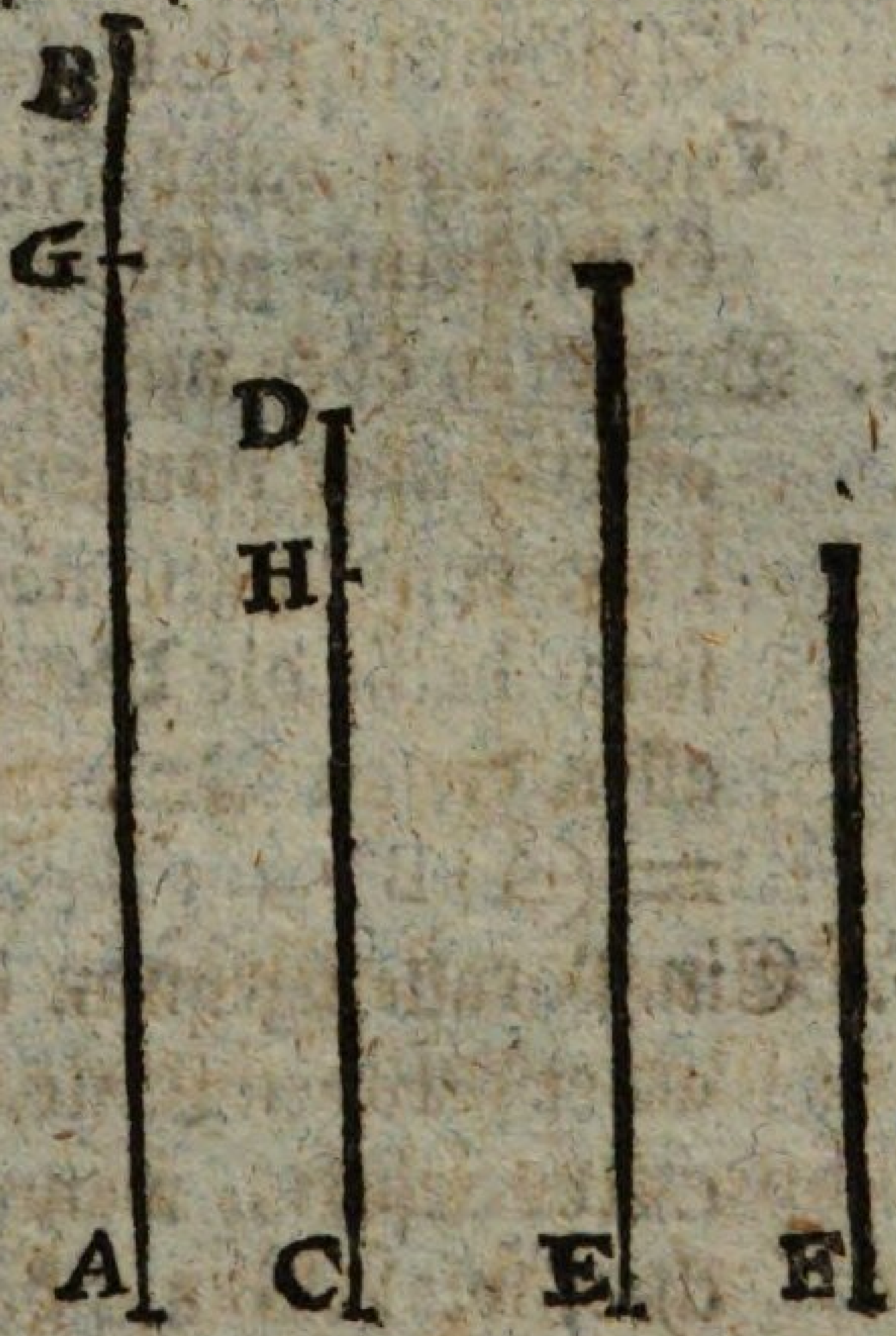
Da BG : C = EH : F, so ist umgekehrt (5, 4. Zus.) C : GB = F : EH. Nun ist auch AB : C = DE : F. Folglich ist aus dem Gleichen (5, 22. S.) AB : BG = DE : EH, folglich verbunden (5, 18. S.) AG : BG = DH : FH. Nun war auch BG : C = EH : F. Folglich ist aus dem Gleichen (5, 22. S.) AG : C = DH : F.



Der 25. Satz. Lehrsatz.

Sind vier Größen, AB, CD, E, F, proportionirt: so sind die größte, AB, und kleinste, F, zusammen größer, als die beyden übrigen, CD, E, zusammen.

Mache AG = E, und CH = F; so ist, weil AB : CD = E : F, auch AB : CD = AG : CH, folglich (5, 19. S.) GB : HD = AB : CD. Nun ist AB > CD. Folglich ist auch GB > HD. Nun ist (1, 2. G.) aus Obigem AG + F = CH + E. Folglich ist (1, 4. G.) GB + AG + F > HD + CH + E, das ist, AB + F > CD + E.



Euklid's Elemente

Sechstes Buch.

Erklärungen.

1. **Aehnliche** geradlinige Figuren sind, in welchen die Winkel einzeln genommen gleich, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind.

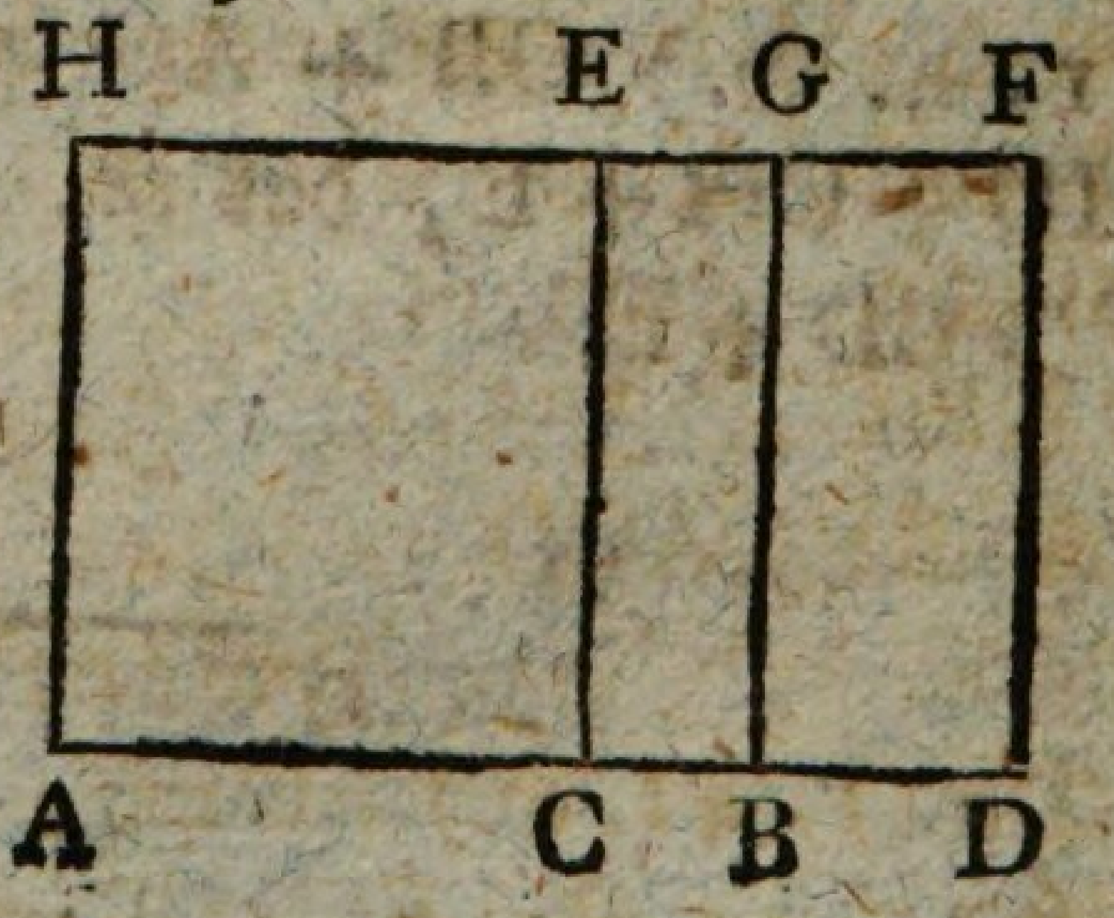
2. **Wiederkehrende** geradlinige Figuren sind, in deren einer die mittlern, in der andern aber die äußern Glieder der Proportion enthalten sind.

3. **Nach stetiger Proportion** oder **nach äußerer und mittlerer Verhältniß** ist eine gerade Linie geschnitten: wenn sich die ganze Linie zum größern Abschnitte, wie dieser zum kleinern Abschnitte, verhält.

4. Die **Höhe** einer Figur ist der vom Gipfel auf die Grundlinie gefällte Perpendikel.

5. Von drey oder mehrern Größen, A, B, C, D, welche an einander hangend in den Verhältnissen jeder vorhergehenden zur nächstfolgenden, A:B, B:C, C:D, sind, heißt die **Verhältniß** der ersten zur letzten, aus allen diesen Verhältnissen **zusammengesetzt**, A:D = (A:B) + (B:C) + (C:D).

6. Ein Parallelogramm ist an einer geraden Linie, AB, **entworfen**, wenn solches, wie AG, auf der Linie AB selbst; oder, wie AE, auf einem Abschnitte AC der Linie, oder



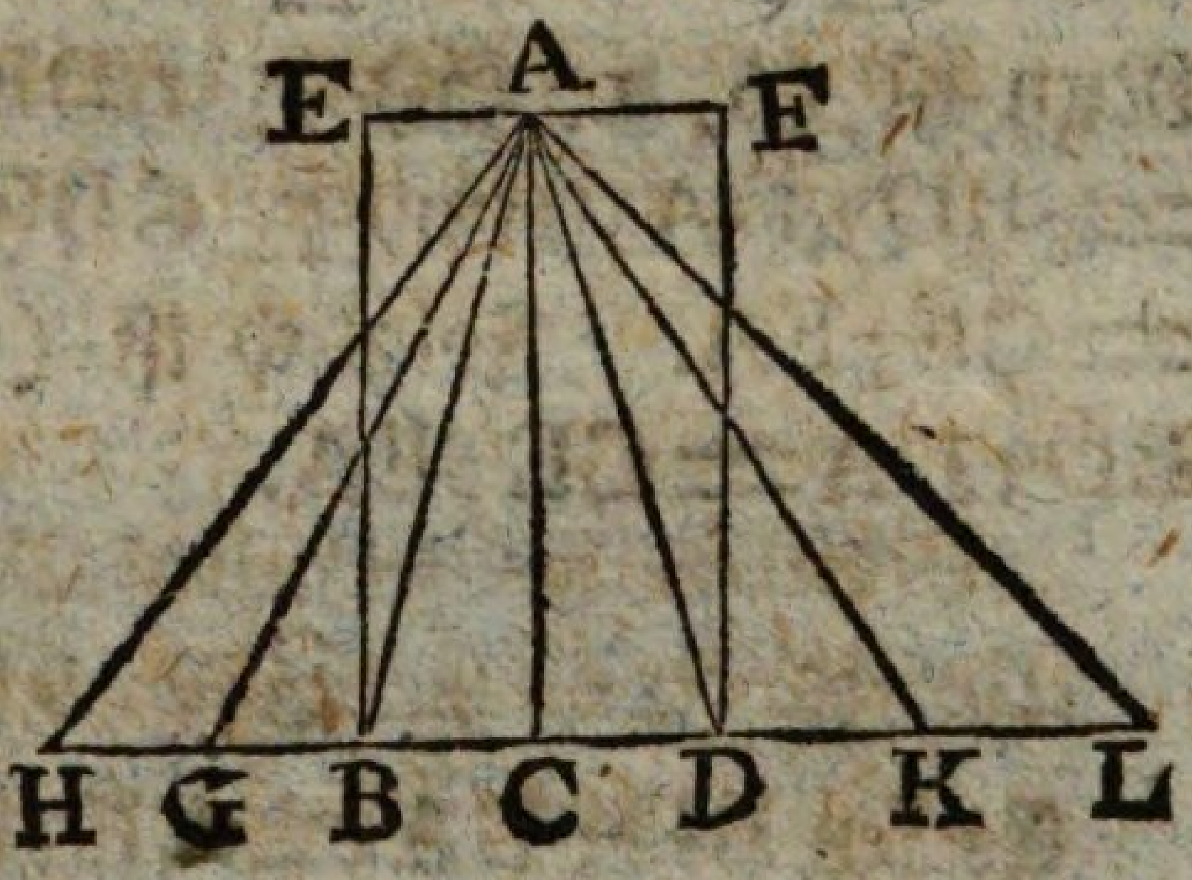
wie

wie AF, auf der verlängerten Linie AD beschrieben ist.

Ziehet man nun in beyden letztern Fällen durch der Linie Endpunkt B mit CE oder DF die BG parallel, welche von HF in G geschnitten wird: so erhält man ein Parallelogramm AG auf der Linie AB, in dessen Beziehung das Parallelogramm BE auf dem Abschnitte BC die **Ergänzung** des Parallelogramms AE; aber das Parallelogramm BF auf dem Abschnitte BD, der **Ueberschuß** des Parallelogramms AF genannt wird.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Triangel, ACB, ACD, auch Parallelogramme, EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien, BC, CD.



Verlängere BD auf beyden Seiten nach H, L, nimm in beliebiger Anzahl der BC gleiche BG, GH, und in beliebiger Anzahl der CD gleiche DK, KL; und ziehe von A, nach den Theilpunkten gerade Linien AG, AH, AK, AL.

Erster Theil.

Da CB = BG = GH: so ist (1, 38. S.) △ ACB = △ ABG = △ AGH. Folglich ist CH von BC, und △ ACH vom △ ACB ein Gleichvielfaches. Aus eben den Gründen sind auch LC von CD, und △ ALC vom △ ACD, Gleichvielfache. Nun ist, (1, 38. S.) wenn HC $\gtreqless$ LC, auch △ AHC $\gtreqless$ △ ALC. Folglich ist (5, 5. E.) BC : CD = △ ACB : △ ACD.

Zweyter Theil.

Da (1, 41. S.) EC = 2 < ACB, und CF = 2 △ ACD: so ist (5, 15. S.) EC : CF = △ ACB : △ ACD. Nun ist be-

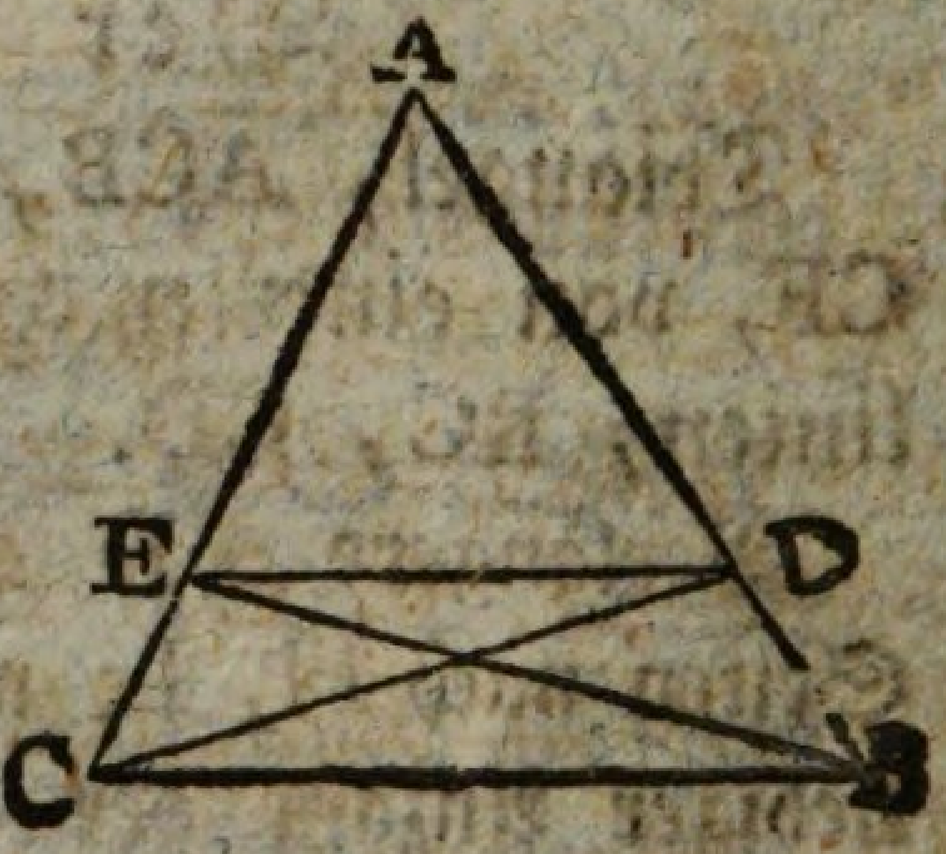
 wie-

wiesen BC : CD = △ ACB : △ ACD. Folglich ist (5, 11. S.) BC : CD = EC : CF.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Wird mit einer Seite, BC, eines Triangels, ABC, eine gerade Linie, DE, parallel gezogen: so schneidet solche die beyden andern Seiten, AB, AC, proportionirt. Und sind zwey Seiten, AB, AC, eines Triangels, ABC, proportionirt geschnitten: so ist die durch die Schneidungspunkte, D, E, gezogene gerade Linie, DE, der dritten Seite, BC, parallel.

Erster Theil.



Es sey DE der BC parallel. Ziehe BE, CD: so ist (1, 37. S.) △ BDE = △ CDE, folglich (5, 7. S.) △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE. Nun ist (6, 1. S.) △ BDE : △ ADE = BD : DA, und △ CDE : △ ADE = CE : EA. Folglich ist (5, 11. S.) BD : DA = CE : EA.

Zweyter Theil.

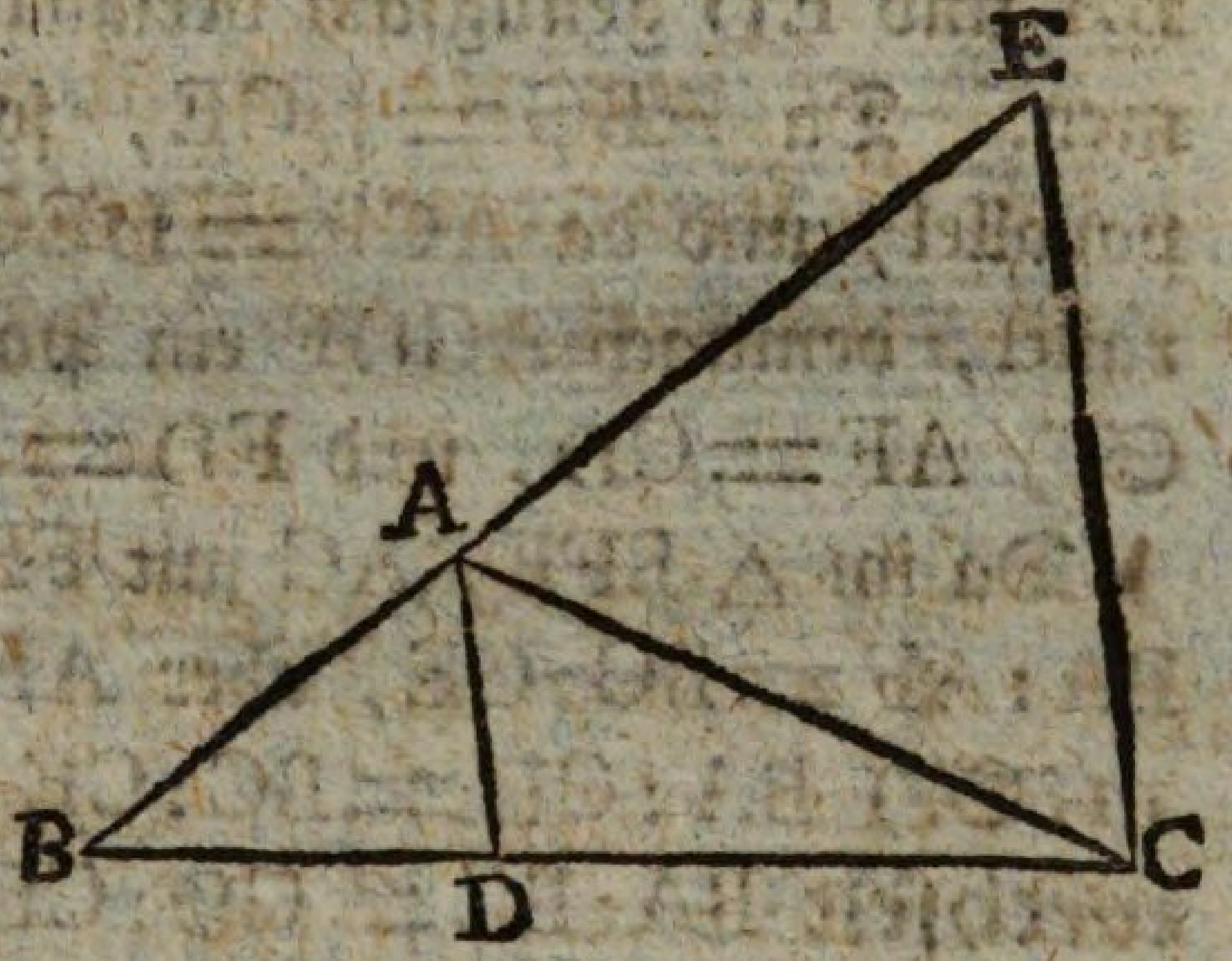
Es sey BD : DA = CE : EA. Nun ist (6, 1. S.) BD : DA = △ BDE : △ ADE, und CE : EA = △ CDE : △ ADE. Folglich ist (5, 11. S.) △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE, folglich (5, 9. S.) △ BDE = △ CDE. Nun ist diesen beyden Triangeln die Grundlinie DE gemein. Folglich ist (1, 39. S.) DE der BC parallel.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Winkel, A, eines Triangels, BAC, von einer geraden Linie, AD, halbirt: so schneidet solche, genugsam verlängert, die dem Winkel gegenüberliegende Seite, BC,

BC, den beyden andern, BA, AC, proportionirt. Und ist eine Seite, BC, eines Triangels, BAC, den beyden andern, BA, AC, proportionirt geschnitten: so wird der der Seite, BC, gegenüberliegende Winkel von der durch seine Spitze, A, und den Schneidungspunkt, D, gezogenen geraden Linie, AD, halbirt.

Erster Theil.



Es sey BAC von AD halbirt. Ziehe (1, 31. S.) durch C mit AD die CE parallel, und verlängere BA, bis sie die CE in E trifft: so ist (1, 29. S.) ACE = CAD = BAD. Nun ist auch (1, 29. S.) BAD = AEC. Folglich ist (1, 1. G.) ACE = AEC, folglich (1, 6. S.) AE = AC. Da nun (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE, so ist (5, 7. S.) BD : DC = BA : AC.

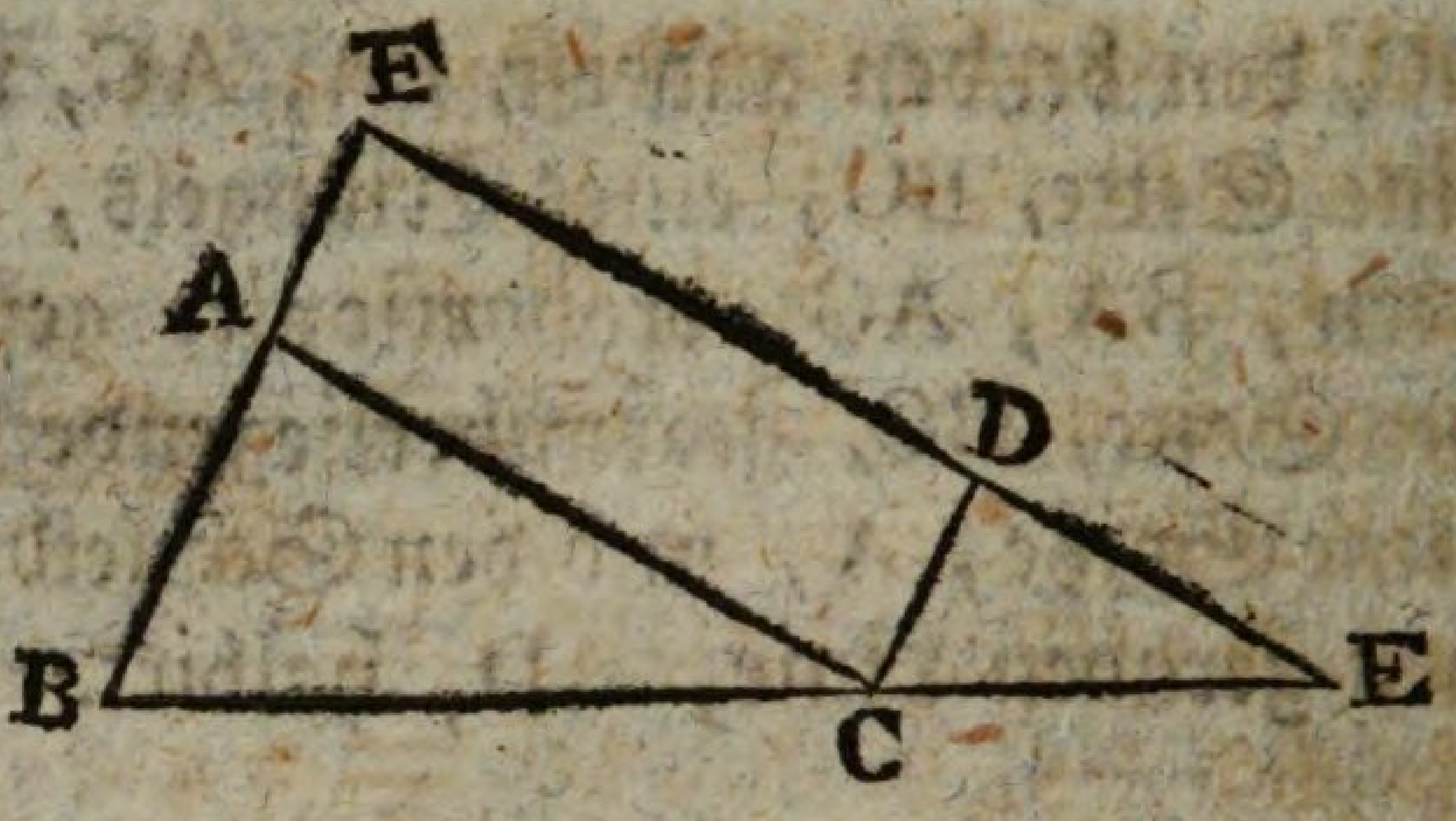
Zweyter Theil.

Es sey BD : DC = BA : AC. Nun ist (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5, 11. S.) BA : AC = BA : AE, folglich (5, 9. S.) AC = AE, folglich (1, 5. S.) AEC = ACE. Nun ist (1, 29. S.) AEC = BAD, und ACE = DAC. Folglich ist (1, 1. G.) BAD = DAC, also BAC von AD halbirt.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

In gleichwinkligen Triangeln, ABC, DCE, sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt; und zwar diejenigen Seiten gleichnamig, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen.

Es



Es sey ABC = DCE, ACB = DEC, folglich auch BAC = CDE; auch sey CE der BC gerade fort angesetzt. Da (1, 17. S.) ABC + ACB < 2 R., aber ACB = DEC: so ist ABC + DEC < 2 R., folglich treffen (1, 11. G.) BA und ED genugsam verlängert an dieser Seite in F zusammen. Da ABC = DCE, so ist (1, 28. S.) CD mit BF parallel, und da ACB = DEC, so ist auch AC mit FE parallel, demnach ACDF ein Parallelogramm, folglich (1, 34. S.) AF = CD, und FD = AC.

Da im △ BFE, AC mit FE parallel, so ist (6, 2. S.) BA : AF = BC : CE, aber AF = CD, folglich (5, 9. und 11. S.) BA : CD = BC : CE, folglich (5, 16. S.) **verwechselt** BA : BC = CD : CE.

Da im △ EBF, CD mit BF parallel, so ist (6, 2. S.) BC : CE = FD : DE, aber FD = AC, folglich (5, 9. und 11. S.) BC : CE = AC : ED, folglich (5, 16. S.) **verwechselt** BC : CA = CE : ED.

Wird diese Proportion mit der vorhergehenden BA : BC = CD : CE verglichen, so ist (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** BA : AC = CD : DE.

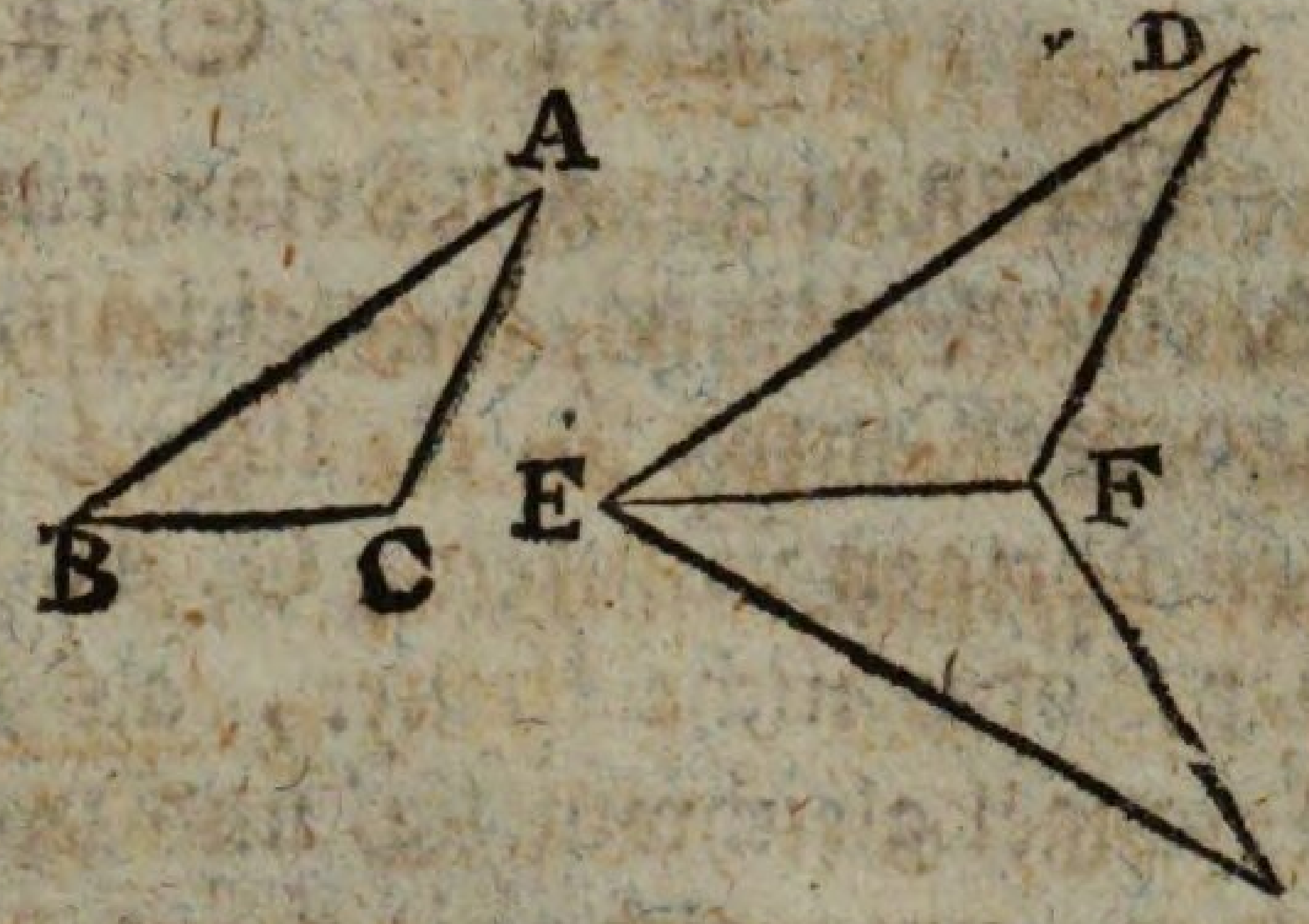
Der 5. Satz. Lehrsatz.

Triangel, ABC, DEF, welche proportionirte Seiten haben, sind gleichwinklig; und zwar diejenigen Winkel gleich, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.

Es sey AB : BC = DE : EF; BC : CA = EF : FD; folglich auch AB : CA = DE : FD.

Legt man (1, 23. S.) an die Endpunkte der Seite EF die Winkel FEG = ABC, und EFG = ACB: so ist (1, 32. S.) auch BAC = EGF. Demnach sind die Triangel ABC,

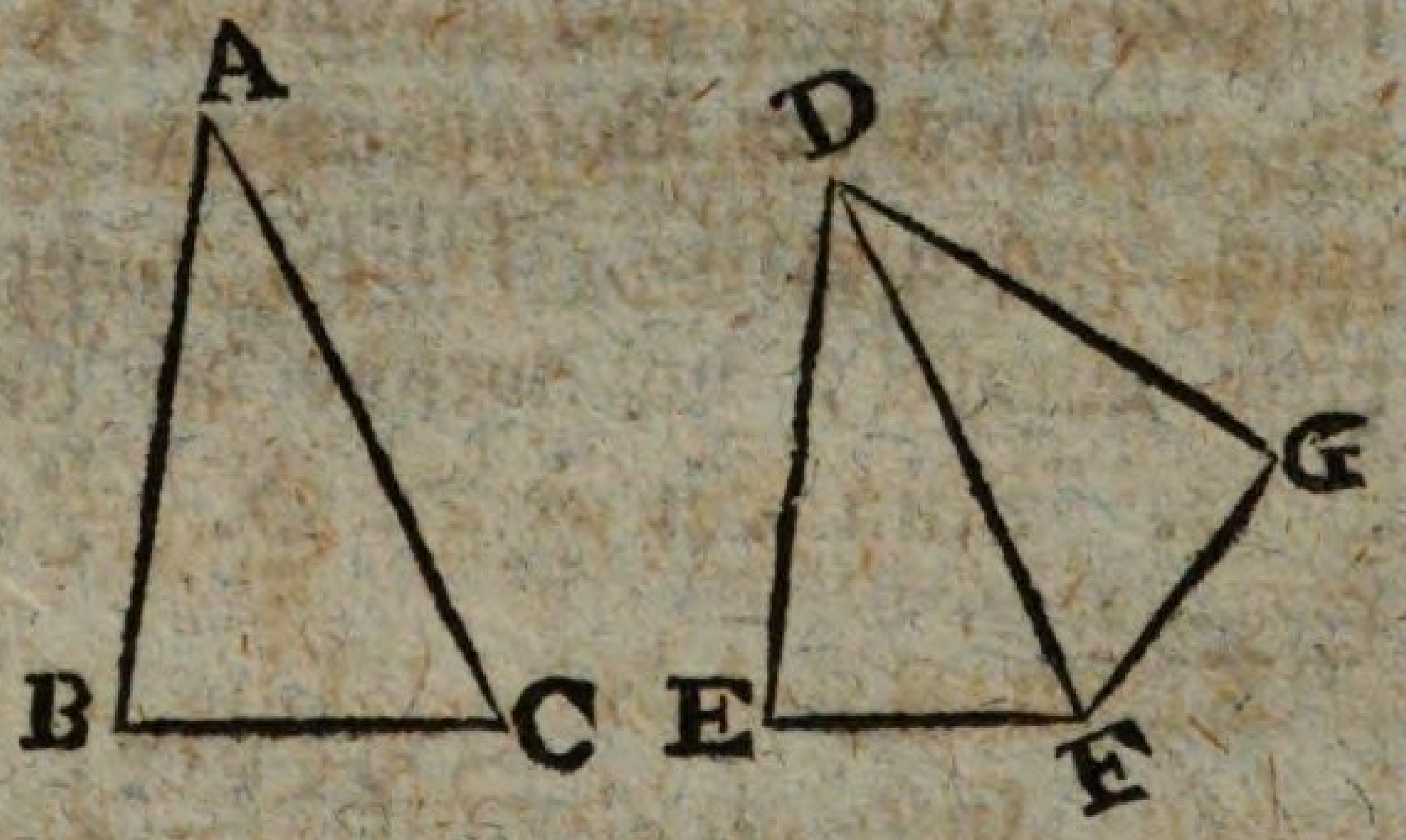
ABC, GEF, gleichwinklig; folglich ist (6, 4. S.) AB:BC = GE:EF. Nun ist angenommen, AB:BC = DE:EF. Folglich ist (5, 11. S.) DE:EF = GE:EF, folglich (5, 9. S.) DE = GE. Nun ist aus eben den Gründen DF = FG, aber EF gemein. Folglich ist (1, 8. S.) DEF = FEG = ABC; DFE = EFG = ACB; EDF = EGF = BAC. Demnach sind die den gleichnamigen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.



Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, die Seiten aber, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt sind, BA:AC = ED:DF: so sind die Triangel gleichwinklig; und zwar diejenigen Winkel gleich, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.

Legt man (1, 23. S.) an die Endpunkte der Seite DF, die Winkel FDG = A = EDF, und DFG = C, daß also (1, 32. S.) auch G = B: so ist (6, 4. S.) BA:AC = GD:DF. Nun ist angenommen BA:AC = ED:DF. Folglich ist (5, 11. S.) ED:DF = GD:DF, folglich (5, 9. S.) ED = GD. Nun ist DF gemein, und EDF = FDG = A. Folglich ist (1, 4. S.) auch DFE = DFG = C, und DEF = G = B. Demnach sind die den gleichnamigen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.

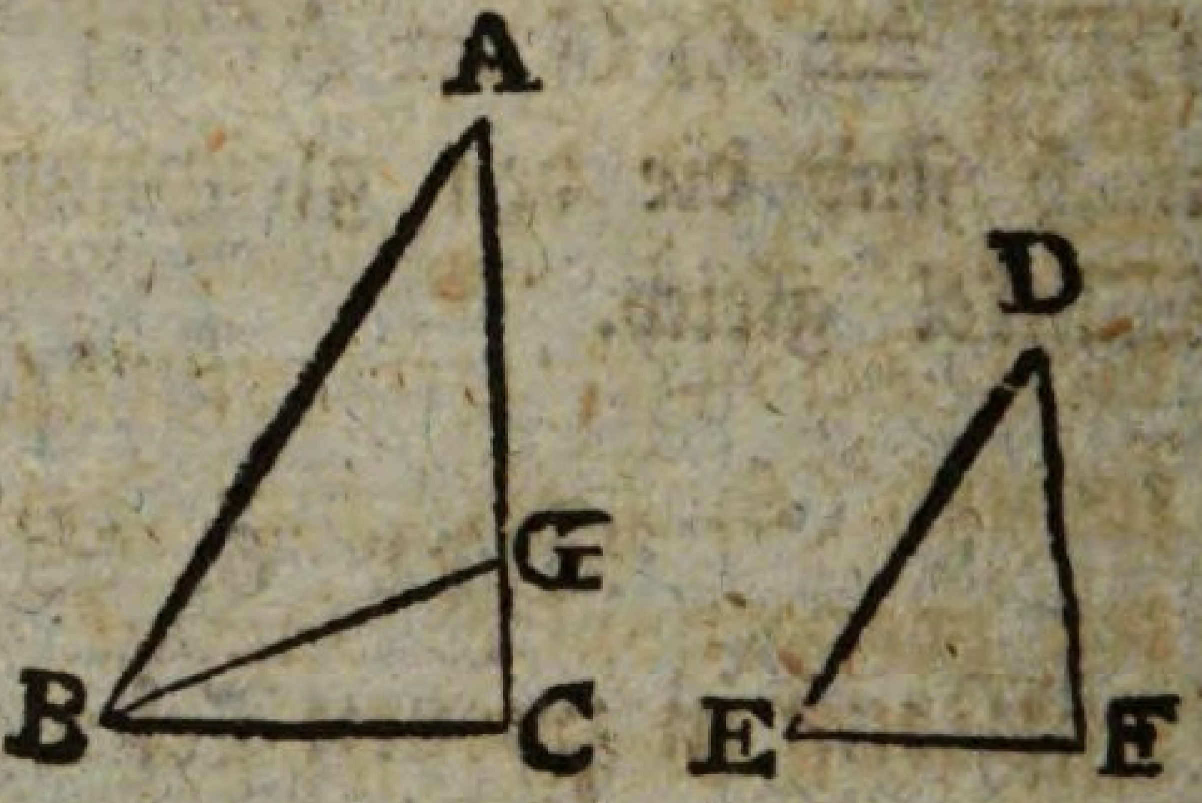


Der

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, A, einem Winkel, D, gleich ist, die Seiten aber, welche um andere Winkel, B, E, liegen, proportionirt sind, und von den übrigen Winkeln, C, F, jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein rechter ist: so sind die Triangel gleichwinklig, und zwar diejenigen Winkel, B, E, gleich, um welche die proportionirten Seiten liegen.

Erster Fall.



Es sey jeder der Winkel, C, F, kleiner als ein rechter. Wären nun ABC, DEF, ungleich, etwa ABC > DEF: so setze man an B (1, 23. S.) ABG = DEF; daher, weil A = D, (1, 32. S.) auch AGB = F. Folglich ist (6, 4. S.) AB : BG = DE : EF. Nun ist angenommen, AB : BC = DE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) AB : BC = AB : BG, folglich (5, 9. S.) BC = BG, folglich ist (1, 5. S.) BGC = C; folglich nach der Voraussetzung BGC < R., folglich (1, 13. S.) AGB > R., folglich nach Obigem F > R., welches der Voraussetzung F < R. widerspricht. Demnach können ABC, DEF, nicht ungleich seyn, folglich sind diese Winkel, um welche die proportionirten Seiten liegen, gleich. Nun war A = D. Folglich ist (1, 32. S.) auch C = F.

Zweyter Fall.

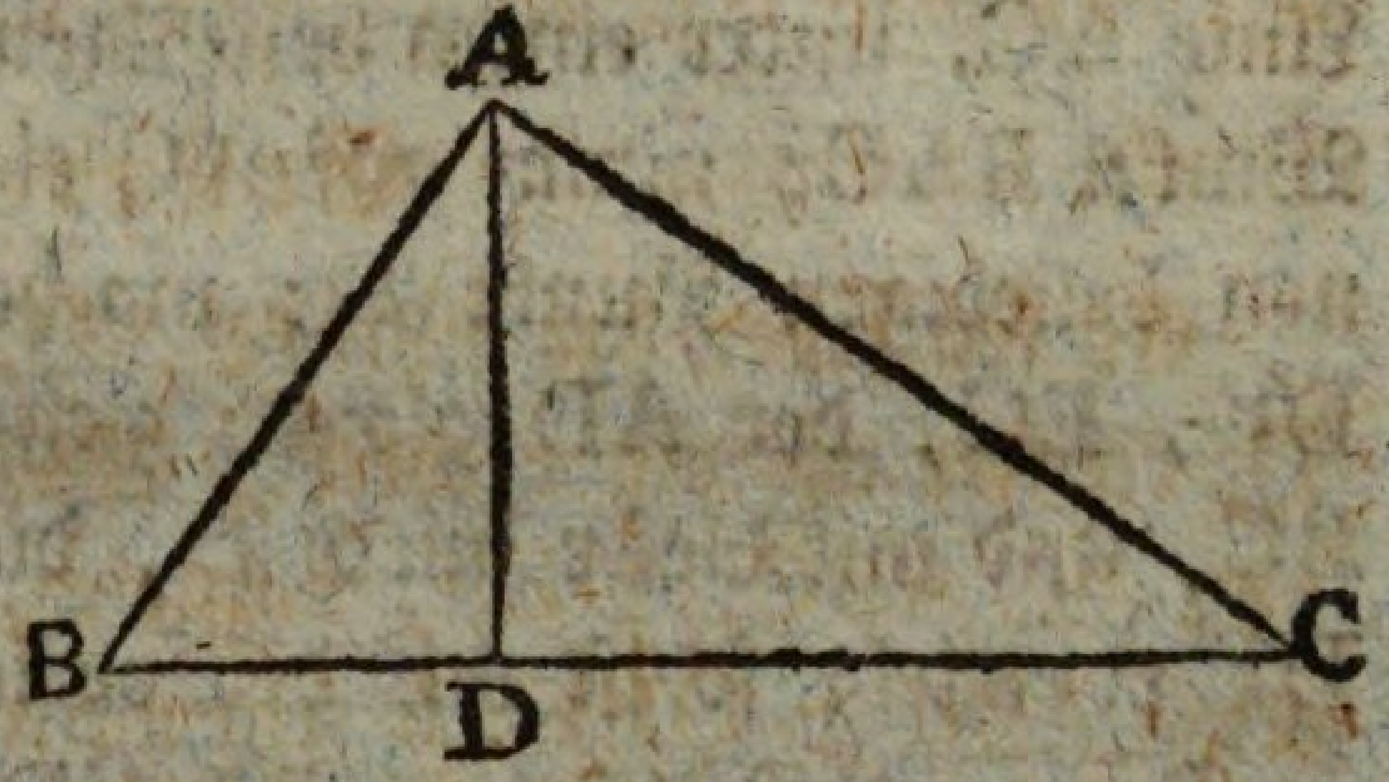
Es sey jeder der Winkel C, F, nicht kleiner, als ein rechter: so wird, wenn man ABC, DEF, als ungleich annimmt, wie im ersten Falle bewiesen, daß BGC = C, daher nach jetziger Voraussetzung BGC nicht < R., folglich im △ BGC, G + C nicht < 2 R., welches dem (1, 17. S.) widerspricht. Demnach können auch hier ABC, DEF, nicht ungleich seyn. Die übrigen Schlüsse sind wie beym ersten Falle.

Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wird in einem rechtwinkligen Triangel, ABC, vom rechten Winkel, A, auf die gegenüberliegende Seite, BC, ein Perpendikel, AD, gefällt: so sind die Triangel am Perpendikel, ABD, ADC, dem ganzen Triangel, ABC, und einander ähnlich.

Erster Theil.



Da in den Triangeln ABC, ABD, der rechte Winkel BAC = ADB, und B gemein: so ist (1, 32. S.) auch ACB = BAD. Demnach sind diese Triangel gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) △ ABD ∾ △ ABC. Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch ABC = CAD, und △ ACD ∾ △ ABC.

Zweyter Theil.

Da in den Triangeln ABD, ADC, bey D rechte Winkel, und nach Obigem BAD = ACB, CAD = ABC, also die Triangel gleichwinklig: so sind (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) △ ABD ∾ △ ADC.

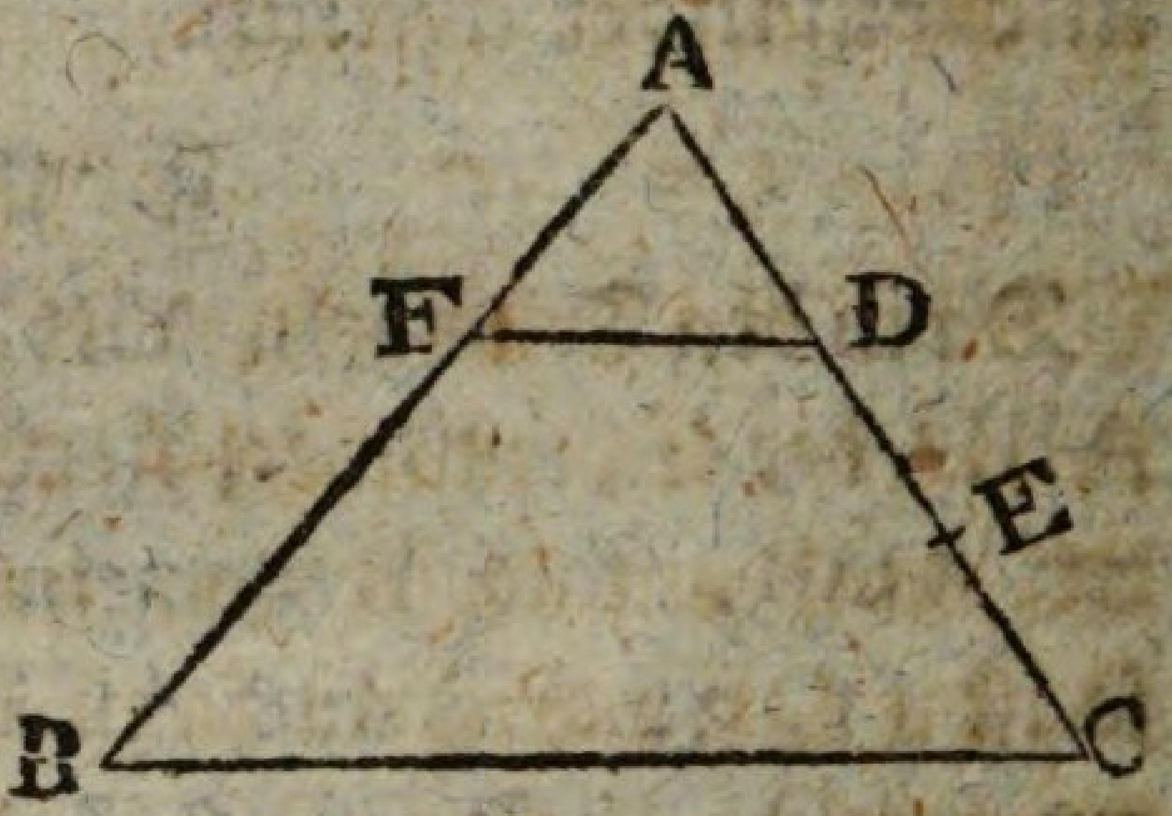
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß der vom rechten Winkel auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten der Grundlinie sey; und daß die an einem der Abschnitte der Grundlinie liegende Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und solchem Abschnitte sey. Denn wegen Aehnlichkeit der Triangel ABD, ADC, und Gleichheit der Winkel BDA, ADC, ist BD : DA = AD : DC; und wgen Aehnlichkeit der Triangel ABC, ABD, und des gemeinschaftlichen Winkels B, ist BC : BA = BA : BD; endlich wegen Aehnlichkeit der Triangel ABC, ACD,

ACD, und des gemeinschaftlichen Winkels C, ist BC:CA = AC : CD.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie, AB, einen verlangten Theil abzuschneiden.

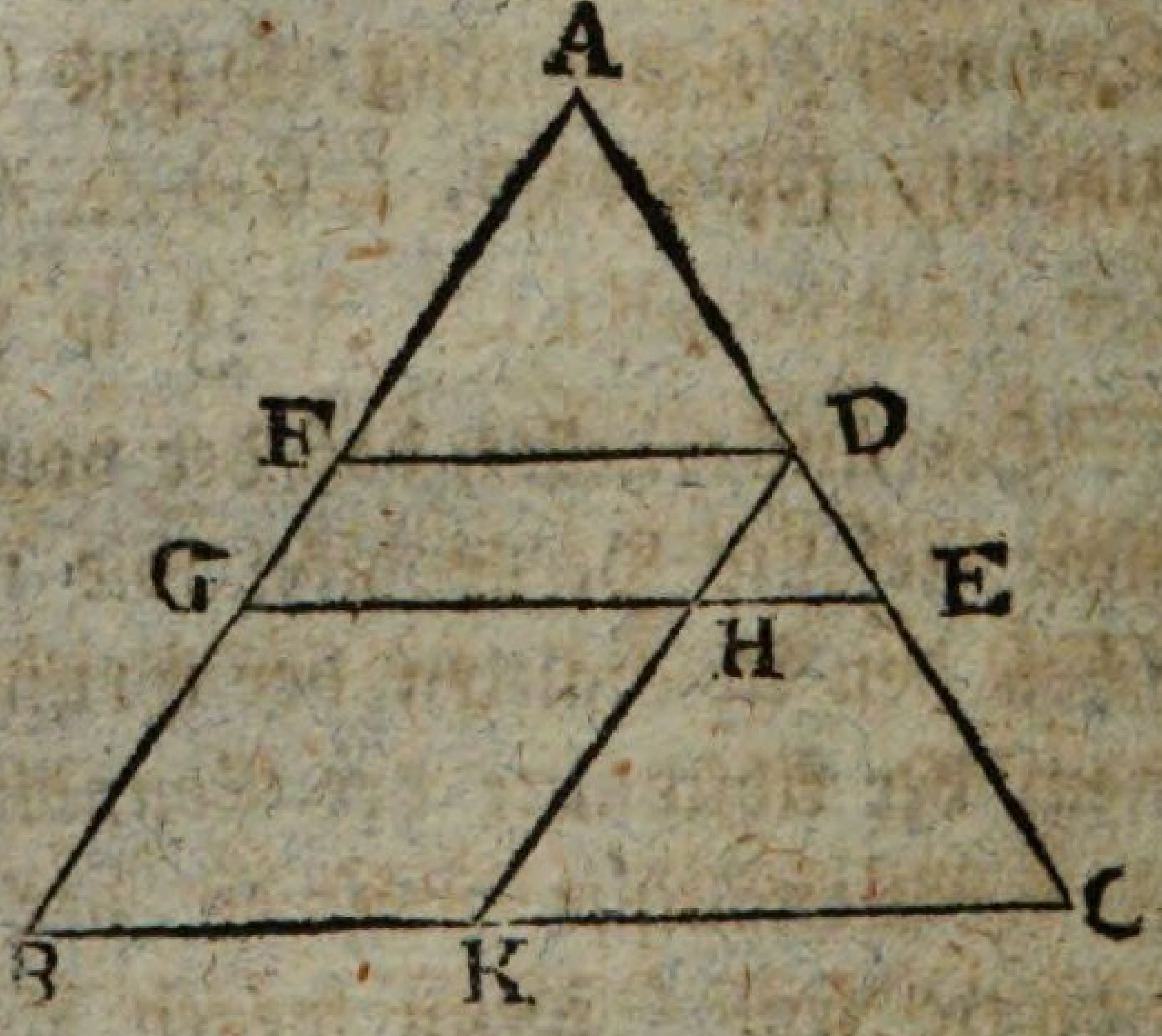


Es werde der dritte Theil verlangt. Ziehe aus A eine gerade Linie AC, unter einem beliebigen Winkel BAC; nimm auf AC einen beliebigen Punkt D; mache DE, EC, der AD gleich; ziehe BC, und mit dieser durch D, die DF parallel: so ist AF der verlangte Theil.

Denn es ist (6, 2. S.) CD:DA = BF:FA. Nun ist CD = 2 DA. Folglich ist auch BF = 2 FA, folglich BA = 3 FA.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene ungetheilte gerade Linie, AB, einer andern getheilten, AC, ähnlich einzutheilen.



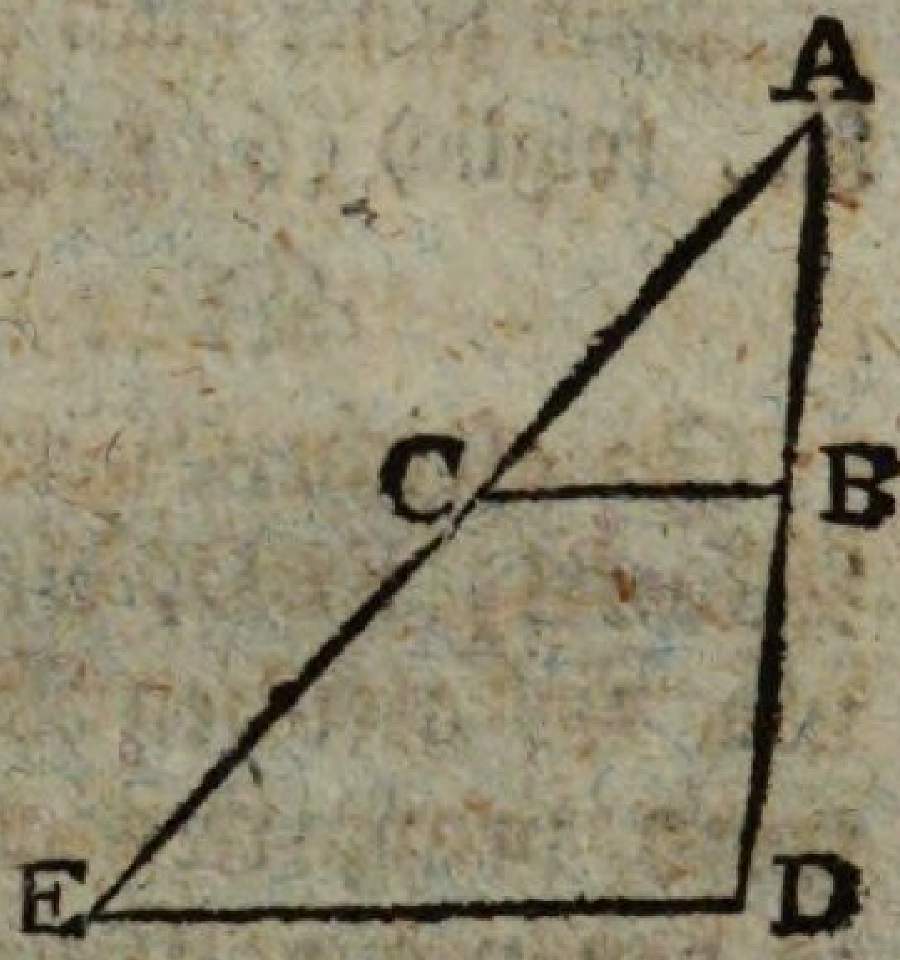
Es sey AC in D, E, getheilt, und an AB unter dem beliebigen Winkel BAC gelegt. Ziehe BC, und (1, 31. S.) durch D, E, die DF, EG, mit BC parallel: so sind F, G, die gesuchten Theilungspunkte.

Denn ziehet man noch durch D die DK mit AB parallel, so sind FH, HB, Parallelogramme, und daher (1, 34. S.) DH = FG, HK = GB, aber (6, 2. S.) im △ DKC, CE:ED = KH:HD, folglich CE:ED = BG:GF, auch (6, 2. S.) im △ AGE, ED:DA = GF:FA. Demnach

nach sind die Abschnitte BG, GF, FA, mit CE, ED, DA, proportionirt.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Zu zwey gegebenen geraden Linien, AB, AC, die dritte Proportionallinie zu finden.

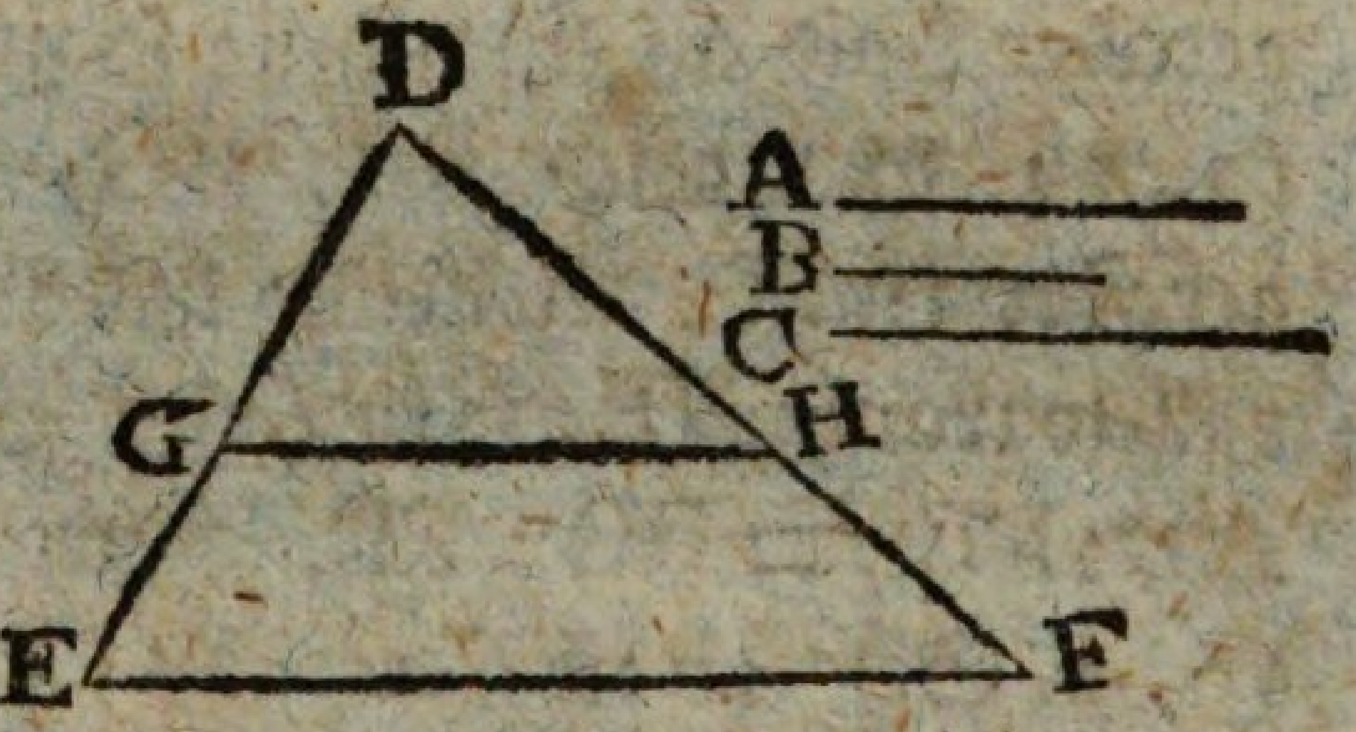


Lege AB, AC, unter dem beliebigen Winkel BAC an einander, verlängere sie bis D, E, mache BD = AC, ziehe BC, und mit dieser (1, 31. S.) durch D, die DE parallel: so ist CE die dritte Proportionallinie.

Denn es ist (6, 2. S.) AB : BD = AC : CE, aber BD = AC, folglich AB : AC = AC : CE.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Zu drey gegebenen geraden Linien, A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden.

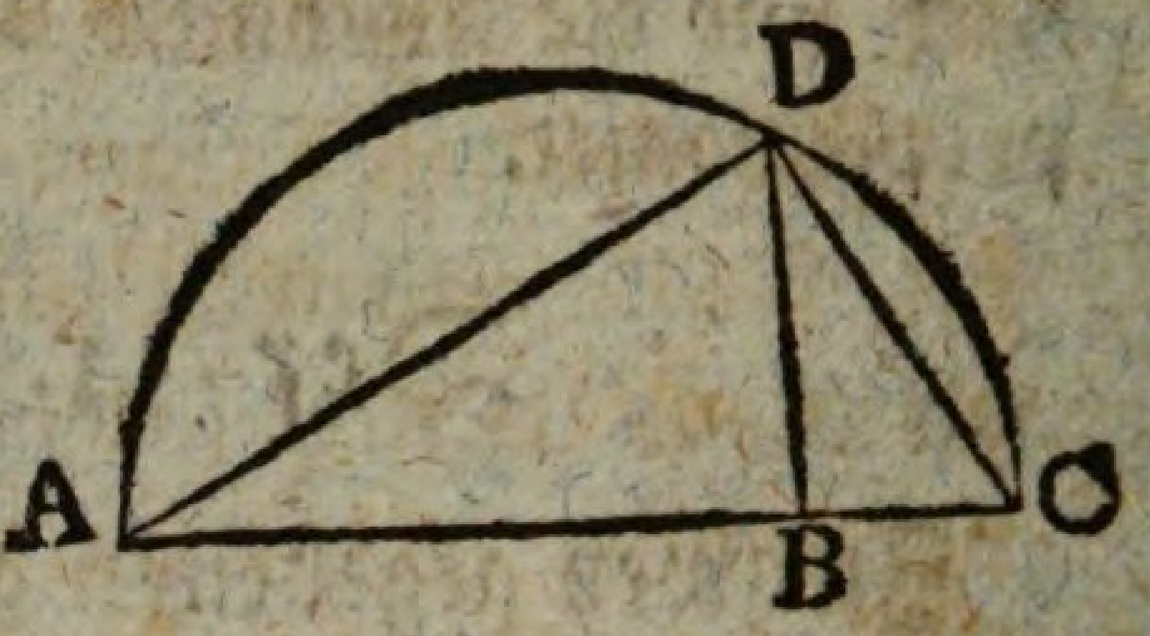


Lege zwey gerade Linien DE, DF, unter dem beliebigen Winkel EDF an einander, mache DG = A, GE = B, DH = C; ziehe GH, und mit dieser (1, 31. S.) durch E die EF parallel: so ist HF die vierte Proportionallinie.

Denn es ist (6, 2. S.) DG : GE = DH : HF, folglich nach Obigem A : B = C : HF.

Der 13. Satz. Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen geraden Linien, AB, BC, die mittlere Proportionallinie zu finden.



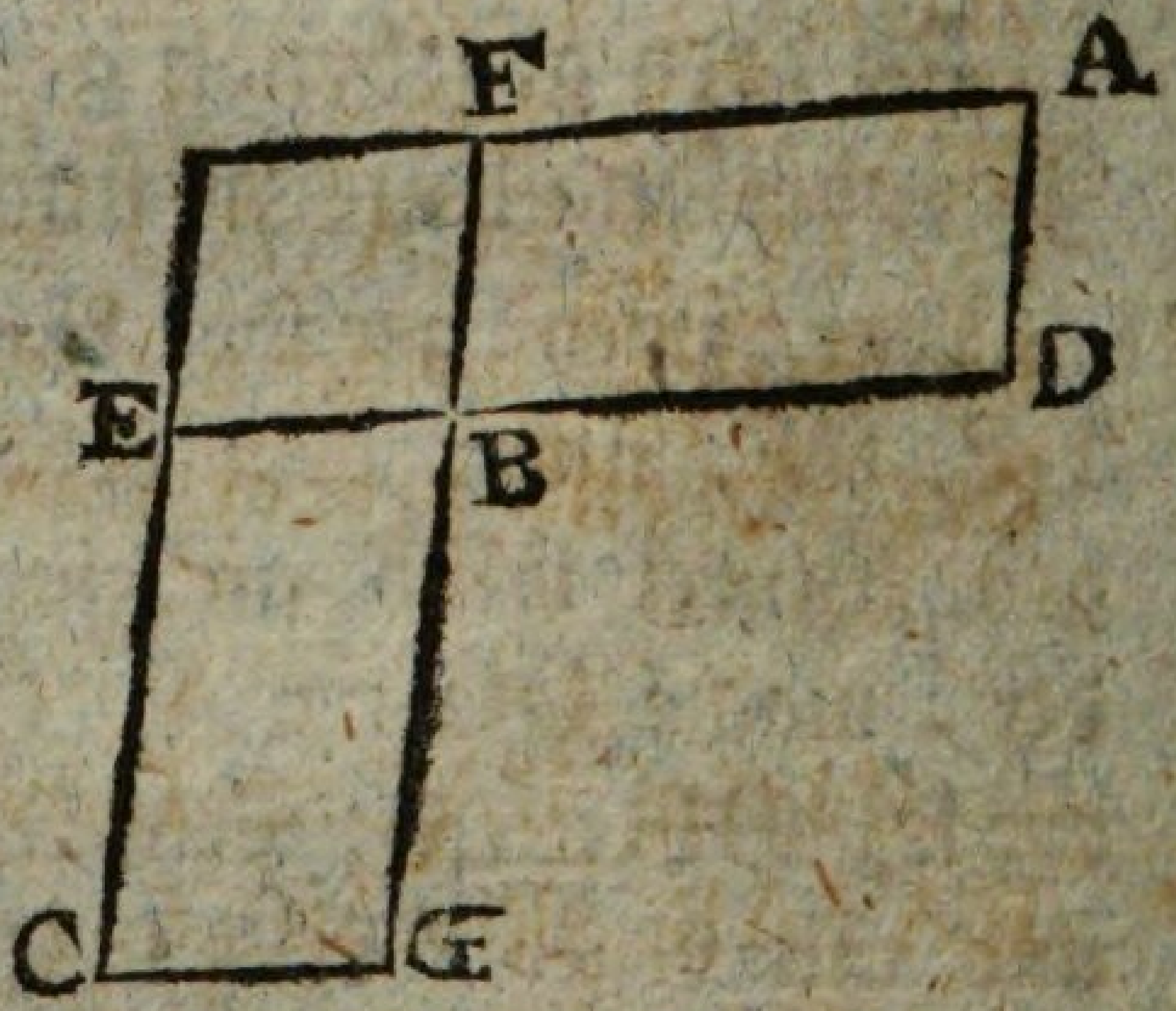
Setze der AB die BC gerade fort an, beschreibe über AC den Halbkreis ADC, und errichte (1, 11. S.) auf AC in B den Perpendikel BD: so ist dieser die mittlere Proportionallinie.

Denn ziehet man AD, DC: so ist (3, 31. S.) ADC = R., folglich (6, 8. Zus.) AB:BD = BD:BC.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Parallelogrammen, AB, BC, in denen ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt. Und Parallelogramme, AB, BC, in denen ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt sind, sind gleich.

Erster Theil.



Es sey AB = BC, und FBD = EBG. Lege DB, BE, in gerader Linie an einander: so sind (1, 14. S.) auch FB, BG, in gerader Linie. Vollende das Parallelogramm FE: so ist (5, 7. S.) AB:FE = BC:FE. Nun ist (6, 1. S.) AB:FE = DB:BE, und BC:FE = GB:BF. Folglich ist (5, 11. S.) DB:BE = GB:BF. Demnach sind (6, 2. E.) die Seiten, welche um die gleichen Winkel bey B liegen, **wiederkehrend** proportionirt.

Zweyter Theil.

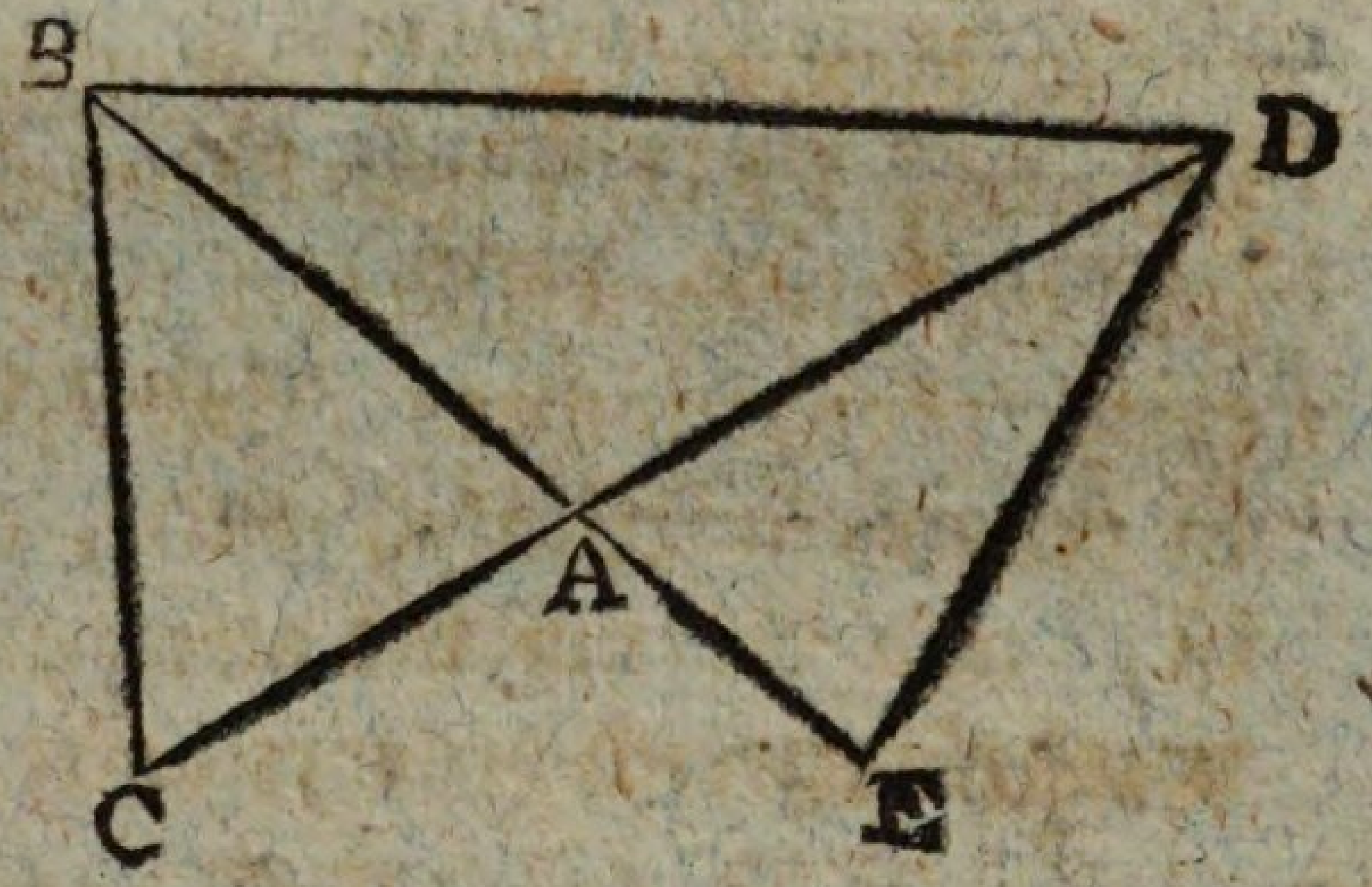
Es sey FBD = EBG, und (6, 2. E.) DB:BE = GB:BF. Nun ist (6, 1. S.) DB:BE = AB:FE, und GB:BF = BC:FE. Folglich ist (5, 11. S.) AB:FE = BC:FE, folglich (5, 9. S.) AB = BC.

Der

Der 15. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Triangeln, ABC, ADE, in denen ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt. Und Triangel, ABC, ADE, in denen ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt sind, sind gleich.

Erster Theil.



Es sey △ ABC = △ ADE, und BAC = DAE. Lege CA, AD, in gerader Linie an einander: so sind (1, 14. S.) auch EA, AB, in gerader Linie. Ziehe BD: so ist (5, 7. S.) △ ABC: △ ABD = △ ADE: △ ABD. Nun ist (6, 1. S.) △ ABC: △ ABD = CA: AD, und △ ADE: △ ABD = EA: AB. Folglich ist (5, 11. S.) CA: AD = EA: AB. Demnach sind (6, 2 E.) die Seiten, welche um die gleichen Winkel bey A liegen, **wiederkehrend** proportionirt.

Zweyter Theil.

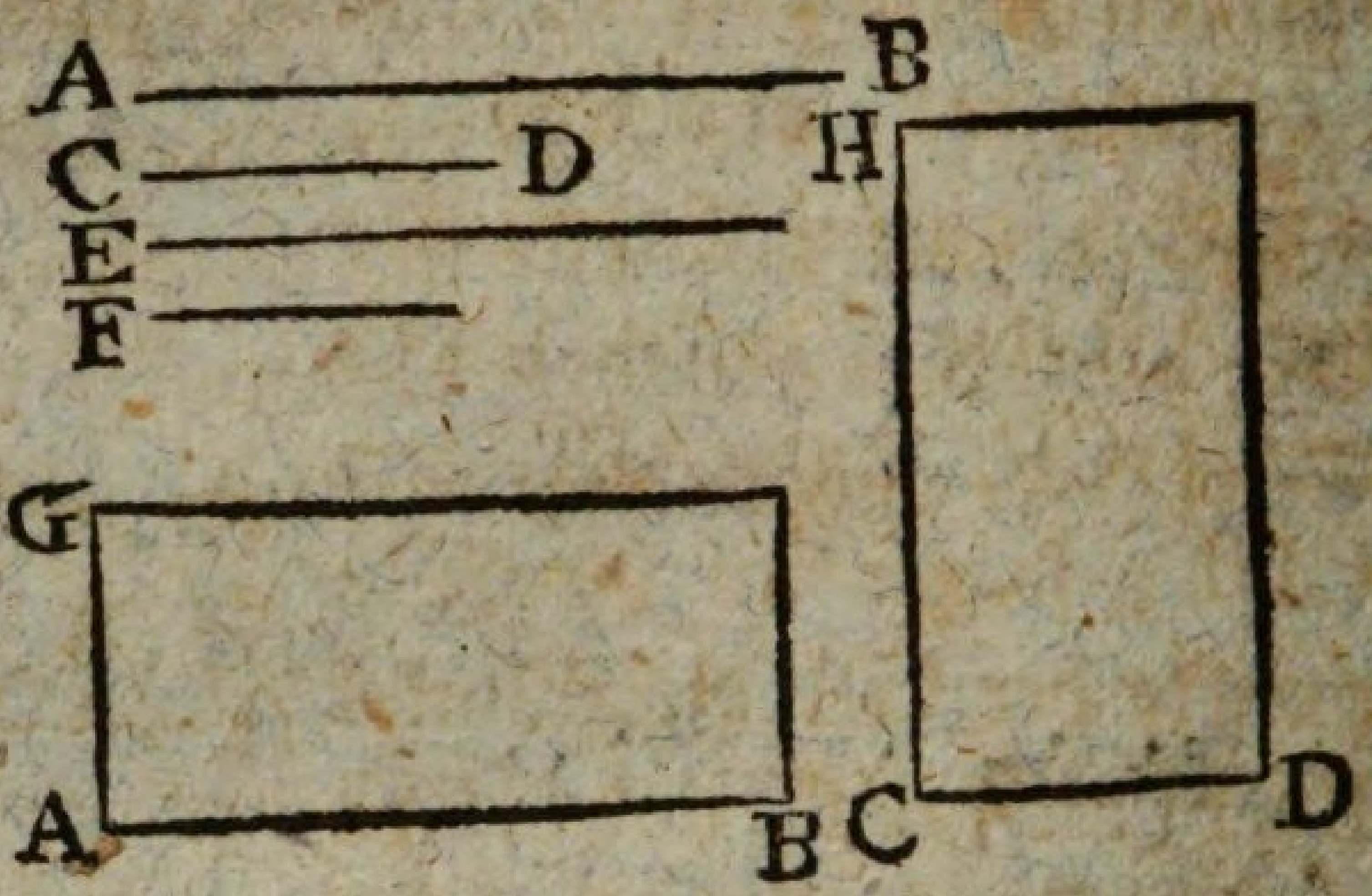
Es sey BAC = DAE, und (6, 2. E.) CA: AD = EA: AB. Nun ist (6, 1. S.) CA: AD = △ ABC: △ ABD, und EA: AB = △ ADE: △ ABD. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC: △ ABD = △ ADE: △ ABD, folglich (5, 9. S.) △ ABC = △ ADE.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, AB, CD, E, F, proportionirt: so ist das unter den äußern, AB, F, enthaltene Rectangel, dem unter den mittlern, CD, E, enthaltenen, gleich. Und ist das unter den äußern, AB, F, enthaltene Rectangel, dem unter den mittlern, CD, E, enthaltenen, gleich: so

so sind die vier geraden Linien, AB, CD, E, F, proportionirt.

Erster Theil.



Es sey AB:CD = E:F. Errichte (1, 11. S.) auf AB, CD, in A, C, die Perpendikel AG, CH; mache AG = F, CH = E, und vollende die Parallelogramme BG, DH: so ist nach der Voraussetzung und (5, 7. S.) AB:CD = CH:AG, folglich (6, 14. S.) BG = DH, oder AB × F = CD × E.

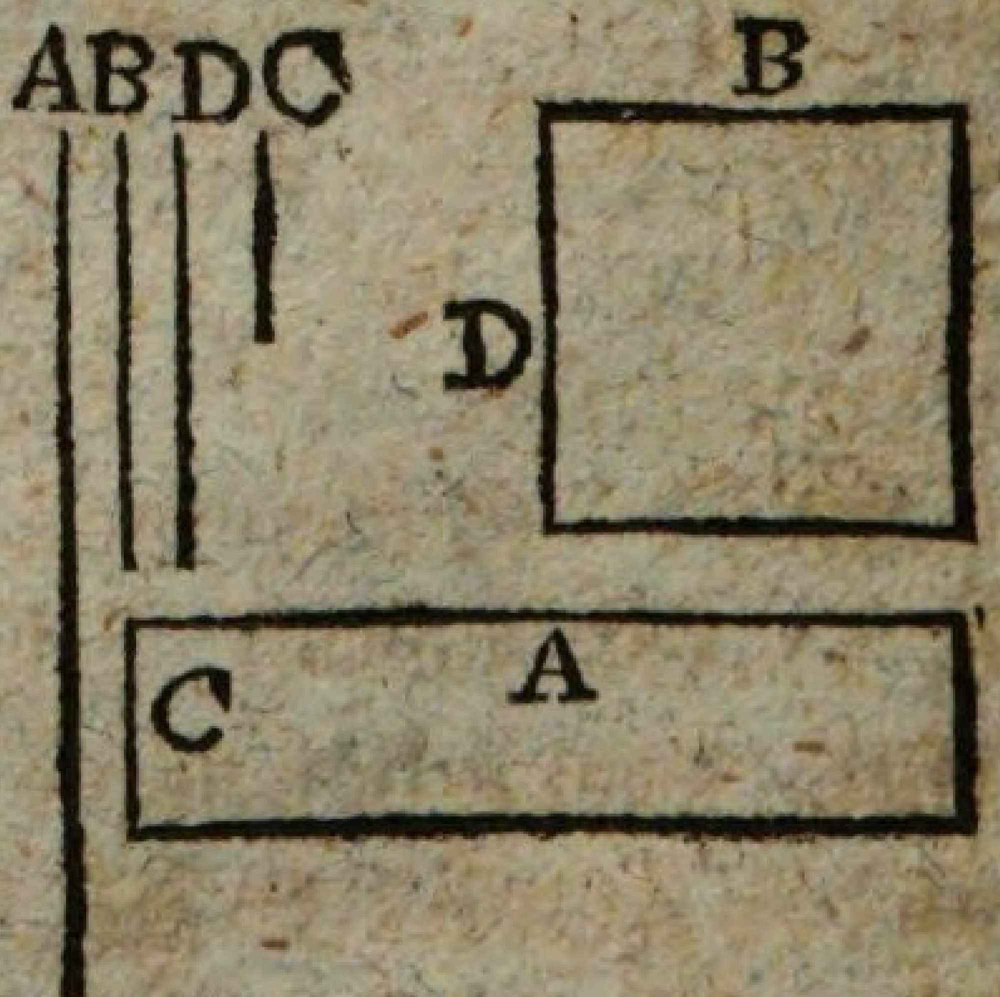
Zweyter Theil.

Es sey AB × F = CD × E, oder nach Obigem, BG = DH: so ist (6, 14. S.) AB:CD = CH:AG, oder AB:CD = E:F.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Sind drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt: so ist das unter den äußern, A, C, enthaltene Rectangel, dem Quadrate der mittlern, B, gleich. Und ist das unter den äußern, A, C, enthaltene Rectangel dem Quadrate der mittlern, B, gleich: so sind die drey geraden Linien, A, B, C, proportionirt.

Erster Theil.



Es sey A:B = B:C. Setze D = B: so ist A:B = D:C, folglich (6, 16. S.) A × C = B × D, oder A × C = □B.

Zweyter Theil.

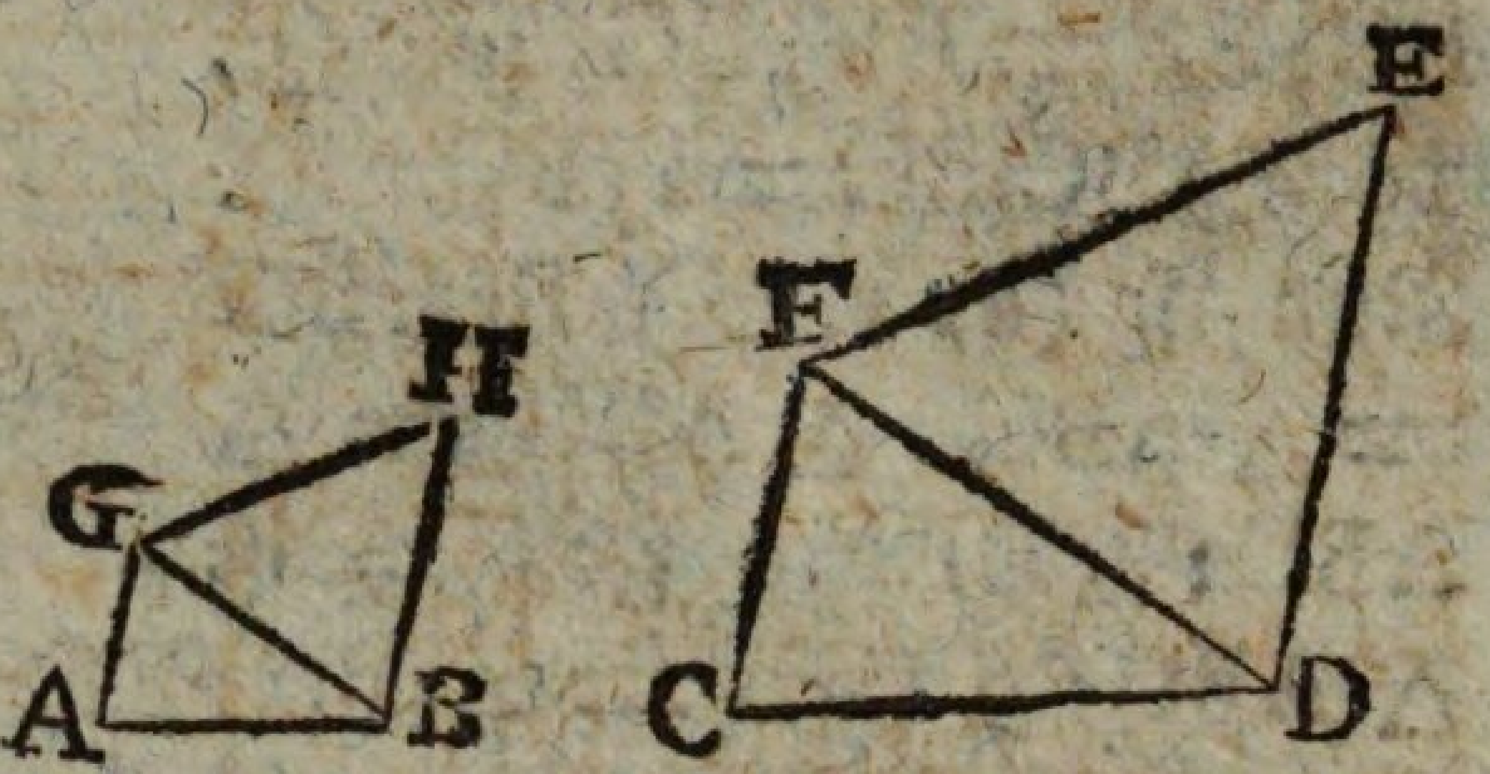
Es sey A × C = □B = B × D: so ist (6, 16. S.) A:B = D:C, oder A:B = B:C.

Der

Der 18. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen geradlinigen Figur, CE, ähnlich und ähnlich liegend sey.

Ziehe DF, und setze (1, 23. S.) an die Endpunkte der AB die Winkel BAG = DCF, und ABG = CDF; ferner an die Endpunkte der GB die Winkel BGH = DFE, und GBH = FDE: so ist AH ∾ CE.

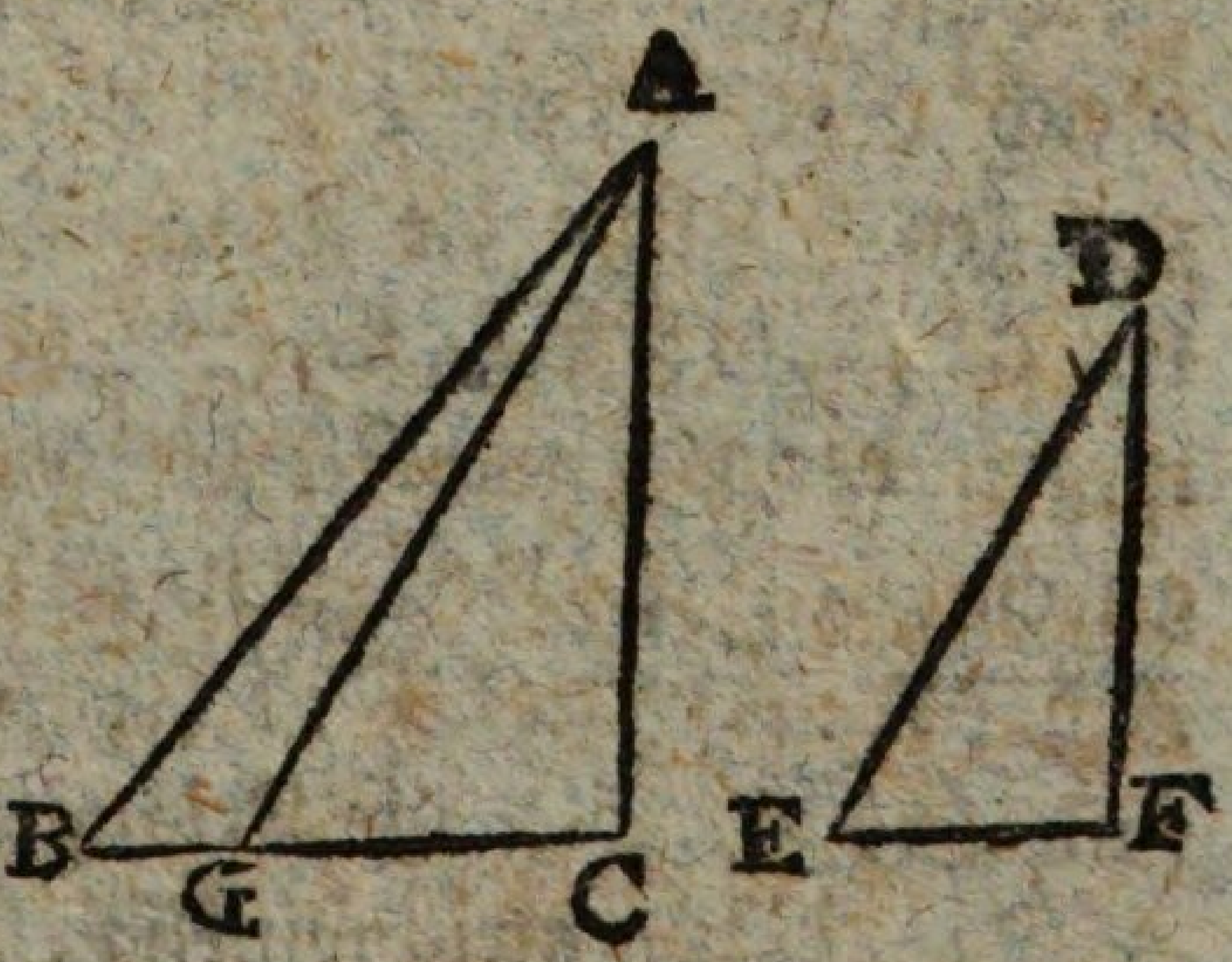


Denn nach Obigem ist (1, 32. S.) AGB = CFD, und GHB = FED; ferner AGB + BGH = DFD + DFE, oder AGH = CFE; desgleichen ABG + GBH = CDF + FDE, oder ABH = CDE. Demnach sind die Figuren AH, CE, gleichwinklig. Nun ist auch nach Obigem, und (6, 4. S.) BG : DF = GA : FC = AB : CD, und BG : DF = BH : DE = HG : EF, also (5, 11. S.) GA : FC = AB : CD = BH : DE = HG : EF. Folglich ist (6, 1. E.) AH ∾ CE.

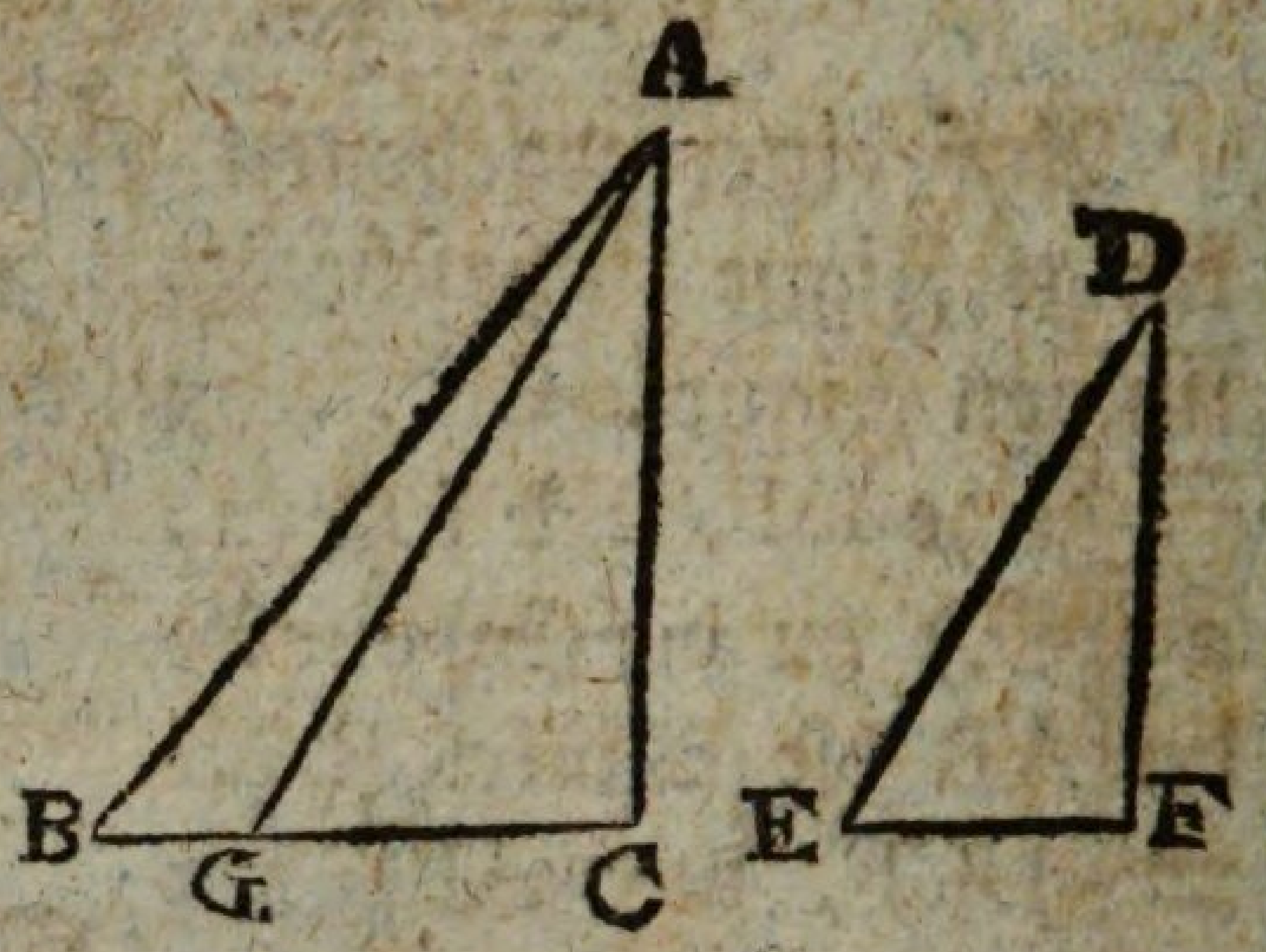
Der 19. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß ähnlicher Triangel, ABC, DEF, ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Es sey ABC = DEF, daß also AB : BC = DE : EF, folglich BC, EF, gleichnamige Seiten sind; und (5, 16. S.) **verwechselt** AB : DE = BC : EF. Sucht man nun (6, 11. S.) zu BC, EF, die dritte Proportionallinie BG, daß also BC : EF = EF : BG;



so ist (5, 11. S.) AB : DE = EF : BG; folglich, wenn man AG zieht, (6, 15. S.) △ABG = △DEF. Ferner ist, aus BC : EF = EF : BG, und (5, 10. E.) BC:BG = 2 (BC:EF). Nun ist (6, 1. S.) BC : BG = △ABC : △ABG = △ABC : △DEF. Folglich ist △ABC : △DEF = 2 (BC : EF).



Zusatz.

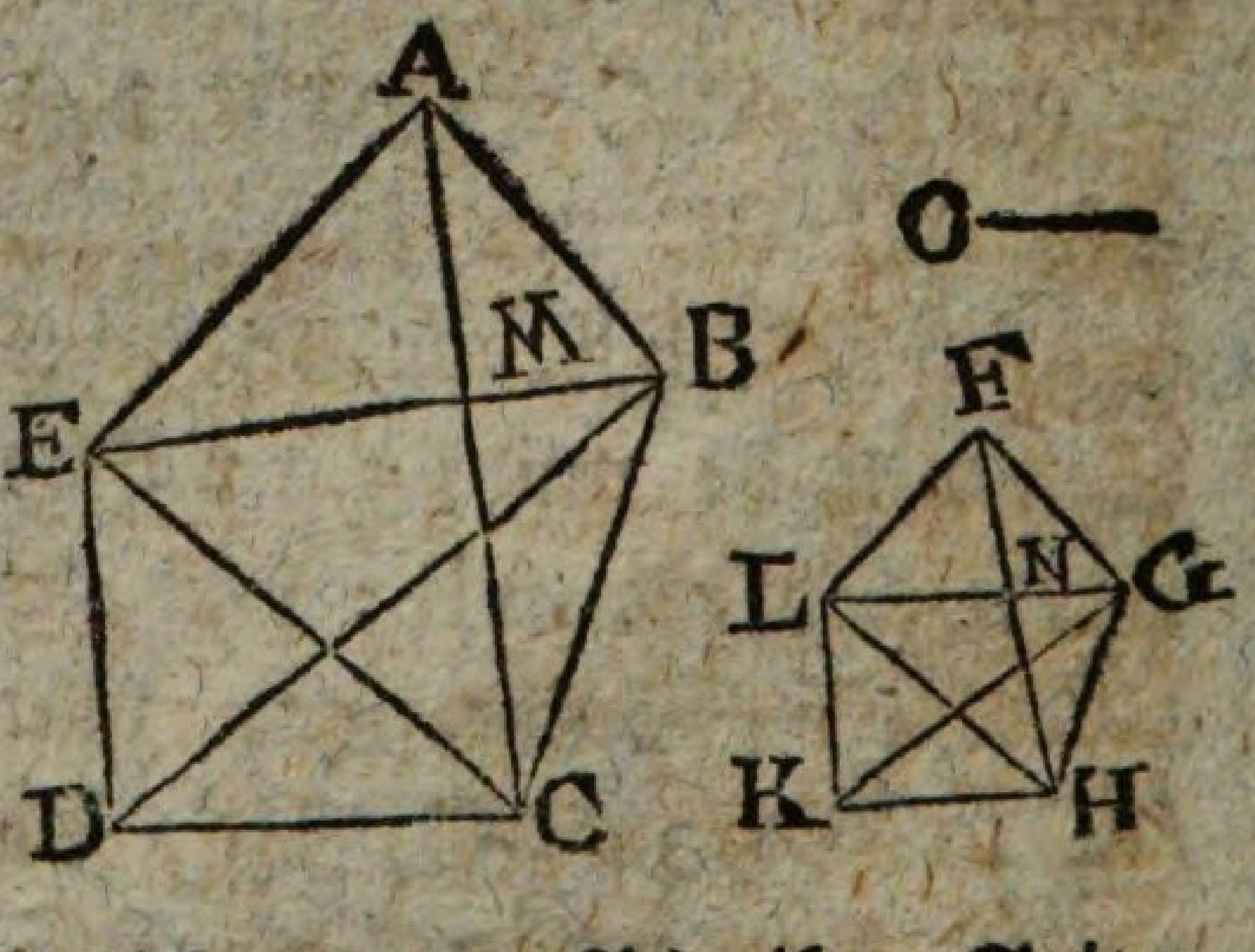
Hieraus erhellet, daß, wenn drey gerade Linien BC, EF, BG, proportionirt sind, sich die erste zur dritten verhalte, wie der Triangel auf der ersten zu dem ihm ähnlichen, und ähnlich liegenden Triangel auf der zweyten; weil bewiesen worden, daß BC : BG = △ABC : △DEF.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche vielseitige Figuren, ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche, und den ganzen Figuren gleichnamige, Triangel zerlegen. Auch ist die Verhältniß ähnlicher vielseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Erster Theil.

Diese Figuren lassen sich in gleich viele ähnliche Triangel zerlegen. Ziehe die Diagonalen BE, EC; GL, LH. Da, wegen der Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL; so sind (6, 6. S.) die Triangel ABE, FGL, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Demnach



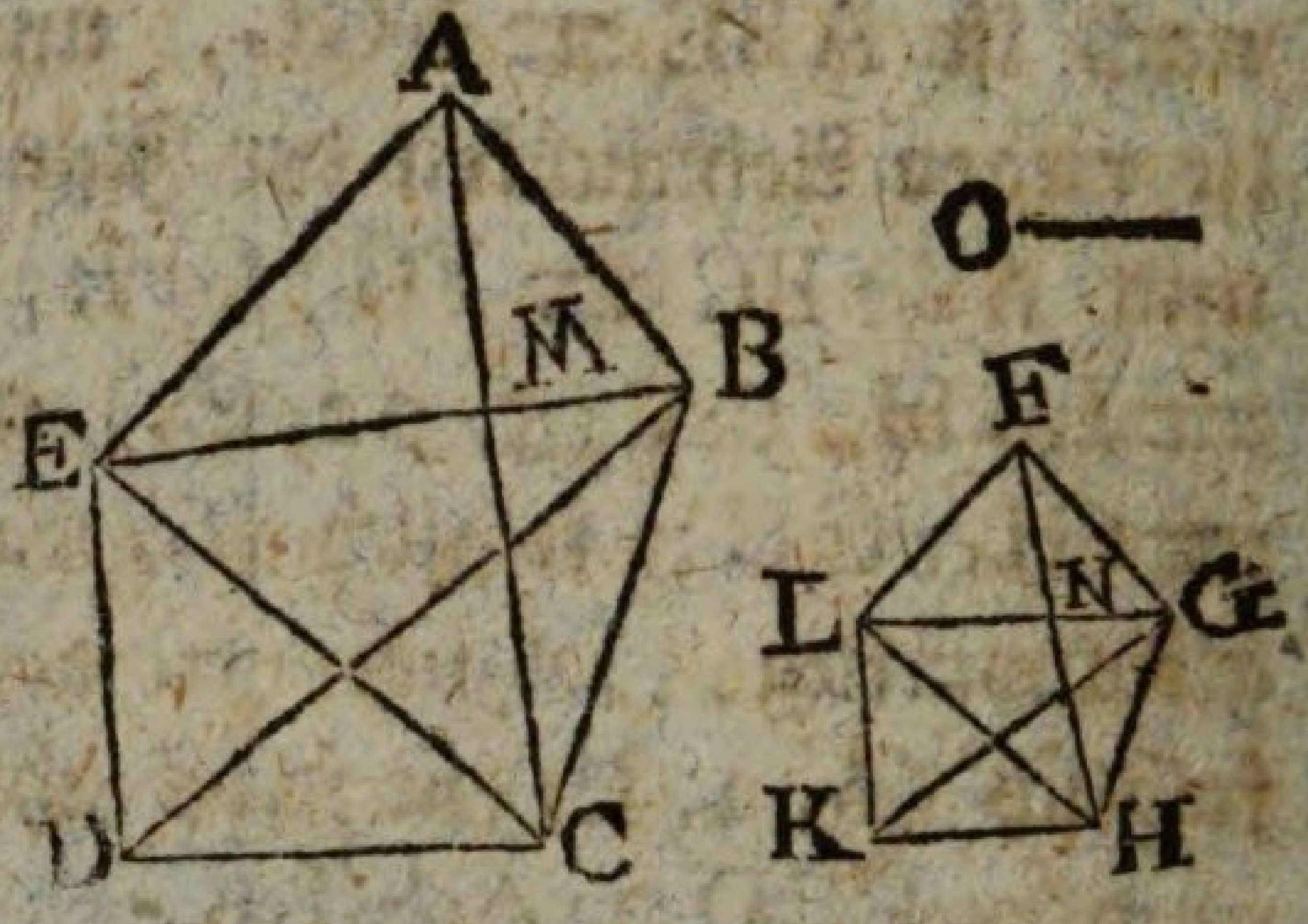
nach ist ABE = FGL, und BE:AB = GL:FG. Nun ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) ABC = FGH, und AB:BC = FG:GH. Folglich ist (1, 3. G.) EBC = LGH, und (5, 22. S.) aus dem Gleichen, BE:BC = GL:GH; folglich (6, 6. S.) die Triangel FBC, LGH, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Aus gleichen Gründen ist auch △ CED ∾ △ HLK.

Zweyter Theil.

Diese ähnlichen Triangel sind den ganzen Figuren proportionirt, und zwar ihnen gleichnamig (ABCDE : FGHKL = △ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH = △ CED : △ HLK), und die Verhältniß der ganzen Figuren ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Ziehe die Diagonalen AC, FH: so ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) ABC = FGH, und AB:BC = FG:GH, folglich (6, 6. S.) BAM = GFN. Nun ist, nach dem ersten Theile, ABM = FGN. Folglich ist (1, 32. S.) auch M = N. Demnach sind die Triangel ABM, FGN, gleichwinklig. Aus gleichen Gründen sind auch die Triangel BCM, GHN, gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) AM : MB = FN : NG, und MB : MC = NG : NH, folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AM : MC = FN : NH. Nun ist (6, 1. S.) AM : MC = △ AMB : △ BMC = △ AME : △ EMC, und daher (5, 12. S.) △ ABE : △ BEC = AM : MC; aber aus gleichen Gründen △ FGL : △ LGH = FN : NH. Folglich (5, 11. S.) △ ABE : △ EBC = △ FGL : △ LGH, oder (5, 16. S.) verwechselt △ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH. Ziehet man nun BD, GK: so ist aus denselben Gründen △ EBC : △ LGH = △ CED : △ HLK. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH = △ CED : △ HLK; folglich (5, 12. S.) ABCDE : FGHKL = △ ABE : FGL. Nun ist (6, 19. S.) △ ABE : △ FGL = 2 (AB : FG). Folglich ist auch ABCDE : FGHKL = 2 (AB : FG).

Andrer Beweis. Da nach dem ersten Theile die Triangel ähnlich sind: so ist (6, 19. S.) △ABE : △FGL = 2 (BE : GL) = △EBC : △LGH; und △EBC : △LGH = 2 (CE : HL) = △ECD : △LHK. Folglich ist (5, 11. S.)



△ABE : △FGL = △EBC : △LGH = △ECD : △LHK; folglich (5, 12. S.) ABCDE : FGHKL = △ABE : △FGL = 2 (AB : FG).

Erster Zusatz.

Da sich auf eben die Art erweisen läßt, daß die Verhältniß ähnlicher vierseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten ist, und eben dasselbe auch (6, 19. S.) von Triangeln erwiesen worden: so ist allgemein die Verhältniß ähnlicher geradliniger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

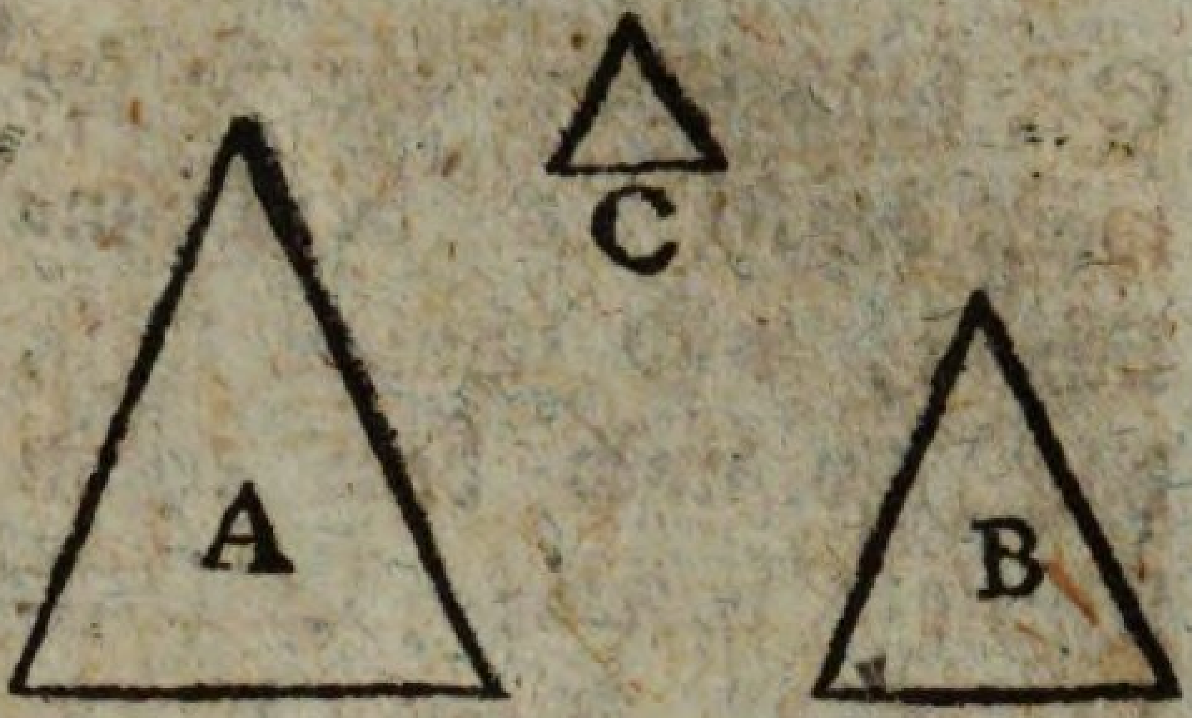
Zwenter Zusatz.

Nimmt man (6, 11. S.) zu AB, FG, die dritte Proportionslinie O: so ist (5, 10. E.) AB : O = 2 (AB : FG). Da aber die Verhältniß einer geradlinigen Figur auf AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf FG, das Zwiefache der Verhältniß der AB zu FG ist, so folgt: daß, wenn drey gerade Linien AB, FG, O, proportionirt sind, die erste AB zur dritten O sich verhalte, wie eine geradlinige Figur auf der ersten AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf der zweyten FG.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die einer und derselben Figur, C, ähnlichen geradlinigen Figuren, A, B, sind auch einander ähnlich.

Da wegen der Aehnlichkeit (6, 1. E.) die Figuren A, C, sowohl, als die Figuren B, C, gleichwinklig, und ihre Seiten,

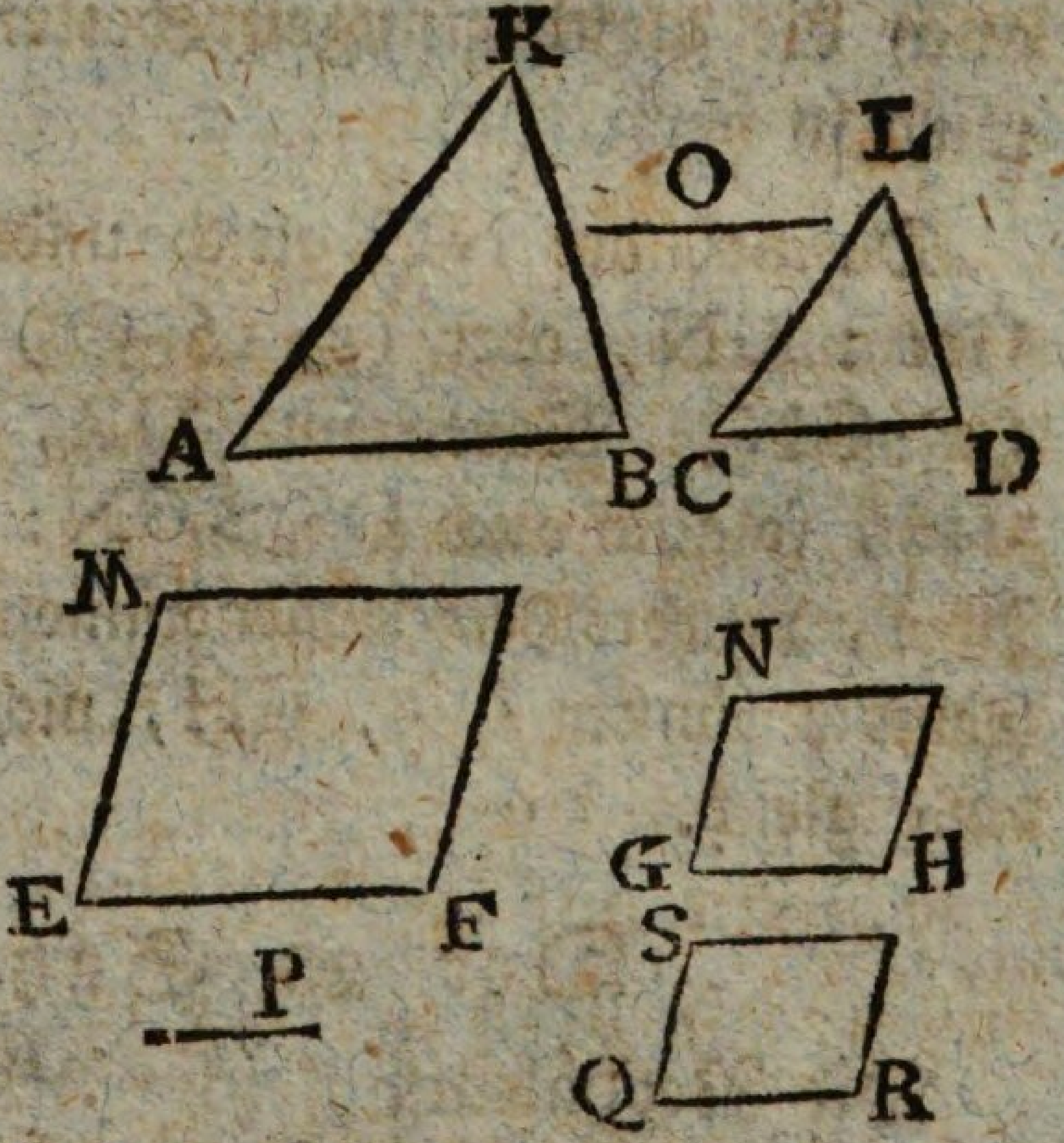


ten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind: so sind auch die Figuren A, B, (1, 1. G.) gleichwinklig, und (5, 11. S.) ihre Seiten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt; folglich (6, 1. E.) die Figuren A, B, einander ähnlich.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind die auf denselben ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, auch proportionirt. Und sind die auf vier geraden Linien, AB, CD, EF, GH, ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, proportionirt: so sind solche vier gerade Linien auch proportionirt.

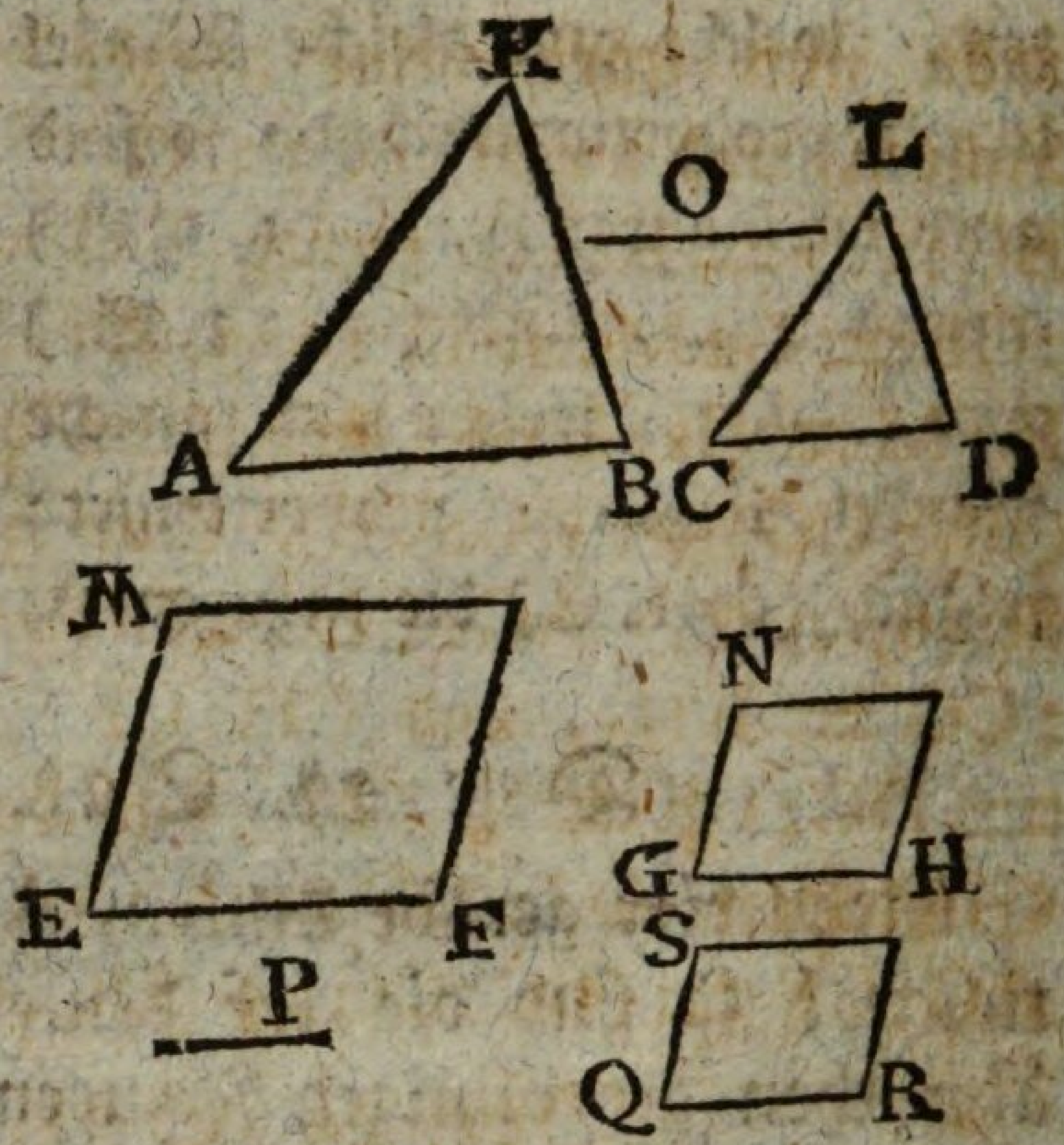
Erster Theil.



Es sey AB : CD = EF : GH. Nun suche man (6, 11. S.) zu AB, CD, die dritte O, und zu EF, GH, die dritte P. Folglich ist (5, 11. S.) CD : O = GH : P, folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** AB : O = EF : P. Nun ist (6, 20. Zus. 2.) AB : O = △ KAB : △ LCD, und EF : P = MF : NH. Folglich ist (5, 11. S.) △ KAB : △ LCD = MF : NH.

Zweyter Theil.

Es sey △ KAB : △ LCD = MF : NH. Nun sey (6, 12. S.) AB : CD = EF : QR, und eine Figur SR auf



QR beschrieben, welche sowohl der MF, als NH ähnlich ist, und ähnlich liegt, daß also nach dem ersten Theile △KAB : △LCD = MF : SR. Folglich ist (5, 11. S.) MF : SR = MF : NH, folglich (5, 9. S.) SR = NH. Nun ist, weil MF ∾ SR und ∾ NH, auch (6, 21. S.) SR ∾ NH. Folglich ist (folgender Lehnsatz) QR = GH, folglich, weil AB : CD = EF : QR, auch (5, 7. S.) AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

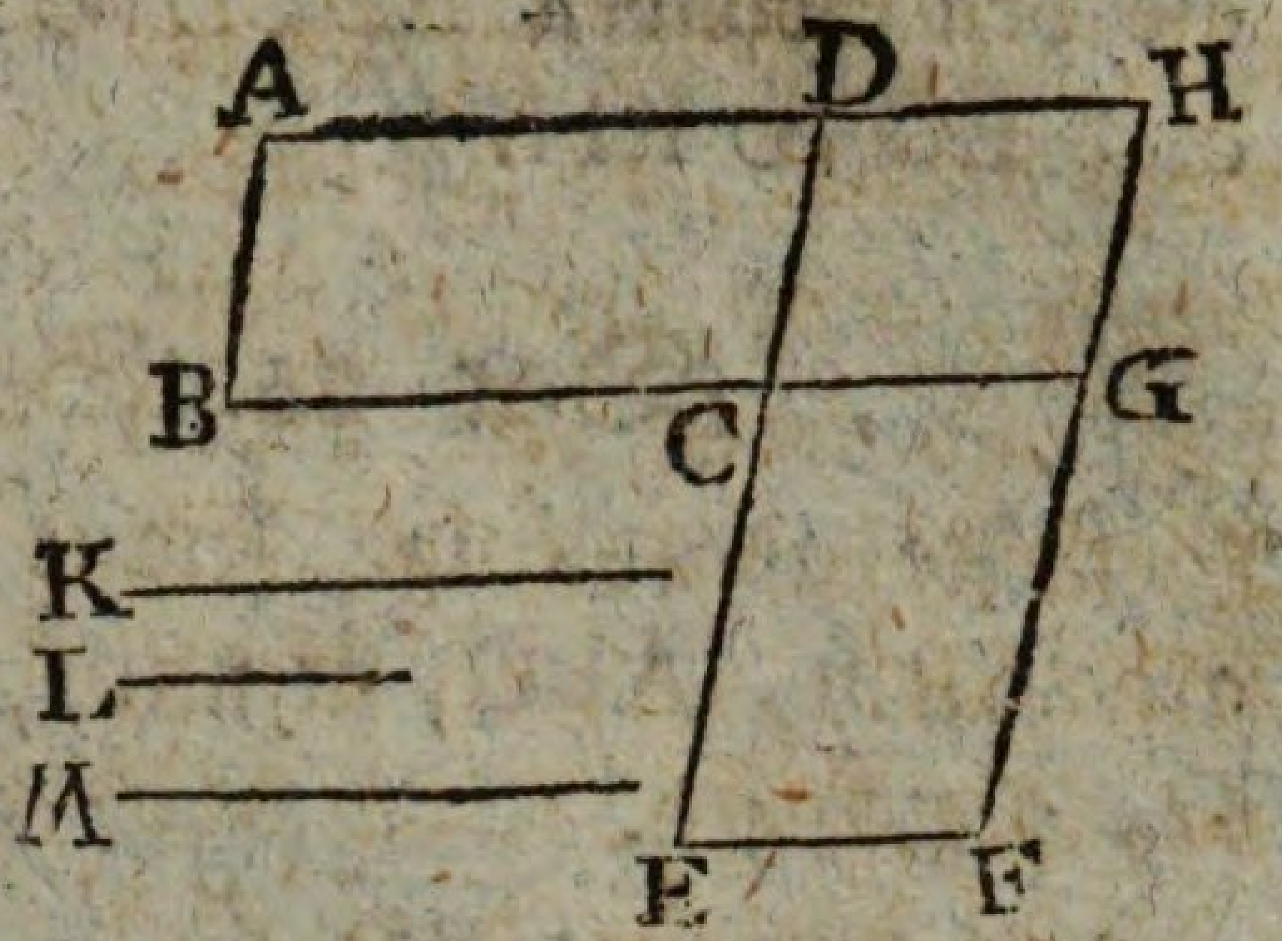
Daß aber in gleichen und ähnlichen Figuren, SR, NH, auch die gleichnamigen Seiten, QR, GH, gleich sind, wird so bewiesen:

Da SR der NH gleich und ähnlich: so ist QR : QS = GH : GN, oder (5, 16. S.) verwechselt QR : GH = QS : GN. Wären nun QR, GH, ungleich, etwa QR > GH, folglich auch QS > GN: so wäre (6, 20. S.) SR > NH, welches dem Angenommenen SR = NH widerspricht. Folglich können QR, GH, nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme, AC, CF, ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten, BC : CG, DC : CE, zusammengesetzt.

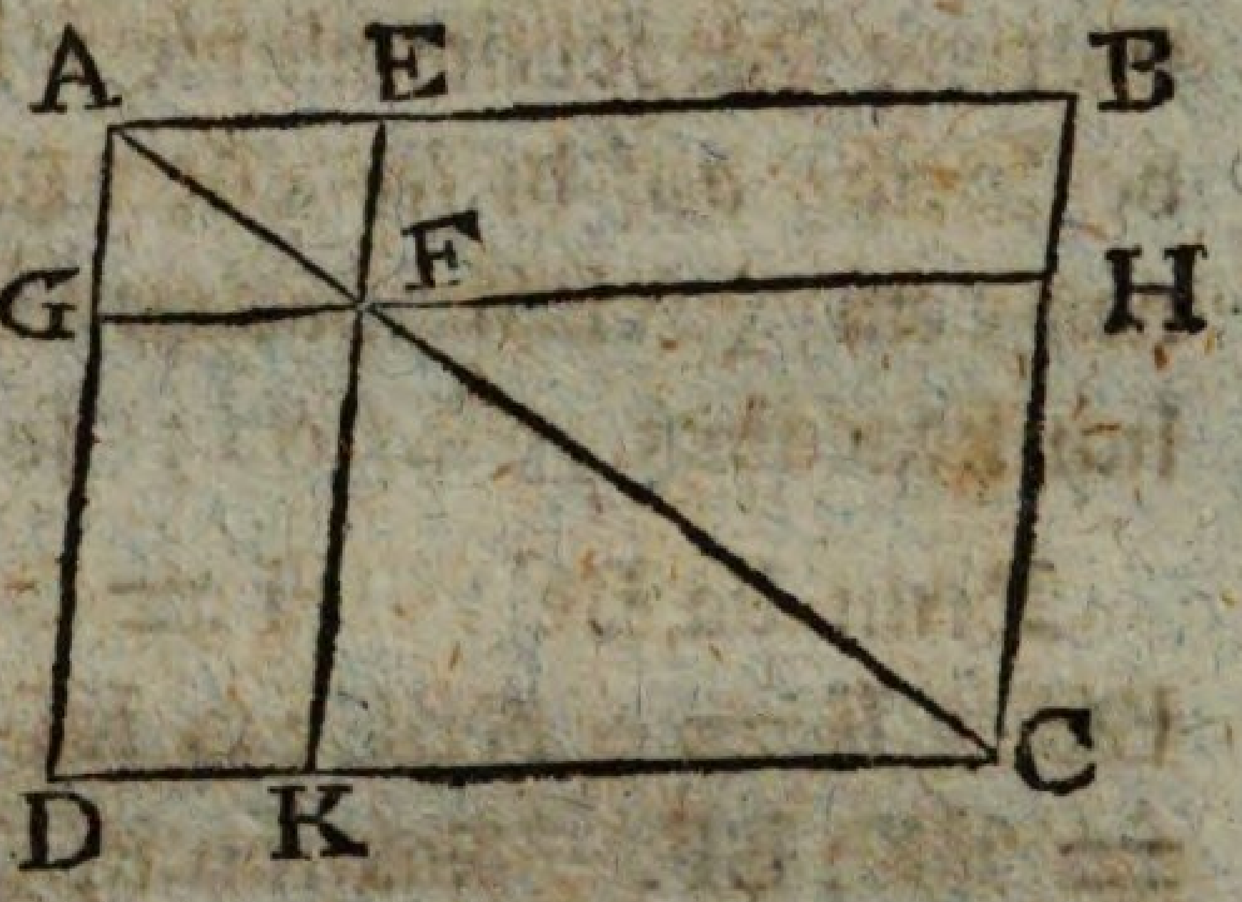
Es sey BCD = ECG, und BC, CG, in gerader Linie an einander gelegt: so sind (1, 14. S.) auch DC, CE, in gerader Linie. Vollende das Parallelogramm DG. Nimmt man



man nun irgend eine gerade Linie K, und macht (6, 12. S.) BC : CG = K : L, ferner DC : CE = L : M; so ist (6, 5. E.) K : M = (K : L) + (L : M) = (BC : CG) + (DC : CE). Nun ist (6, 1. S.) AC : CH = BC : CG = K : L, und CH : CF = DC : CE = L : M, und daher (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** AC : CF = K : M. Folglich ist (5, 11. S.) AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).

Der 24. Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die um die Diagonale, AC, liegenden Parallelogramme, EG, HK, dem ganzen, und einander ähnlich.



Da GF der DC parallel: so ist (1, 29. S.) AGF = ADC, AFG = ACD, DAC = DAC; demnach △ ACD dem △ AGF gleichwinklig. Nun ist aus gleichen Gründen △ ABC dem △ AEF gleichwinklig. Folglich ist das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG gleichwinklig, auch (6, 4. S.) AD : DC = AG : GF, und CB : BA = FE : EA; ferner DC : CA = GF : FA, und AC : CB = AF : FE; folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** DC : CB = GF : FE.

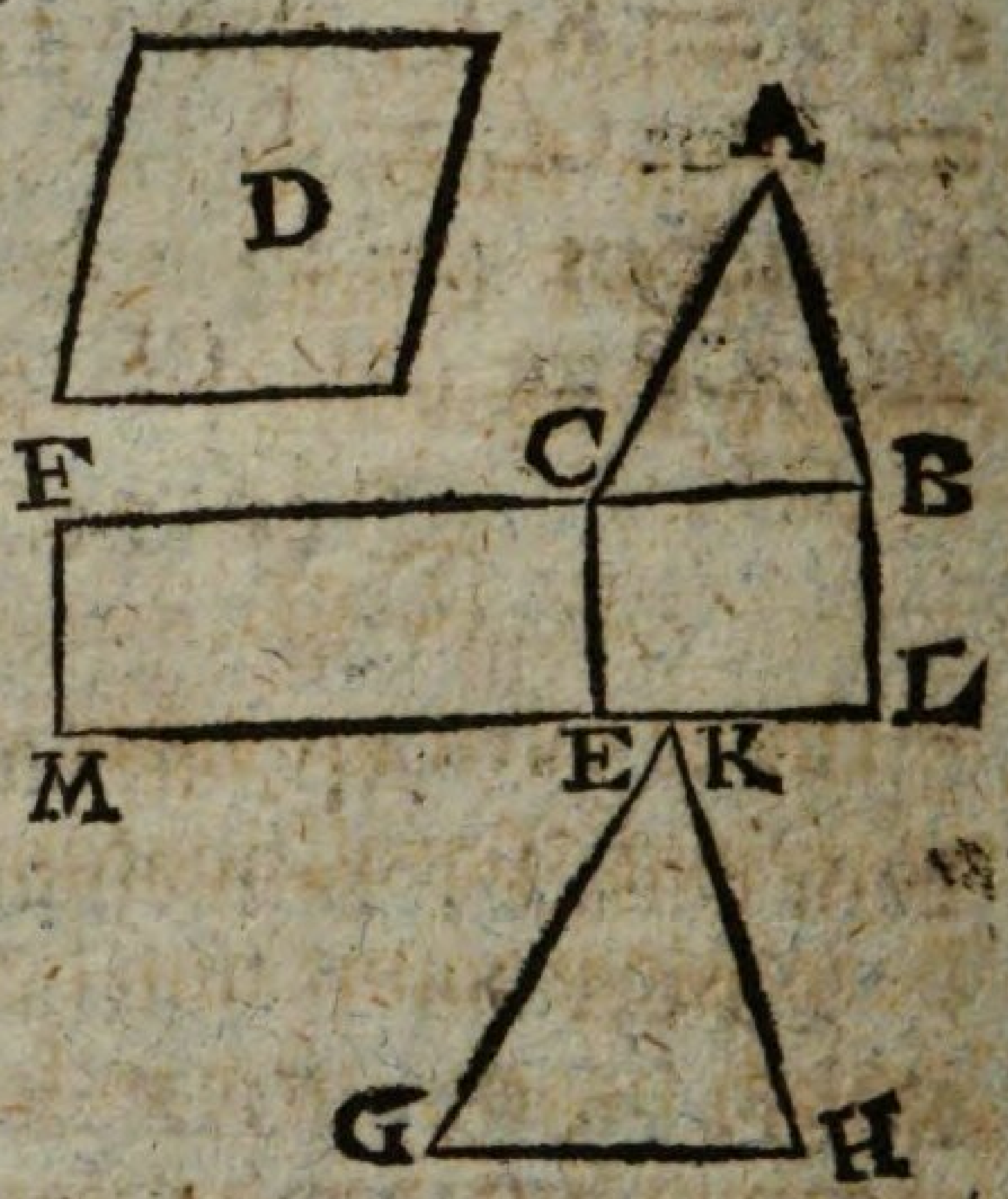
Endlich ist auch, wegen der Parallellinien EF, BC, und GF, DC, (6, 2. S.) BE : EA = CF : FA, und CF : FA = DG : GA; folglich (5, 11. S.) BE : EA = DG : GA; folglich (5, 18. S.) **verbunden** BA : AE = DA : AG, und (5, 16. S.) **verwechselt** BA : AD = AE : AG.

Demnach sind in den gleichwinkligen Parallelogrammen ABCD, EG, die Seiten um die gleichen Winkel proportionirt, folglich ist (6, 1. E.) ABCD ∾ EG. Nun ist aus glei-

gleichen Gründen ABCD ∾ KH. Folglich ist (6, 21. S.) auch EG ∾ KH.

Der 25. Satz. Aufgabe.

Eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen, ABC, ähnlich, und einer andern gegebenen, D, gleich sey.



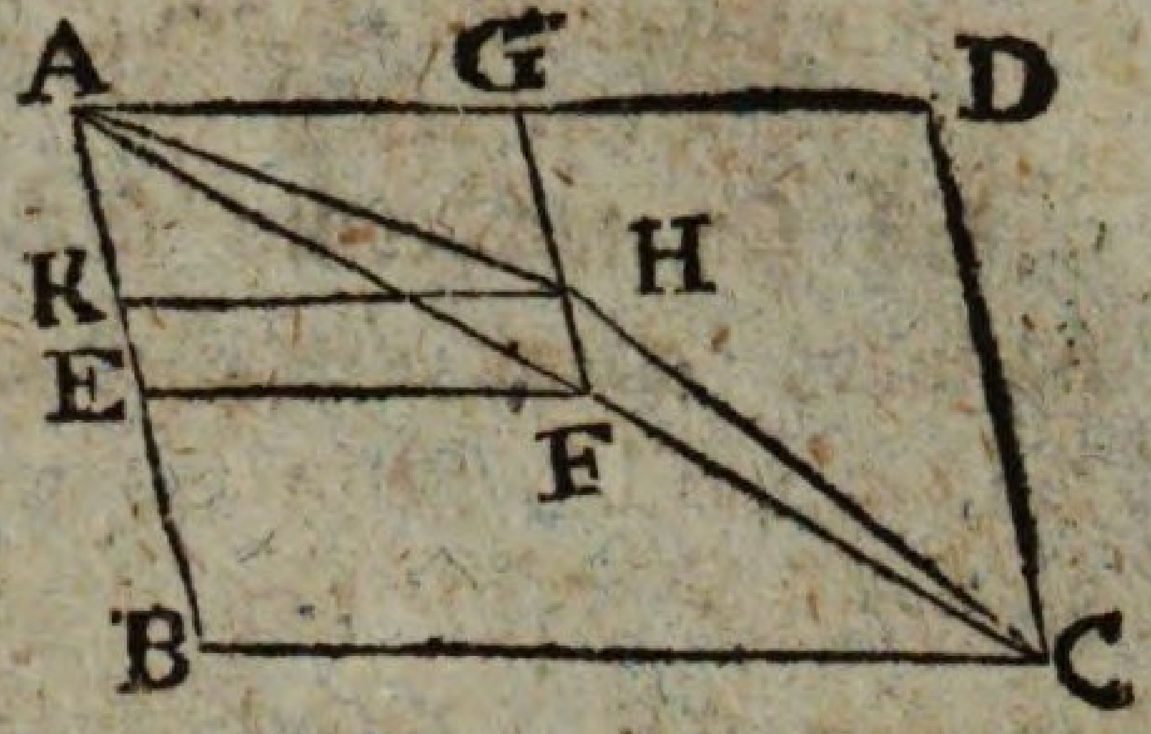
Auf BC beschreibe (1, 44. S.) das Parallelogramm BE = △ ABC, und (1, 45. S.) auf CE mit dem Winkel FCE = CBL, das Parallelogramm EF = D: so sind (1, 14. S.) sowohl BC, CF, als auch LE, EM, in gerader Linie. Suche (6, 13. S.) zwischen BC, CF, die mittlere Proportionallinie GH, und beschreibe auf dieser (6, 18. S.) einen dem △ ABC ähnlichen und ähnlich liegenden △ KGH: so ist das Verlangte geschehen.

Denn da BC : GH = GH : CF; so ist (6, 20. Zus. 2.) BC : CF = △ ABC : △ KGH. Nun ist (6, 1. S.) BC : CF = BE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC : △ KGH = BE : EF. Nun ist △ ABC = BE. Folglich ist (5, 14. S.) auch der dem △ ABC ähnliche △ KGH = EF = D.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Wird von einem Parallelogramme, ABCD, ein ihm ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm, AEFG, das mit ihm einen gemeinschaftlichen Winkel, DAB, hat, weggenommen: so liegt es mit dem ganzen um einerley Diagonale.

Wäre dieses nicht: so gehe, wenns möglich ist, die Diagonale AHC durch einen von F verschiedenen Punkt H, und

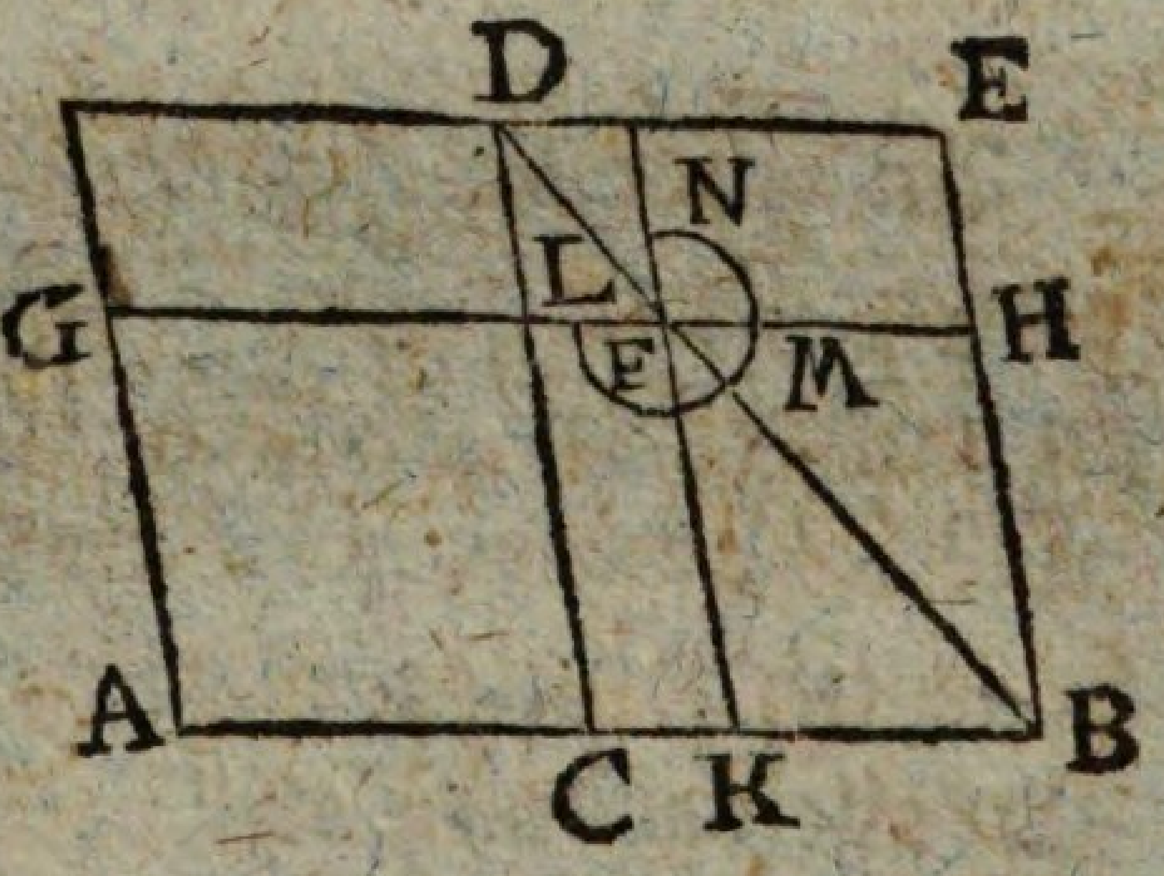


und es durch H mit AD oder BC die HK parallel, also (6, 24. S.) ABCD $\sim$ GK: so ist (6, 1. E.) DA : AB = GA ; AK. Nun ist, weil ABCD $\sim$ EG, auch DA : AB = GA : AE. Folglich ist (5, 11. S.) GA : AE = GA : AK, folglich (5, 9. S.) AE = AK, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann die Diagonale durch keinen von F verschiedenen Punkt, sondern muß durch F gehen, das ist, ABCD, AEFG, liegen um einerley Diagonale.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Unter allen an einer gegebenen geraden Linie, AB, entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen dem Parallelogramme auf der halben Linie ähnlich sind, und ähnlich liegen, ist das seiner Ergänzung ähnliche Parallelogramm auf der halben Linie das größte.

Erster Fall.

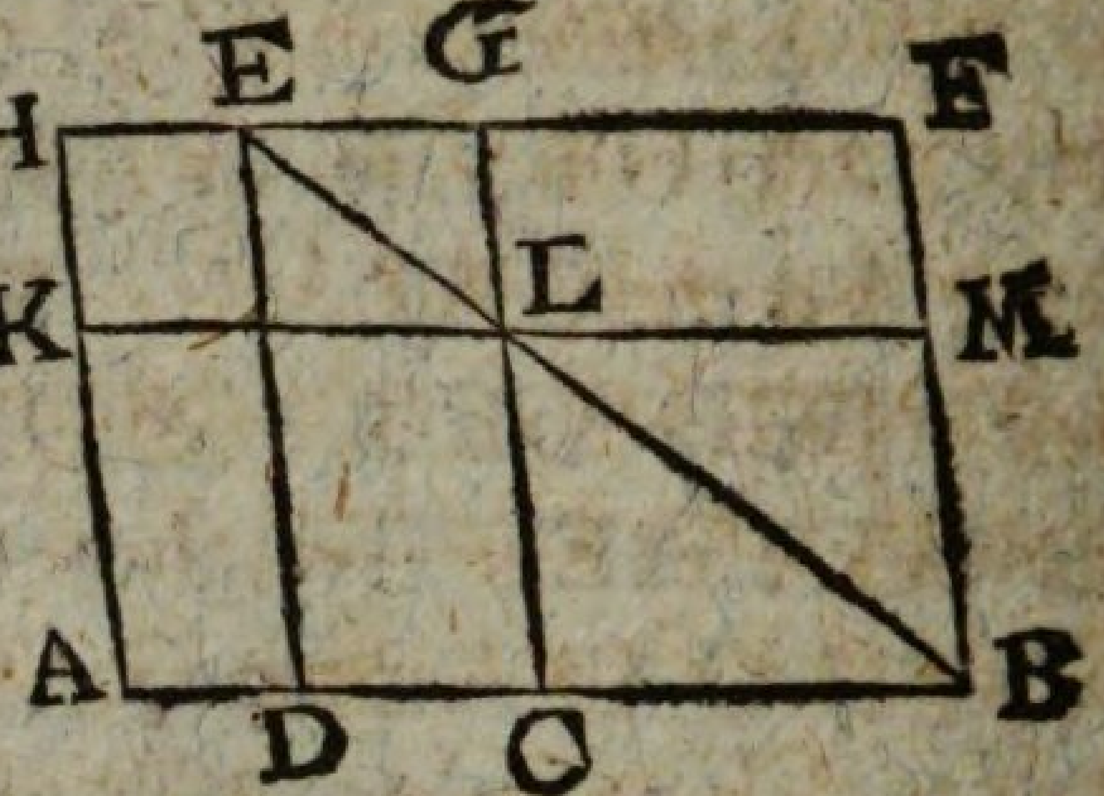


Es sey die Linie AB in C halbirt, **und ein Abschnitt der Linie** AK > AC. Nun sey auf dem Abschnitte AK das Parallelogramm AF, dessen Ergänzung KH dem Parallelogramm CE ähnlich sey und ähnlich liege: so sage ich, daß AD > AF ist,

Denn da KH $\sim$ CE: so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe solche Diagonale DB, und vollende die Figur: so ist (1, 43. S.) CF = FE, folglich, wenn KH hinzukommt, CH = KE. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) CH = CG. Folglich ist KE = CG; folglich, wenn CF hinzukommt, Gnomon LMN = AF, folglich CE, das ist AD > AF.

Zwey=

Zweyter Fall.



Es sey wiederum AB in C halbirt, aber ein Abschnitt $AD < AC$. Nun sey auf dem Abschnitte AD das Parallelogramm AE, dessen Ergänzung DF dem Parallelogramme CM ähnlich sey, und ähnlich liege: so sage ich, daß $AL > AE$ ist.

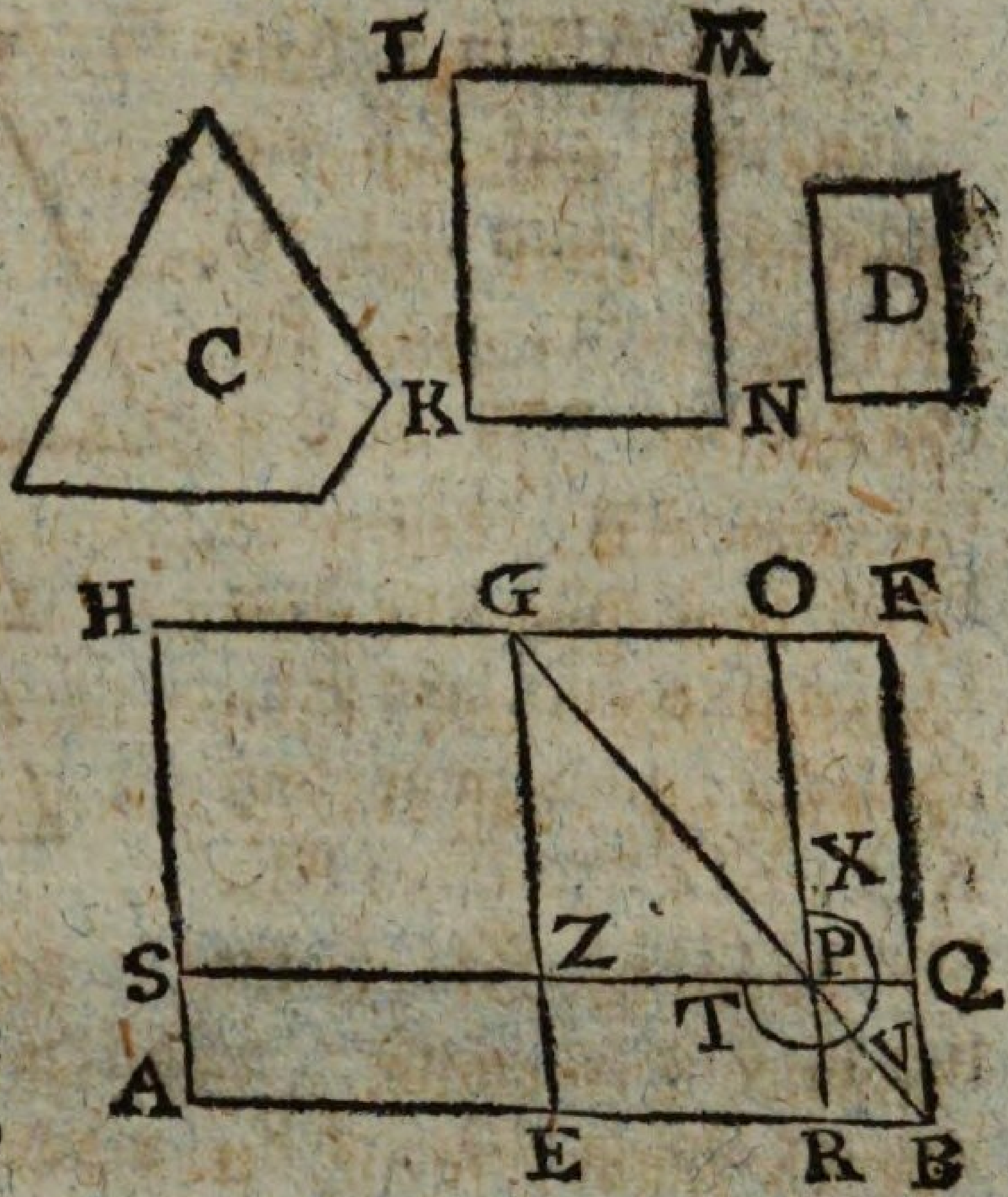
Denn da $DF \sim CM$: so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe solche Diagonale BE, und vollende die Figur: so ist, weil $FG = GH$, (1, 36. S.) $FL = LH$, folglich $FL > EK$. Nun ist (1, 43. S.) $FL = LD$. Folglich ist $LD > EK$, folglich, wenn DK hinzukommt, $AL > AE$.

Der 28. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie, AB, ein der gegebenen geradlinigen Figur, C, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramme, D, ähnlich sey. Jedoch darf die gegebene geradlinige Figur, C, nicht größer seyn, als das Parallelogramm auf der halben Linie, dessen Ergänzung dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich ist.

Es sey AB in E halbirt, und auf EB ein Parallelogramm $EF \sim D$ beschrieben, auch das Parallelogramm AG vollendet: so ist nach der Voraussetzung AG entweder der C gleich oder größer. Ist $AG = C$: so ist, weil auch $EF \sim D$, das Verlangte geschehen. Ist aber AG, also auch $EF > C$: so sey (6, 25. S.) ein Parallelogramm KM dem Ueberschusse

des

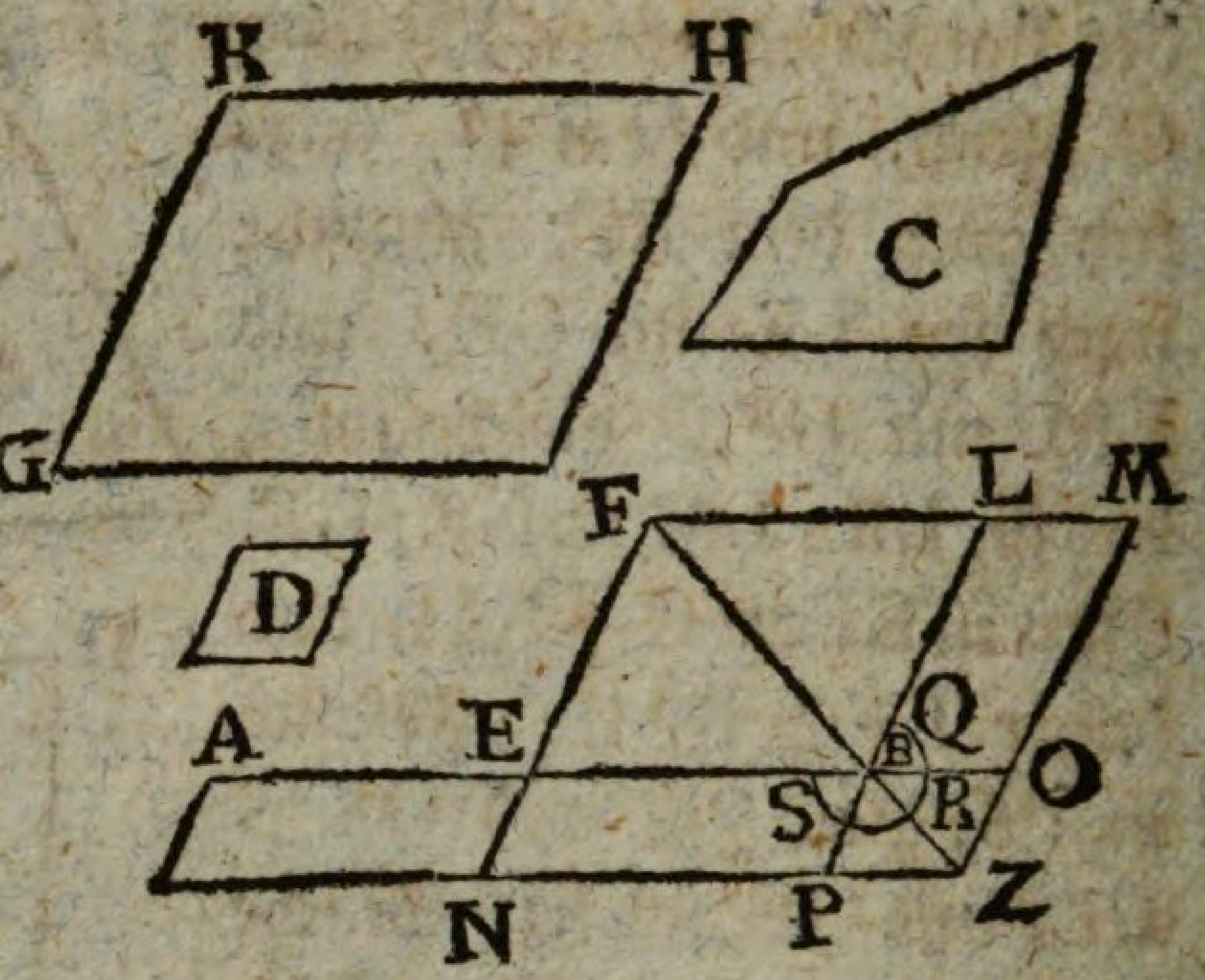


des Parallelogramms EF über C gleich, und dem D, folglich auch dem EF, ähnlich; auch sey LK mit GE, und LM mit GF, gleichnamig, das ist, LK : LM = GE : GF. Nun ist EF = C + KM, und daher EF > KM. Folglich ist (6, 20. Zus. 1.) GE > LK, und GF > LM. Mache daher (1, 3. S.) GZ = LK, GO = LM, und vollende das Parallelogramm ZO: so ist (6, 24. S.) ZO ≃ KM, und da KM ∾ EF, auch ZO ∾ EF, folglich (6, 26. S.) ZO und EF um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale BG, und vollende die Figur: so ist SR das verlangte Parallelogramm.

Denn da EF = C + KM, und KM = ZO: so ist EF = C + ZO, folglich (1, 3. G.) Gnomon TVX = C. Nun ist (1, 43. S.) ZR = OQ, also, wenn QR hinzukommt, ZB = OB, also auch SE = OB, und daher, wenn ZR hinzukommt, SR = Gnomon TVX. Folglich ist SR = C. Demnach ist das auf dem Abschnitte AR beschriebene Parallelogramm SR der Figur C gleich, und dessen Ergänzung QR ∾ ZO ∾ D.

Der 29. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie, AB, ein der gegebenen geradlinigen Figur, C, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ueberschuß einem gegebenen Parallelogramme, D, ähnlich sey.



Es sey AB in E halbirt, und auf EB ein Parallelogramm EL ∾ D beschrieben, auch sey (6, 25. S.) noch ein Parallelogramm GH, dem EL + C gleich, und dem D, folglich auch dem EL, ähnlich, und zwar daß KH : KG = FL : FE. Nun ist GH > EL. Folglich ist (6, 20. Zus. 1.) KH > FL, und KG > FE. Verlängere daher FL, FE, mache (1, 3. S.) FM = KH, FN = KG, und vollende das Parallelogramm MN: so ist (6, 24. S.) MN ≌ GH, und da GH ∾ EL, auch MN ∾ EL, folglich (6, 26. S.) MN, EL, um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale FZ, und vollende die Figur: so ist AZ das verlangte Parallelogramm.

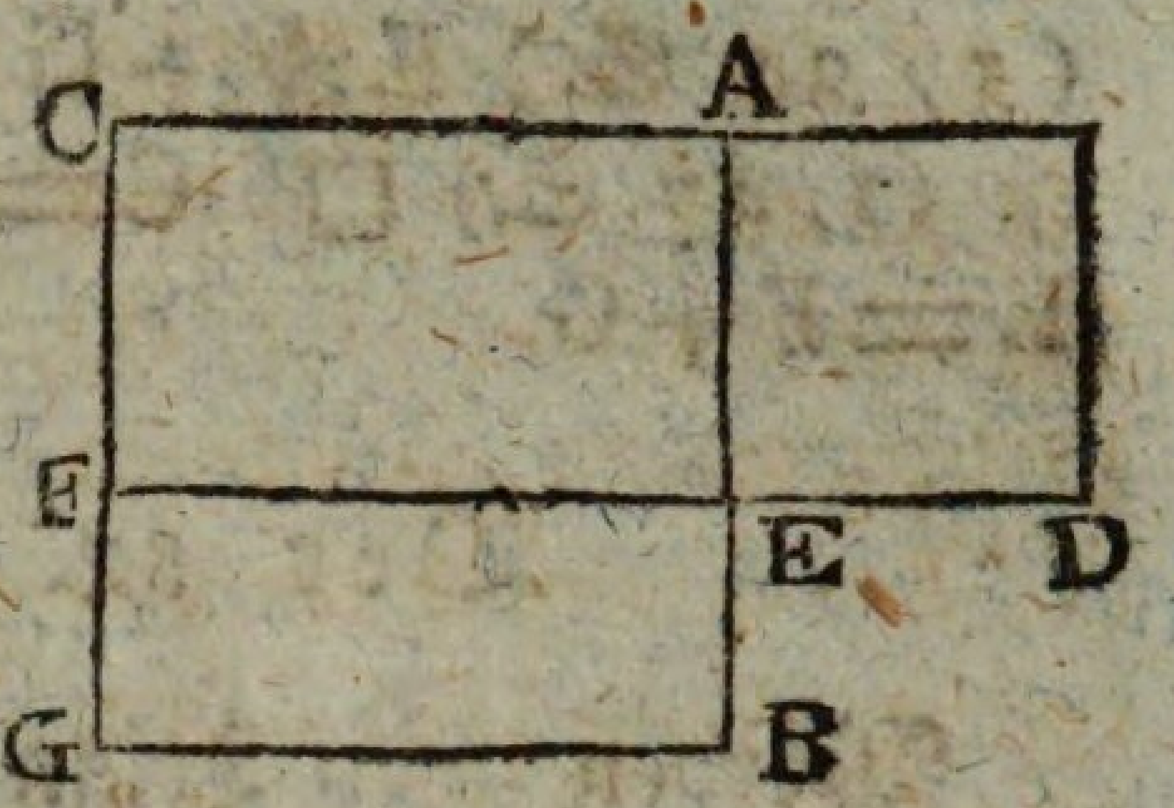
Denn da GH = EL + C, und GH = MN: so ist MN = EL + C, folglich (1, 3. G.) Gnomon QRS = C. Nun ist (1, 36. S.) AN = NB, also auch (1, 43. S.) AN = LO, und daher, wenn EZ hinzukommt, AZ = Gnomon QRS. Folglich ist AZ = C. Demnach ist das an AB entworfene Parallelogramm AZ der Figur C gleich, und dessen Ueberschuß OP ∾ EL ∾ D.

Der 30. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion zu schneiden.

Macht man (1, 43. S.) von AB das Quadrat BC, und entwirft (6, 29. S.) an CA ein dem Quadrate BC gleiches Parallelogramm CD, dessen Ueberschuß AD dem Quadrate BC ähnlich sey: so ist AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Denn

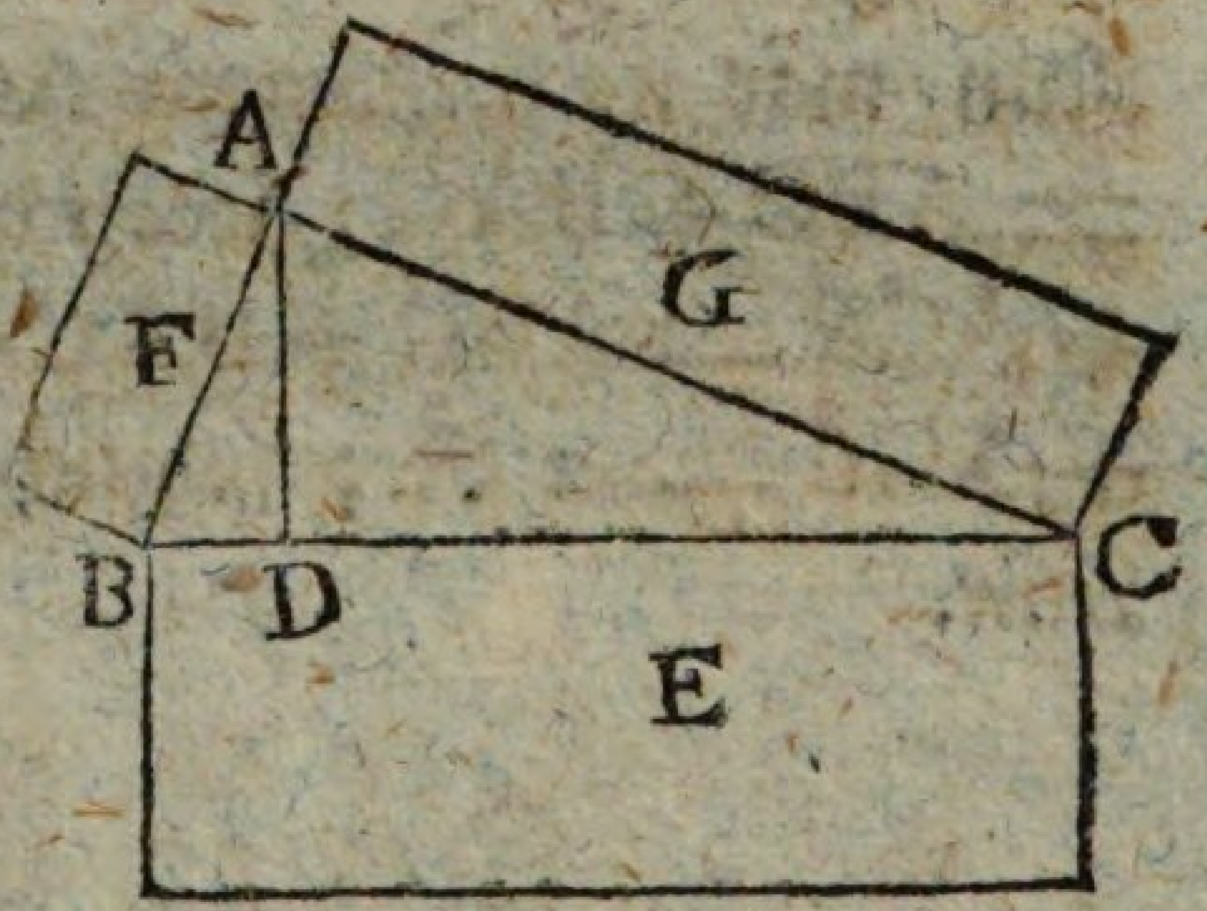


Denn da BC ein Quadrat: so ist auch AD ein Quadrat; und da $BC = CD$: so ist, wenn man CE wegnimmt, $BF = AD$. Nun sind BF, AD gleichwinklig. Folglich ist (6, 14. S.) $FE : ED = AE : EB$. Nun ist (1, 34. S.) $FE = AC = AB$, und $ED = AE$. Folglich ist $AB : AE = AE : EB$, und, weil $AB > AE$, auch $AE > EB$, folglich (6, 3. E.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Eine andere Auflösung. Schneide (2, 11. S.) AB in E so, daß $AB \times BE = \square AE$: so ist (6, 17. S.) $BA : AE = AE : EB$, folglich (6, 3. E.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Triangel, ABC, ist die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den diesen Winkel einschließenden Seiten, BA, AC, zusammen gleich.



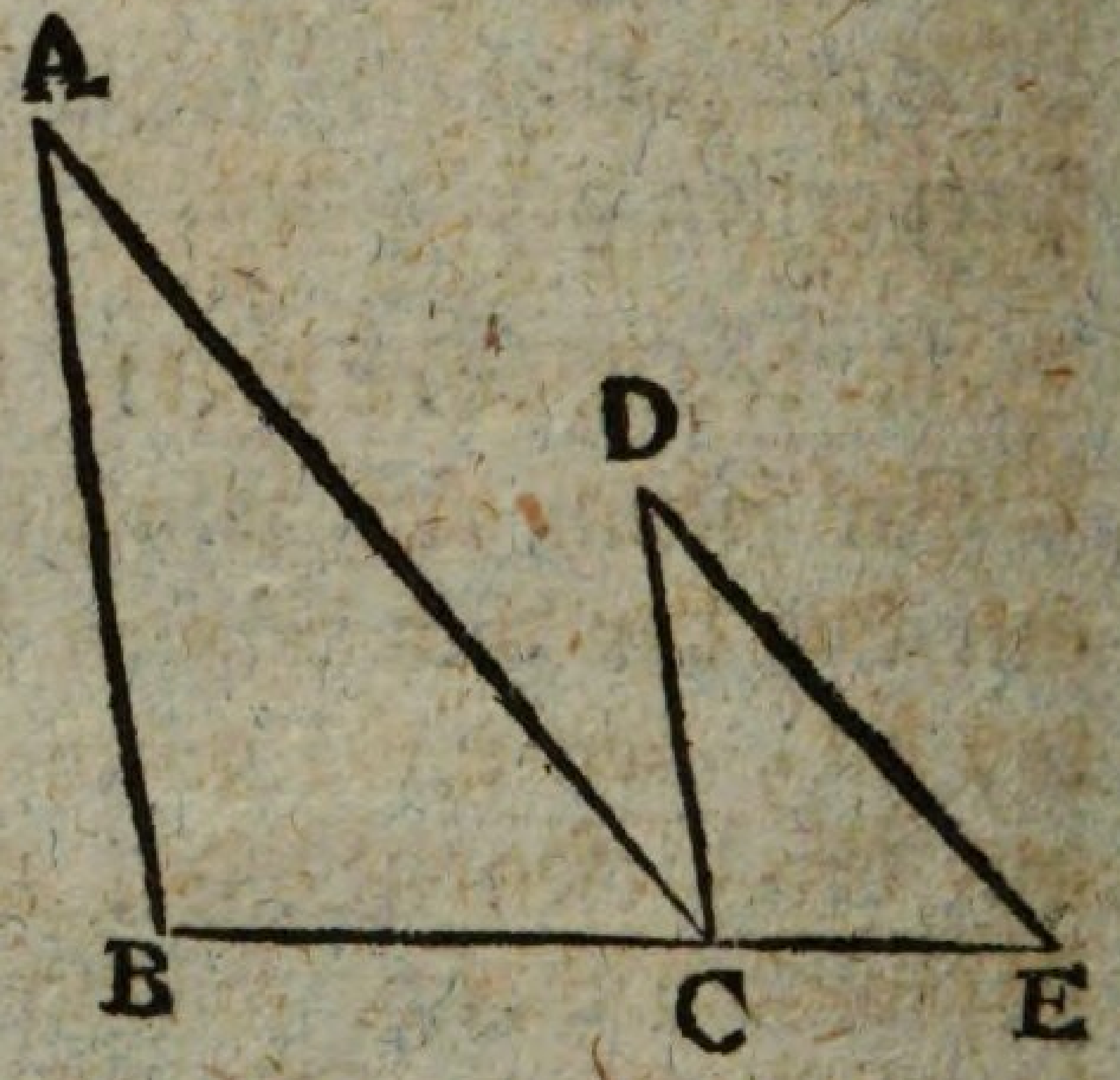
Fällt aus A auf BC der Perpendikel AD: so ist (6, 8. Zus.) $CB : BA = BA : BD$; folglich (6, 20. Zus. 2) $CB : BD = E : F$. Nun ist aus gleichen Gründen $BC : CD + E : G$. Folglich ist (5, 24. S.) $BC : BD + DC = E : F + G$. Nun ist $BC = BD + DC$. Folglich ist auch $E = F + G$.

Ein anderer Beweis. Da die Figuren E, F, G, ähnlich sind: so ist (6, 20. S.) $E : F = 2\,(BC : BA)$. Nun ist (6, 20. Zus. 1.) $\square BC : \square BA = 2\,(BC : BA)$. Folglich ist (5, 11. S.) $E : F = \square BC : \square BA$. Nun ist aus gleichen Gründen $E : G = \square BC : \square AC$. Folglich ist

(5, 24. S.) E:F+G=□BC:□AB+□AC. Nun ist (1, 47. S.) □BC=□AB+□AC. Folglich ist auch E=F+G.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Werden zwey Triangel, ABC, DCE, in welchen zwey Seiten, BA, AC, mit zweyen Seiten, CD, DE, proportionirt sind, mit einem Winkel C, so an einander gesetzt, daß die gleichnamigen Seiten BA, CD, und CA, ED, auch parallel sind: so sind die übrigen Seiten BC, CE, in gerader Linie.



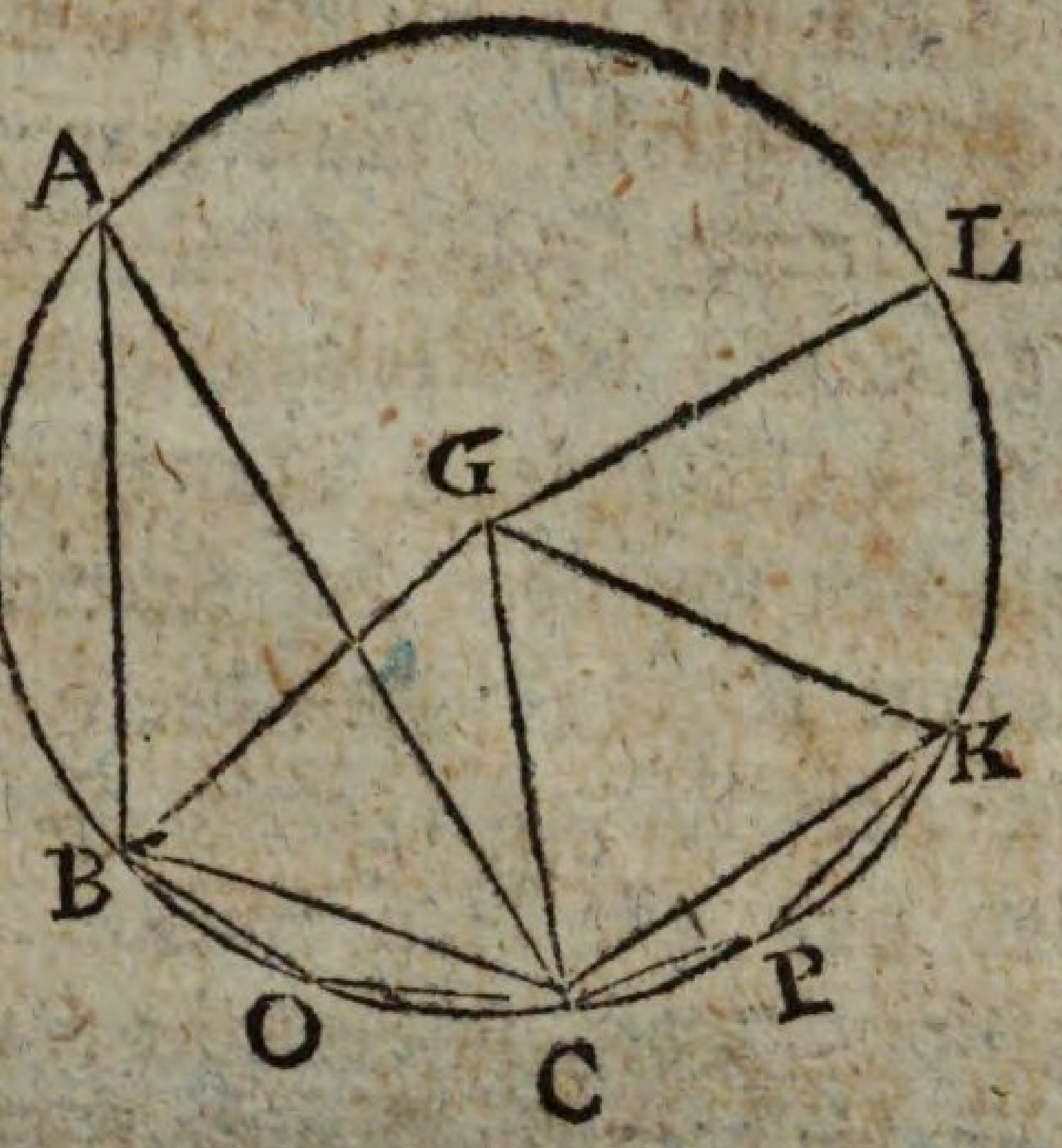
Da AB und CD parallel sind: so ist (1, 29. S.) BAC=ACD, aber aus gleichen Gründen auch CDE=ACD, folglich BAC=CDE. Nun ist nach der Voraussetzung BA:AC=CD:DE. Folglich ist (6, 6. S.) △ABC, dem △DCE gleichwinklig, folglich DCE=ABC. Nun war nach Obigem ACD=BAC. Folglich ist ACE=ABC+BAC, folglich, wenn ACB hinzukommt, ACE+ACB=ABC+BAC+ACB, oder (1, 32. S.) ACE+ACB=2 R.; folglich (1, 14. S.) BC, CE in gradere Linie.

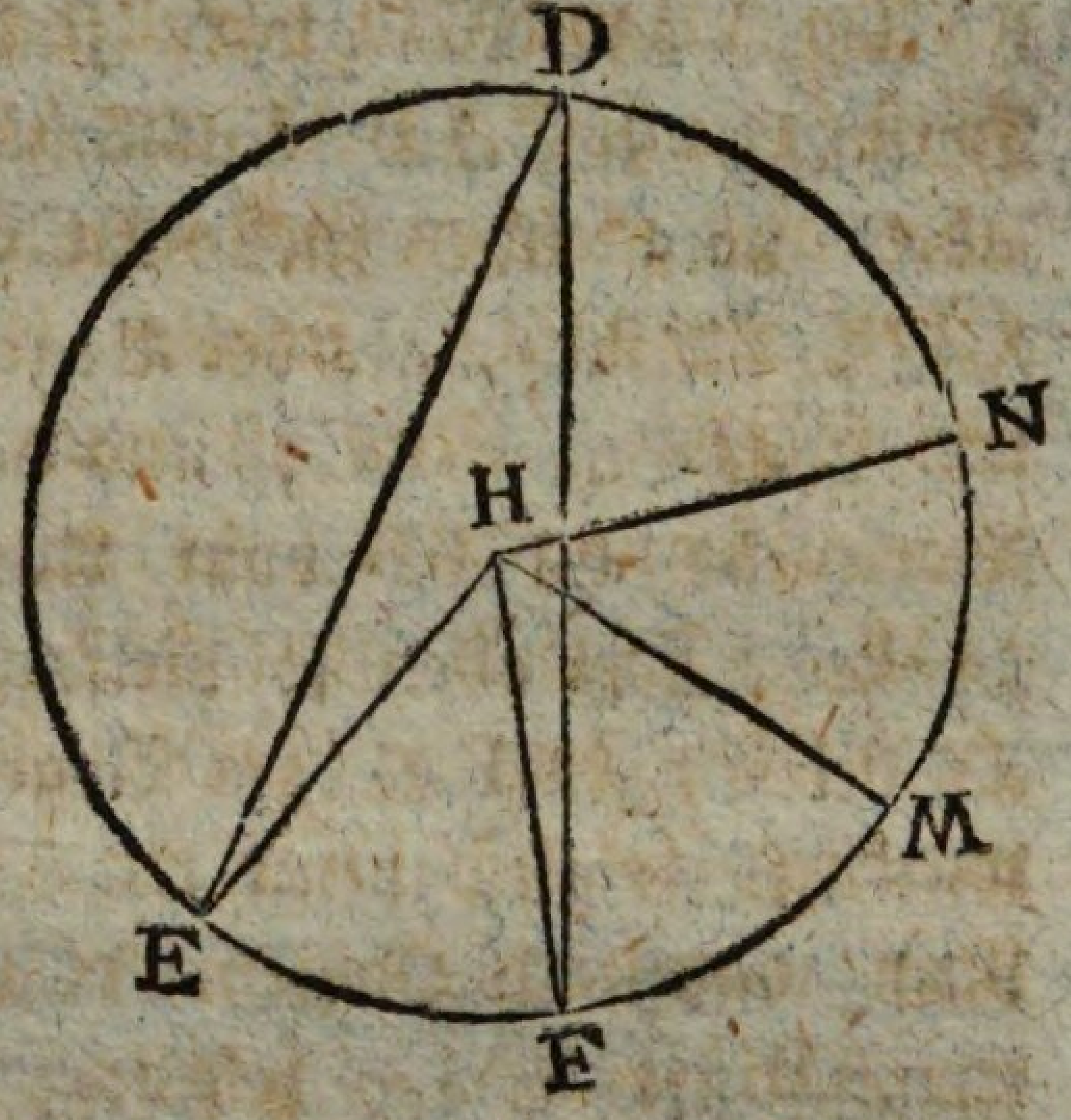
Der 33. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, verhalten sich sowohl die Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, als auch die Winkel am Umkreise, BAC, EDF, desgleichen die Kreisausschnitte, BCG, EFH, wie die Kreisbogen, BC, EF, worauf sie stehen.

Erster Theil.

Nimm eine beliebige Anzahl an einander hängender Kreisbogen CK, KL, dem Bogen BC, und FM, MN, dem Bogen EF gleich, und ziehe GK, GL, HM, HN: so sind im ersten Kreise (3, 27. S.) die Winkel BGC, CGK, KGL, gleich. Demnach ist der Winkel BGL vom Winkel BGC eben so vielfach, als der Bogen BL vom Bogen BC; und aus gleichen Gründen ist auch im zweyten Kreise der Winkel EHN vom Winkel EHF eben so vielfach, als der Bogen EN vom Bogen EF. Nun ist, wenn Bogen BL $\gtreqless$ Bogen EN, auch BGL $\gtreqless$ EHN. Folglich ist (5, 5. E.) Bogen BC: Bogen EF = BGC : EHF.



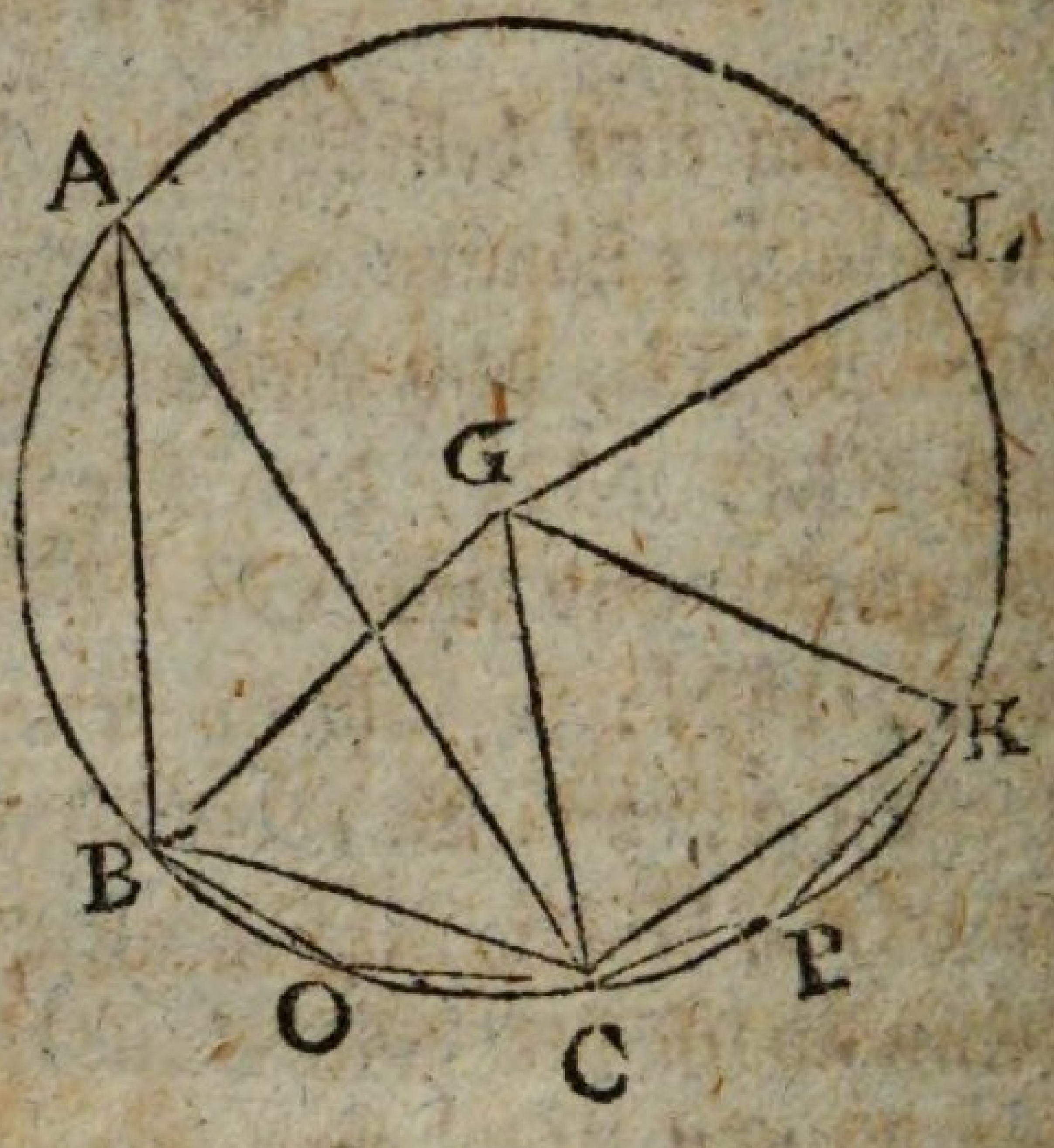


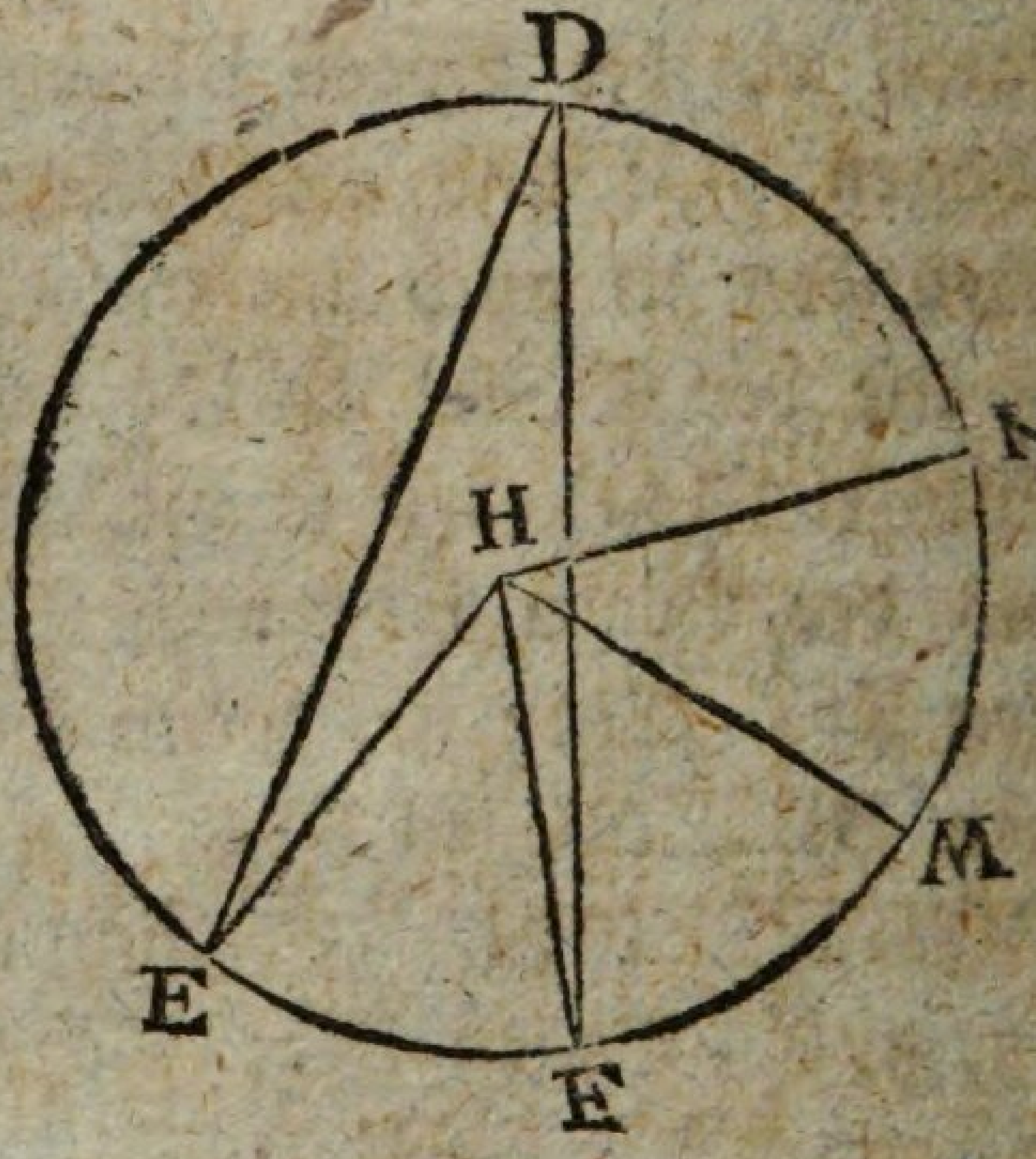
Da aber (3, 20. S.) BGC = 2 BAC, und HEF = 2 FDF, folglich (5, 15. S.) BGC : EHF = BAC : EDF; so ist (5, 11. S.) auch Bog. BC : Bog. EF = BAC : EDF.

Zweyter Theil.

Ziehe im ersten Kreise die geraden Linien BC, CK, und die Winkel in den beyden Kreisabschnitten BOC, CPK. Da die Halbmesser gleich sind, und gleiche Winkel bey G einschließen: so ist (1, 4. S.) △ GBC = GCK, und BC = CK. Da die Bogen BC, CK gleich, so sind auch die Reste des Umkreises gleich, folglich (3, 27. S.) BOC = CPK, folglich (3, 11. E., die Abschnitte ähnlich. Nun waren auch ihre

Grundlinien BC, CK gleich. Folglich sind (3, 24. S.) die Abschnitte gleich. Nun war △ GBC = △ GCK, folglich sind (1, 2. G.) die Kreisausschnitte BCG, CKG gleich. Nun ist aus gleichen Gründen der Kreisabschnitt KLG, jedem der Ausschnitte CKG, BCG gleich. Folglich sind alle drey Ausschnitte gleich. Eben so beweiset man, daß die drey Ausschnitte EFH, FMH, MNH gleich sind. Demnach ist der Ausschnitt BLG vom Ausschnitte BCG eben so vielfach, als der Bogen BL vom Bogen BC; und der Ausschnitt ENH vom Ausschnitte EFH eben so vielfach, als der Bogen EN vom Bogen EF. Nun ist, wenn BL ⋜ EN, auch BLG ⋜ ENH. Folglich ist (5, 5. E.) BC : EF = BCG : EFH.





Zusatz.

Hieraus, und (5, 11. S.) erhellet, daß die Kreisausschnitte BCG, EFH, sich auch wie die Winkel BGC, EHF, verhalten.

Euklid's

Euklid's Elemente

Eilftes Buch

Und Erstes von den Körpern.

Erklärungen.

1. Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.
2. Eines Körpers Gränze ist **Fläche**.
3. Eine **gerade Linie ist auf einer Ebene perpendikular**, wenn sie mit allen sie treffenden, und in solcher Ebene liegenden, geraden Linien rechte Winkel macht.
4. Eine **Ebene ist auf einer Ebene perpendikular**, wenn die an beyder gemeinschaftlichen Durchschnitt unter rechten Winkeln in der einen Ebene gezogenen geraden Linien auf der andern Ebene perpendikular sind.
5. Einer **geraden Linie Neigung gegen eine Ebene** ist der spitze Winkel, den sie mit der durch die beyden Punkte gezogenen geraden Linie macht, in deren einem sie selbst, in dem andern aber, der von einem ihrer Punkte auf die Ebene gefällte Perpendikel die Ebene trifft.
6. Einer **Ebene Neigung gegen eine Ebene** ist der spitze Winkel, welchen zwey gerade Linien einschließen, die in beyden Ebenen an den gemeinschaftlichen Durchschnitt unter rechten Winkeln, und zwar an einerley Punkt desselben, gezogen werden.

7. Zwey Paar Ebenen haben **ähnliche Neigungen**, wenn vorhin gedachte Neigungswinkel gleich sind.
8. **Parallele Ebenen** heißen, die nie zusammentreffen.
9. **Aehnliche Körper** sind, die von gleich vielen ähnlichen Ebenen begränzt werden.
10. **Gleiche und ähnliche Körper** sind, die von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt werden.
11. Ein **körperlicher Winkel** (eine **Ecke**) ist die Neigung wenigstens dreyer geraden Linien gegen einander, welche, ohne in einerley Ebene zu liegen, in Einem Punkte zusammentreffen. Oder: ein körperlicher Winkel wird von wenigstens drey ebenen Winkeln eingeschlossen, welche, ohne in einerley Ebene zu liegen, an einem Punkte zusammengestellt sind.
12. Eine **Pyramide** ist ein Körper, begränzt von Ebenen, die von Einer Ebene aus an einem außerhalb derselben befindlichen Punkte zusammengestellt sind.
13. Ein **Prisma** ist ein Körper, begränzt von Ebenen, deren zwey einander gegenüber liegende gleich und ähnlich, auch parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind.
14. Eine **Kugel**, Sphaera, ist der Körper, welchen ein Halbkreis beschreibt, der sich um seinen unverrückten Durchmesser ringsum drehet.
15. Die **Axe der Kugel** ist die unverrückte Linie, um welche der Halbkreis sich drehet.
16. Der **Mittelpunkt der Kugel** ist einerley mit dem des sich umdrehenden Halbkreises.
17. Der **Durchmesser der Kugel** ist jede durch ihren Mittelpunkt gezogene und an beyden Seiten von der Kugelfläche begränzte gerade Linie.
18. Ein **Kegel**, conus, ist der Körper, welchen ein rechtwinkliger Triangel beschreibt, der sich ringsum drehet,

drehet, indem eine seiner Seiten um den rechten Winkel unverrückt bleibt. Je nachdem diese unverrückte Seite entweder eben so groß, oder kleiner, oder größer ist, als die andere an dem rechten Winkel liegende, sich mit umdrehende Seite, ist der Kegel entweder **rechtwinklig**, oder **stumpfwinklig**, oder **spitzwinklig**.

19. Die **Axe des Kegels** ist die unverrückte Seite, um welche der Triangel sich drehet.

20. Die **Grundfläche des Kegels** ist der von der sich mit umdrehenden Seite beschriebene Kreis.

21. Ein **Cylinder** ist der Körper, welchen ein rechtwinkliges Parallelogramm beschreibt, das sich ringsum drehet, indem eine seiner Seiten unverrückt bleibt.

22. Die **Axe des Cylinders** ist die unverrückte Seite, um welche das Parallelogramm sich drehet.

23. Die **Grundflächen des Cylinders** sind die Kreise, welche von den beyden einander gegenüber liegenden, sich mit umdrehenden Seiten beschrieben werden.

24. **Aehnliche Kegel** und **Cylinder** sind, deren Axen den Durchmessern der Grundflächen proportionirt sind.

25. Ein **Würfel**, cubus, ist ein von sechs gleichen Quadraten begränzter Körper.

26. Ein **Tetraeder** ist ein von vier gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

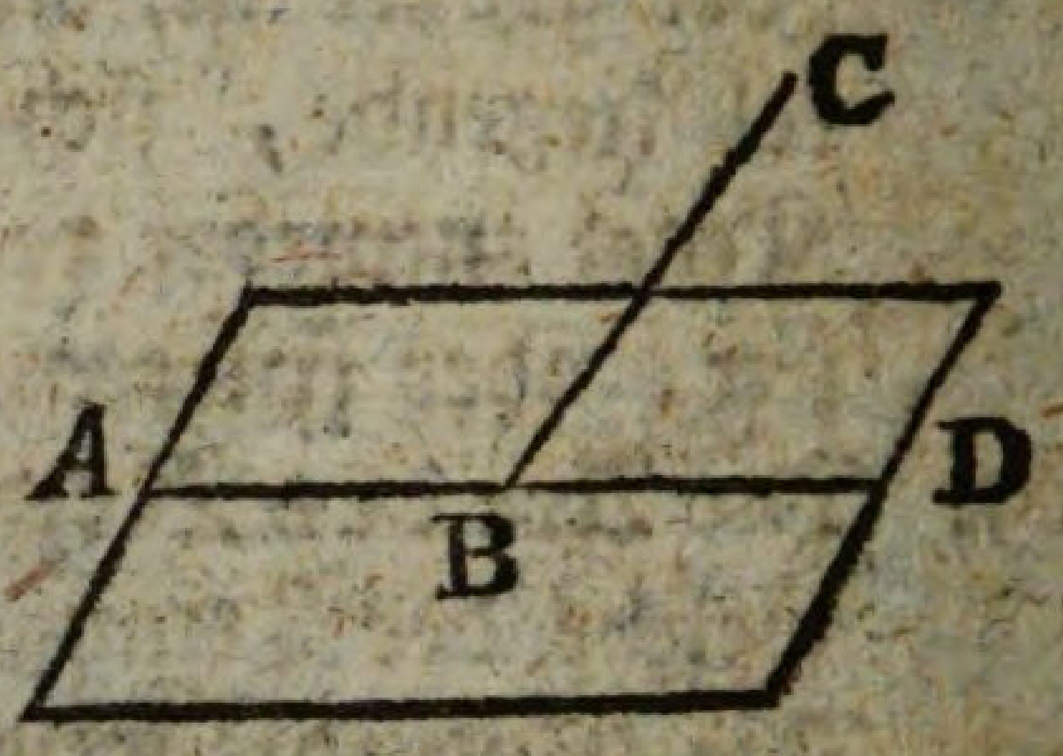
27. Ein **Oktaeder** ist ein von acht gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

28. Ein **Dodekaeder** ist ein von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Pentagonen begränzter Körper.

29. Ein **Ikosaeder** ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

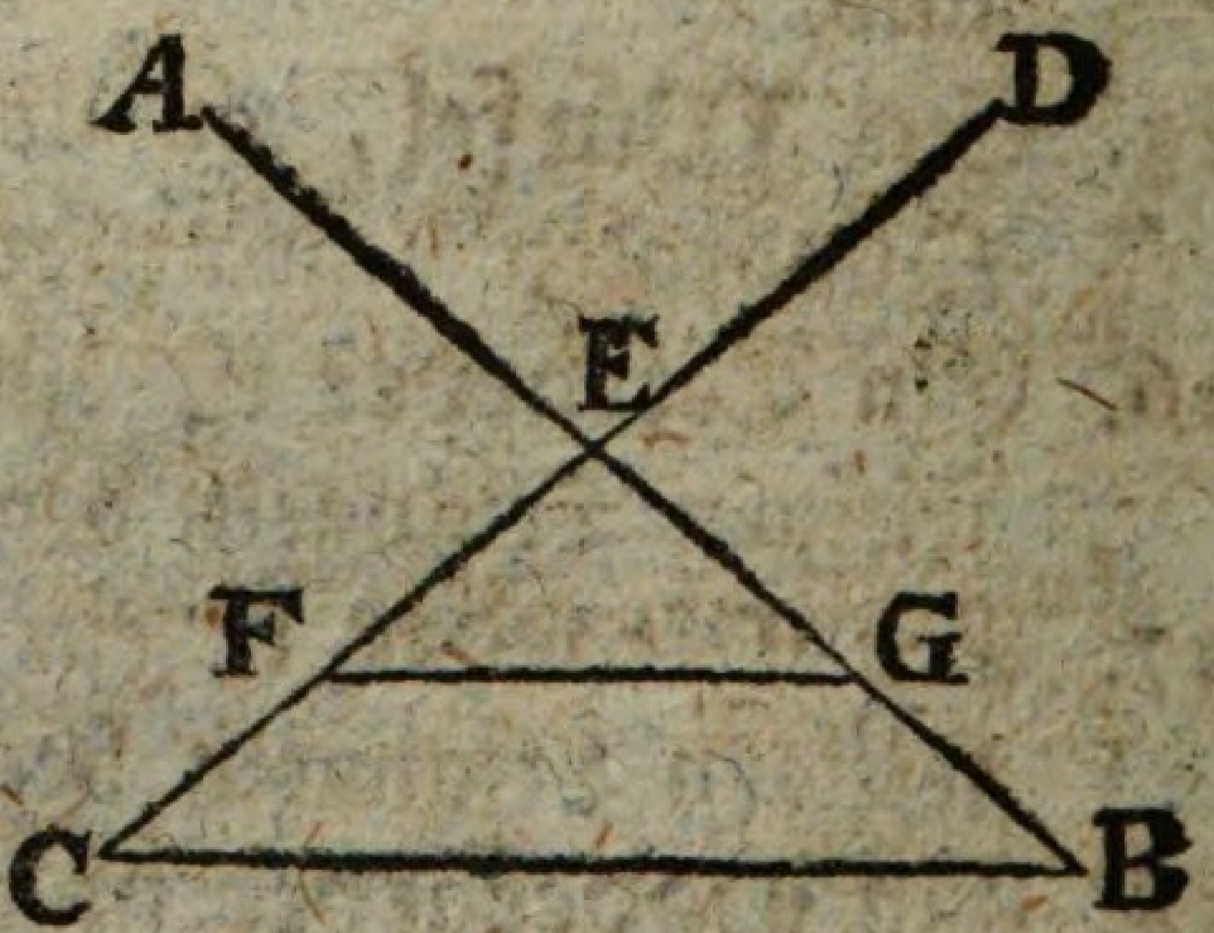
Von einer geraden Linie liegt nicht ein Stück in einer Ebene, und ein anderes darüber.



Wenn es möglich, so sey ABC eine gerade Linie, von welcher das Stück AB in einer Ebene, das Stück BC aber darüber liege. Verlängert man das Stück in der Ebene, AB, bis D: so hätten die geraden Linien ABC, ABD, den Abschnitt AB gemein, welches nicht möglich ist. Denn zwey gerade Linien können nur in Einem Punkte zusammentreffen, oder fallen ganz zusammen. Demnach kann auch nicht von einer geraden Linie ein Stück in einer Ebene, ein anderes darüber liegen.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, liegen in Einer Ebene; auch jeder Triangel liegt in Einer Ebene.



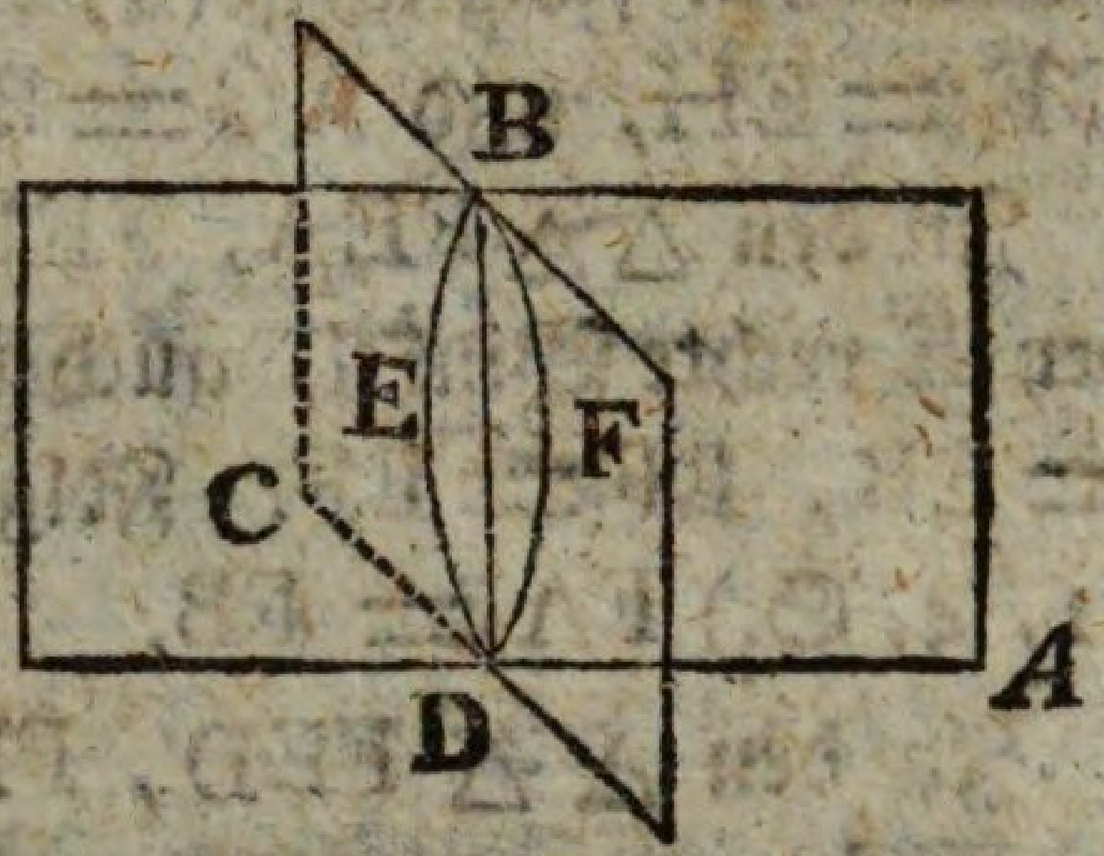
Nimm in EC, EB, willkührliche Punkte, F, G, und ziehe EG, CB.

Wäre nun vom △ ECB ein Stück EFG in einer Ebene, das übrige FCBG aber über derselben: so wäre auch von den geraden Linien EC oder EB ein Stück EF oder EG in solcher Ebene, ein anderes FC oder GB über derselben, welches (11, 1. S.) unmöglich ist. Demnach liegt der ganze Triangel ECB in Einer Ebene, in welcher also EB, EC, folglich (11, 1. S.) auch AB, CD, liegen.

Der

Der 3. Satz. Lehrsatz.

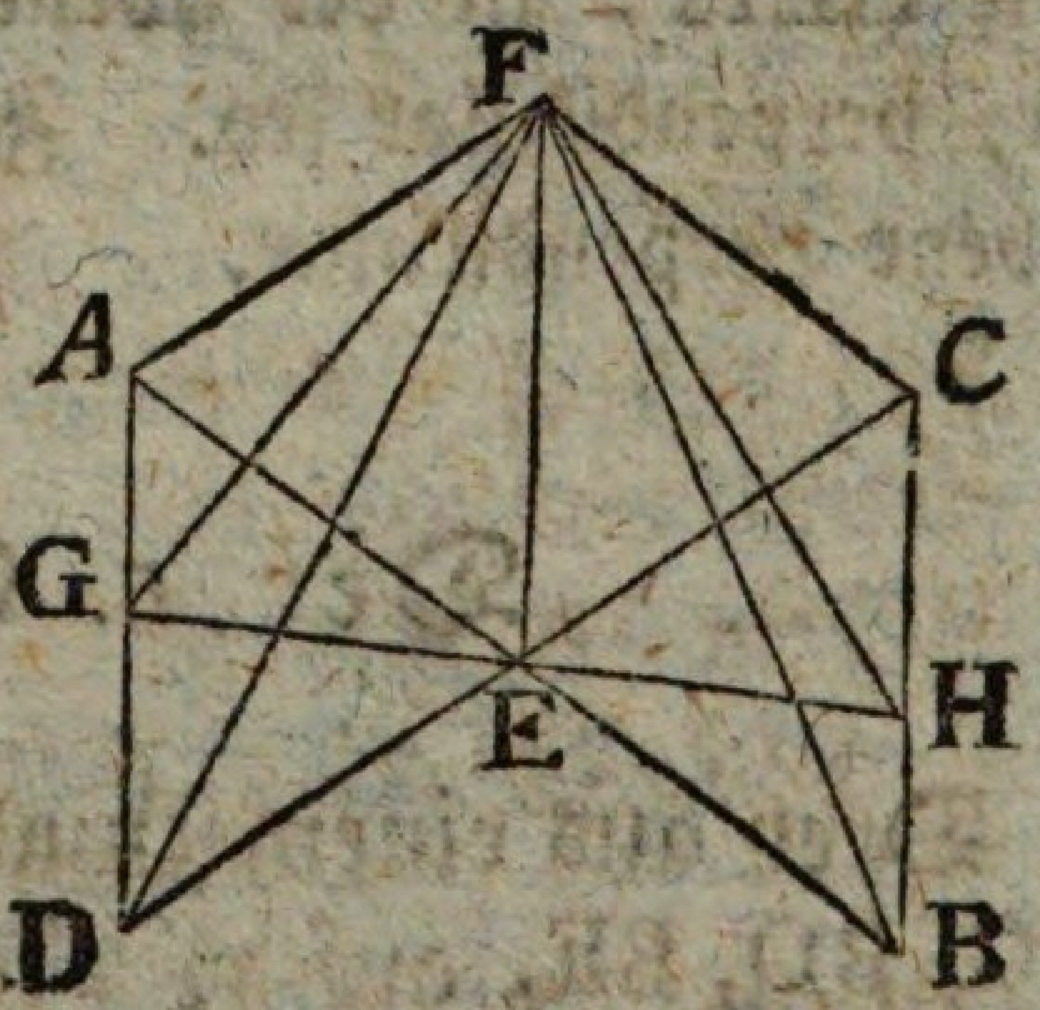
Schneiden zwey Ebenen, AB, BC, einander, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt, BD, eine gerade Linie.



Wäre solcher Durchschnitt BD keine gerade Linie: so sey von D nach B in der Ebene AB eine gerade Linie DFB, und in der Ebene BC eine gerade Linie DEB, daß also beyde einerley Gränzen hätten, folglich einen Raum BEDF einschlössen, welches (1, 12. G.) nicht möglich. Demnach sind DFB, DEB, nicht gerade Linien, und aus gleichen Gründen auch keine andere von D nach B gezogene Linien außer DB, dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden Ebenen. Folglich muß dieser eine gerade Linie seyn.

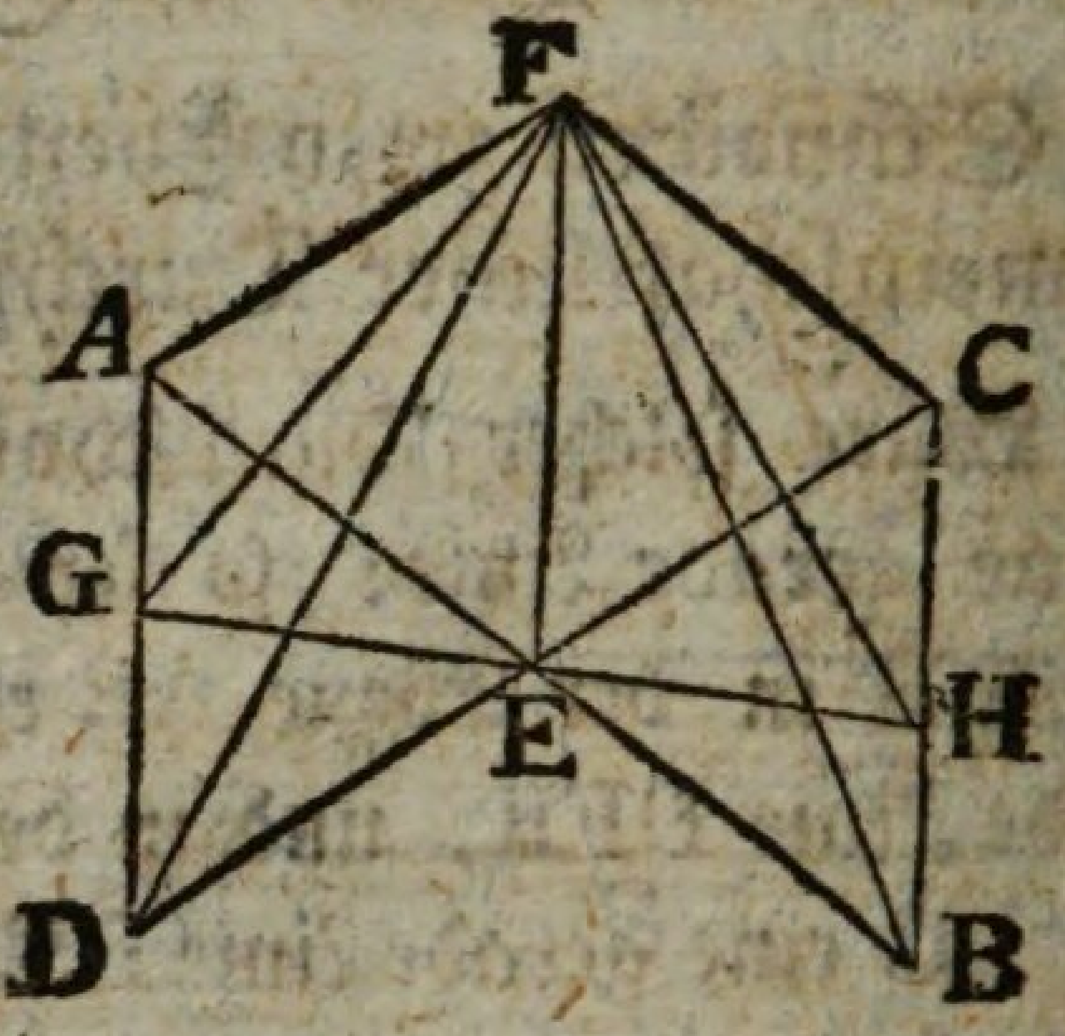
Der 4. Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Linie, EF, die auf zwey einander schneidenden geraden Linien, AB, CD, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, E, perpendikular stehet, ist auf der durch diese Linien gelegten Ebene perpendikular.



Mache EB der EA, und ED der EC gleich, und ziehe durch E in der Ebene der AB und CD willkührlich die gerade Linie GEH, ziehe auch AD, CB, desgleichen von einem in der EF beliebig genommenen Punkte F, die FA, FG, FD; FB, FH, FC.

In den △△ AED, BEC, ist AE = EB, ED = EC, und (1, 15. S.) AED = BEC. Folglich ist (1, 4. S.) AD = CB, und DAE = EBC.



In den △△ AGE, BHE, ist hiernach DAE = EBC, und (1, 15. S.) AEG = BEH, auch ist AE = EB. Folglich ist (1, 26. S.) GE = EH, und AG = BH.

In den △△ FEA, FEB, sind bey E rechte Winkel, auch ist AE = EB, EF = EF. Folglich ist (1, 4. S.) FA = FB.

In den △△ FED, FEC, ist aus gleichem Grunde FD = FC.

In den △△ FAD, FBC, ist also hiernach FA = FB, FD = FC. Nun war auch nach Obigem AD = BC. Folglich ist (1, 8. S.) FAD = FBC.

In den △△ FAG, FBH, ist hiernach FAD = FBC. Nun war nach Obigem AG = BH, und FA = FB. Folglich ist (1, 4. S.) FG = FH.

In den △△ FEG, FEH, endlich ist hiernach FG = FH; auch ist FE beyden gemein. Nun war nach Obigem GE = EH. Folglich ist (1, 8. S.) GEF = HEF, folglich EF auf GEH in E perpendikular.

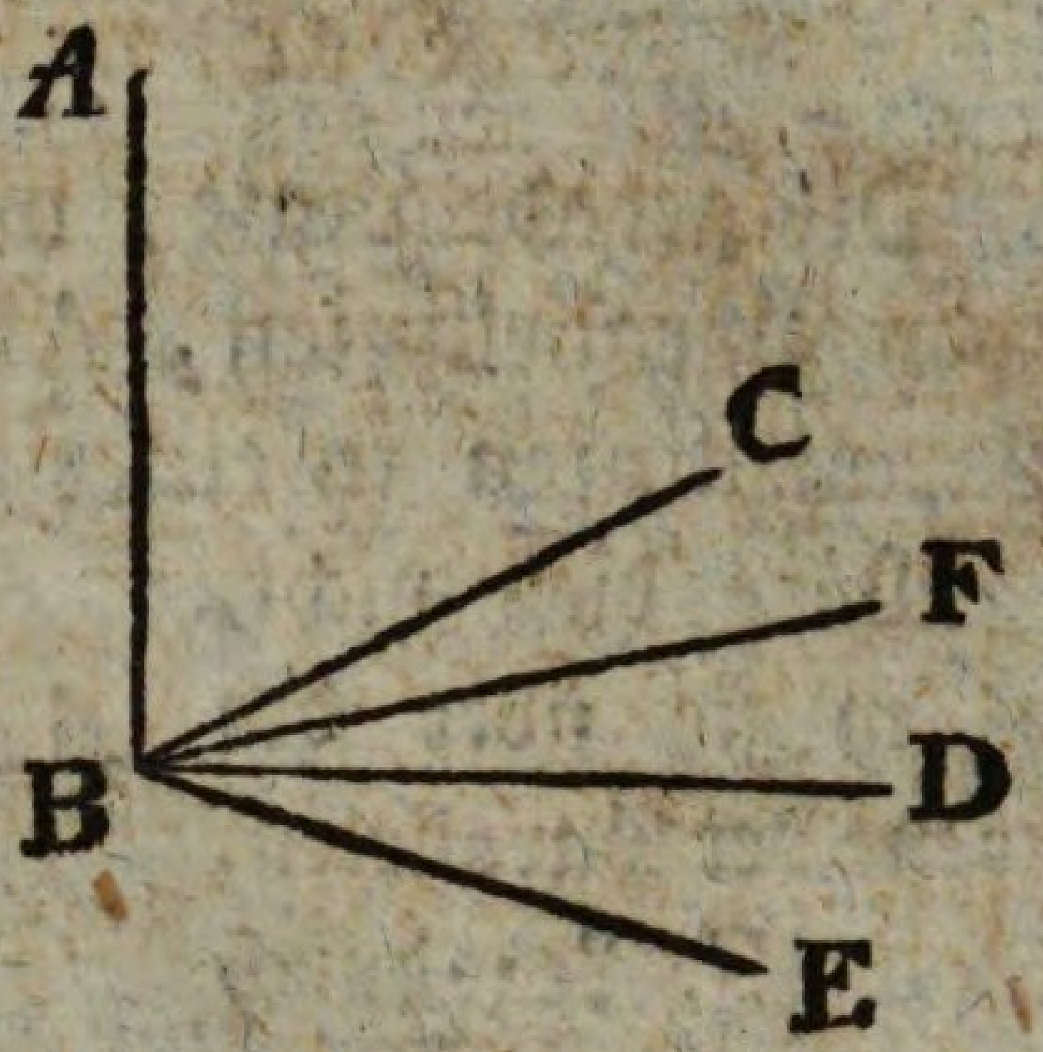
Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß EF auf jeder Linie, die, wie GEH, in der Ebene der AB und DC durch E gezogen ist, perpendikular sey. Folglich ist (11, 3. E.) EF auf dieser Ebene perpendikular.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Drey aus einem Punkte, B, ausgehende gerade Linien, BC, BD, BE, auf welchen in solchem Punkte eine gerade Linie perpendikular ist, sind in Einer Ebene.

Wäre dieses nicht, so seyen, wenn es möglich, BD, BE, in, BC aber, über der Grundebene. Wird nun die Ebene durch AB,

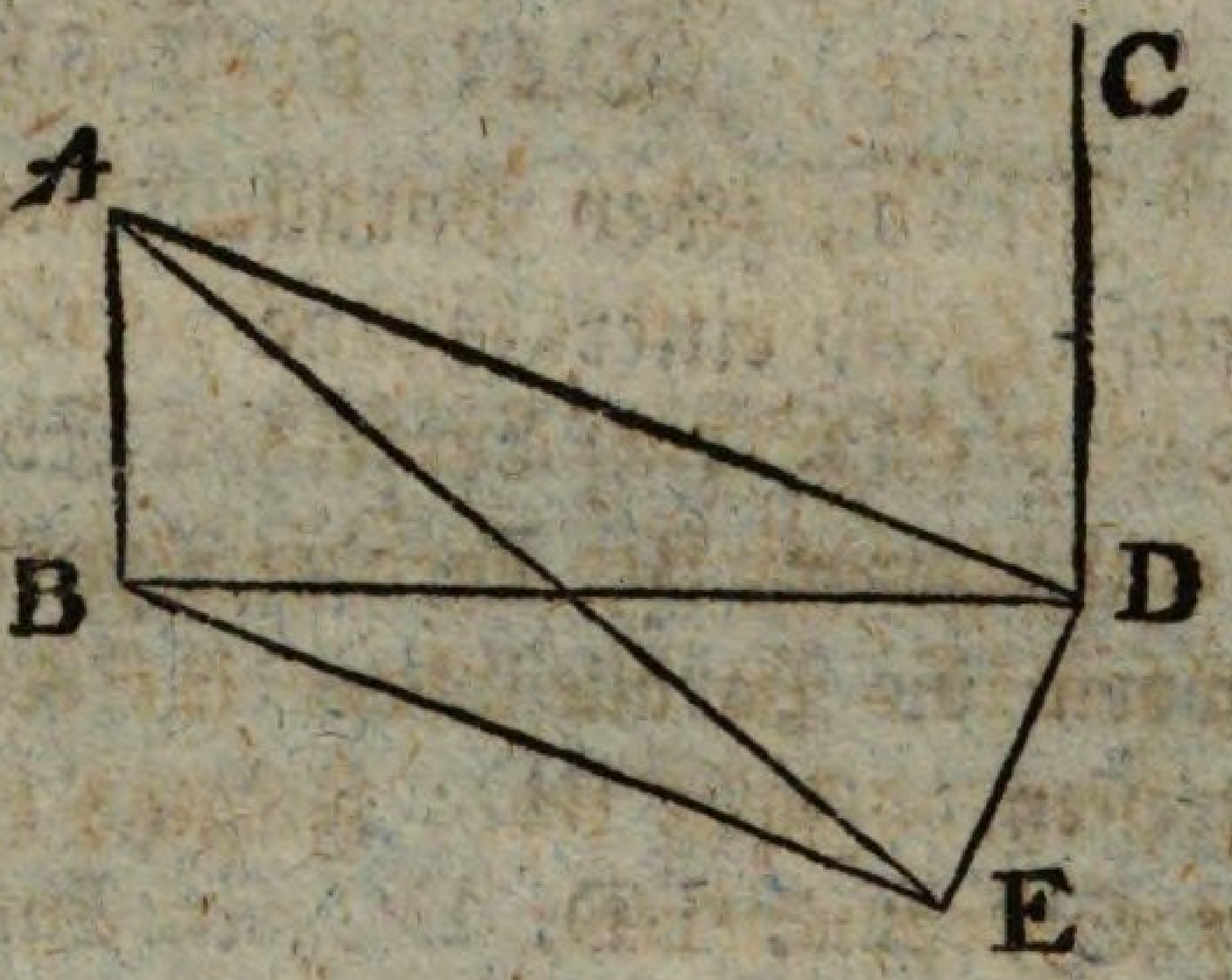
AB, BC, hinreichend erweitert: so schneidet sie (11, 3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie, BF, und es sind in der darauf stehenden Ebene die geraden Linien AB, BC, BF. Nun ist AB auf BD, BE, also auf der Grundebene, folglich (11, 4. S.) auch auf BF, perpendikular, also ABF = R.; aber auch ABC = R. Folglich wäre ABF = ABC; welches, da ABF, ABC in Einer Ebene sind, (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach ist BC nicht in einer andern Ebene, als BD, BE sondern mit ihnen in Einer Ebene.



Der 6. Satz. Lehrsatz.

Zwey auf derselben Ebene perpendikular stehende gerade Linien, AB, CD, sind parallel.

Es seyen B, D, die Punkte, worin die Perpendikel die Ebene treffen. Ziehe BD, errichte in solcher Ebene auf BD in D den Perpendikel DE, mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD.

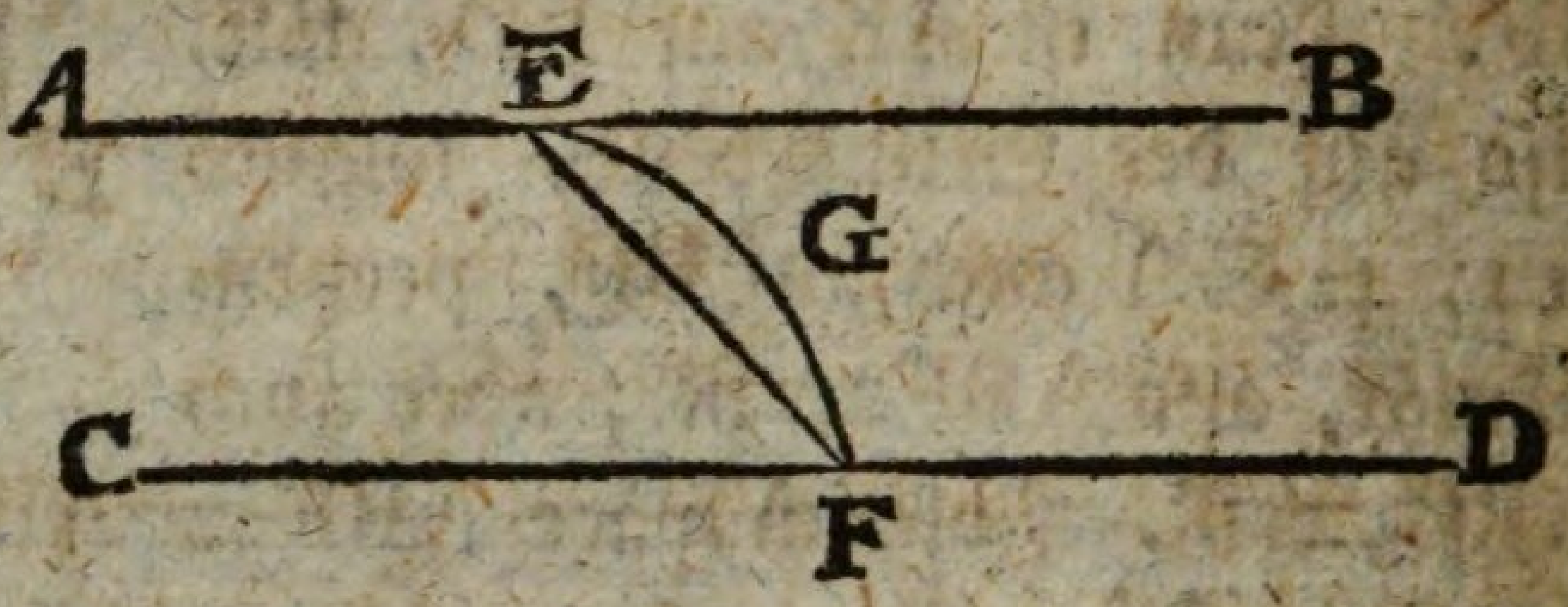


Da AB auf der Grundebene perpendikular, so sind (11, 3. E.) ABD, ABE, rechte Winkel. Aus eben dem Grunde sind auch CDB, CDE, rechte Winkel. Nun ist AB = DE, und BD = BD, auch ABD = DBE = R. Folglich ist (1, 4. S.) AD = BE. Da hiernach DE = AB, AD = BE, AE = AE: so ist (1, 8. S.) EDA = ABE = R.; also ED auf DA perpendikular; aber auch auf DB, DC. Folglich sind (11, 5. S.) BD, DA, DC, in Einer Ebene, in welcher (11, 2. S.) auch AB ist. Nun sind ABD, BDC, rechte Winkel. Folglich ist (1, 28. S.) AB der CD parallel.

Der

Der 7. Satz. Lehrsatz.

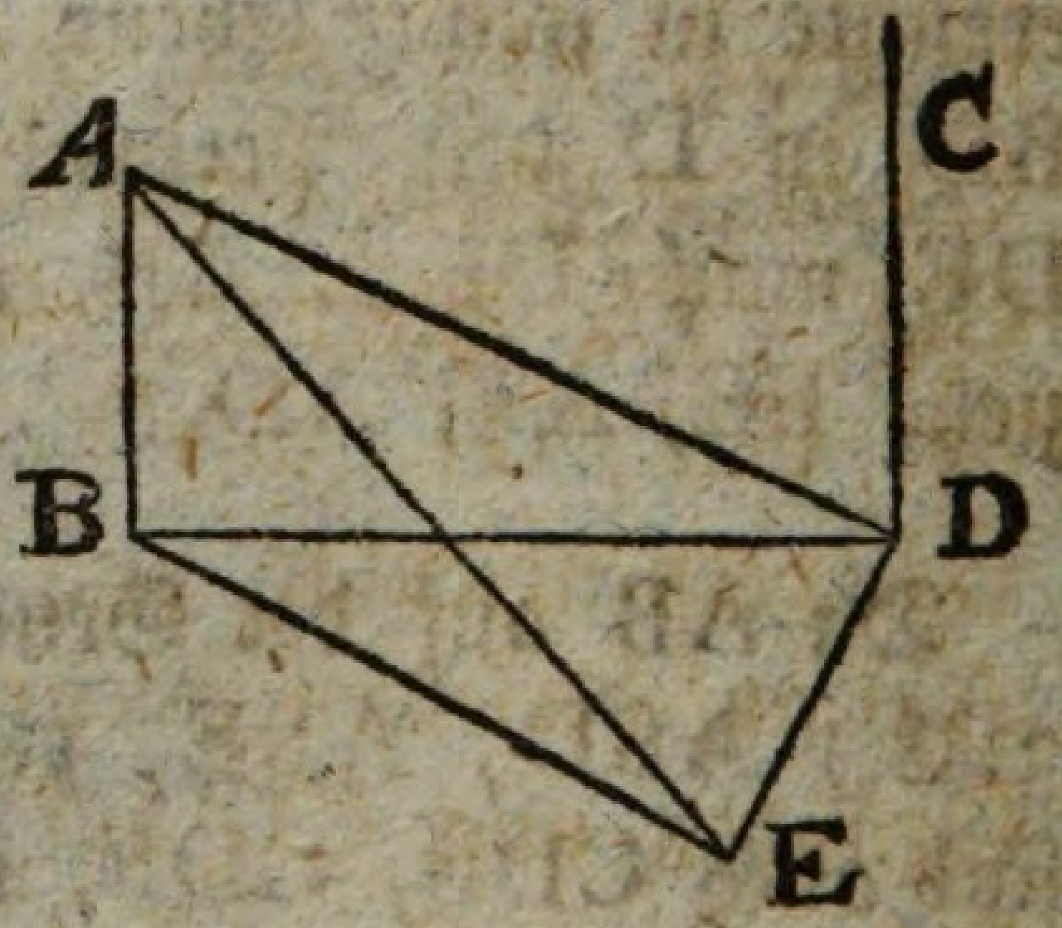
Die gerade Linie, welche beliebige Punkte, E, F, in zwey Parallellinien, AB, CD, verbindet, ist mit den Parallellinien in einerley Ebene.



Wäre dieß nicht, so sey sie über der Ebene der Parallelen, wie EGF. Lege durch sie eine Ebene, welche (11, 3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie EF schneidet, die also mit der geraden Linie EGF einen Raum einschließt, welches (1, 12. G.) unmöglich ist. Demnach ist die gerade Linie zwischen den Punkten, E, F, nicht über, sondern in derselben Ebene, in welcher die Parallellinien, AB, CD, sind.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Parallellinien, AB, CD, die eine, AB, auf irgend einer Ebene perpendikular: so ist auch die andere, CD, auf derselben Ebene perpendikular.



Es seyen B, D, die Punkte, worin die Parallellinien die Ebene treffen. Ziehe BD: so sind (11, 7. S.) AB, BD, DC, in Einer Ebene. Errichte in der Grundebene auf DB in D den Perpendikel DE, mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD.

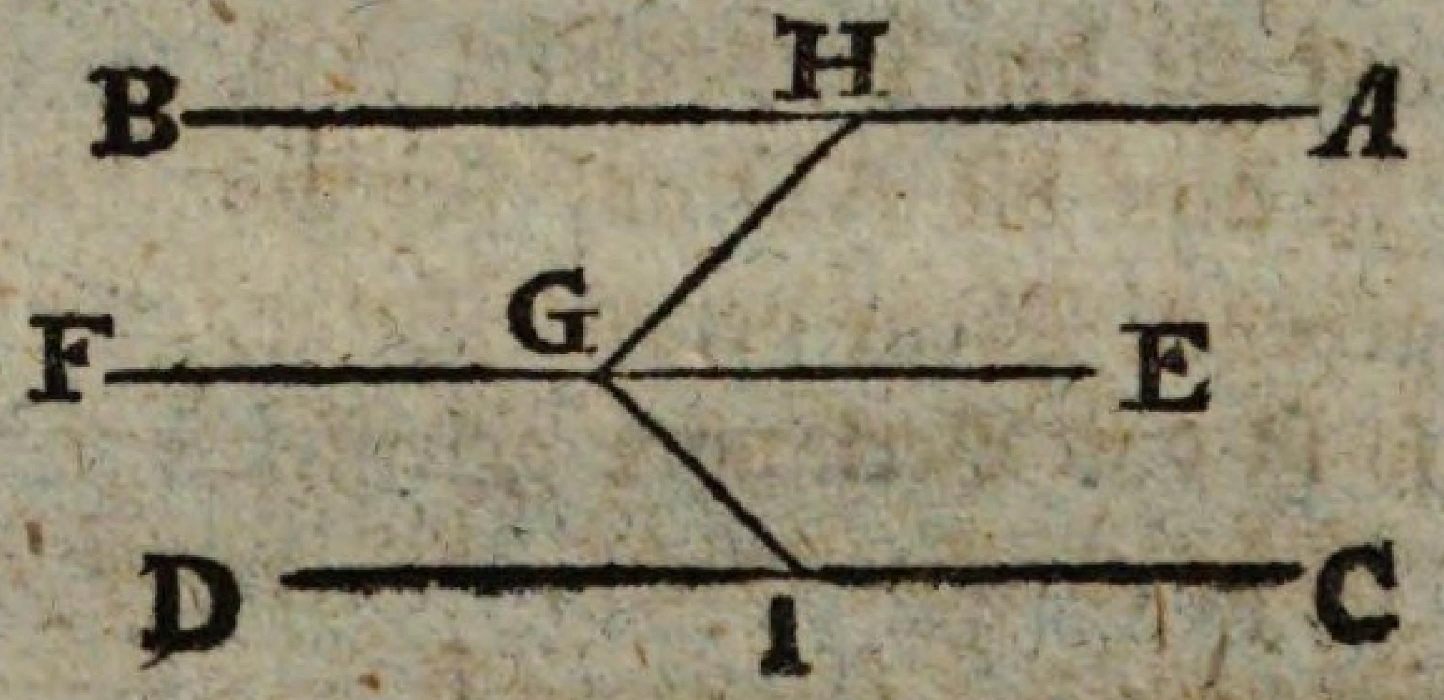
Da AB auf der Grundebene perpendikular, so ist (11, 3. E.) ABD = ABE = R. Und weil AB, CD, parallel sind, so ist (1, 29. S.) ABD + CDB = 2 R. Nun ist ABD = R., folglich ist auch CDB = R., also CD auf DB perpendikular.

Da

Da ABD = EDB = R., AB = DE, BD = BD: so ist (1, 4. S.) AD = BE. Da hiernach DE = AB, AD = BE, AE = AE: so ist (1, 8. S.) ABE = EDA. Nun ist ABE = R. Folglich ist auch EDA = R., also ED auf DA perpendikular; aber, weil BDE = R., auch auf DB; folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch DB, DA, folglich (11, 3. E.) auch auf DC, welche mit dem Triangel ADB in Einer Ebene ist, weil sie nach Obigem mit AB, BD, in Einer Ebene ist. Demnach ist CD auf DE perpendikular, aber nach Obigem auch auf DB, folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch DE, DB, das ist, auf einerley Ebene mit AB.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Die geraden Linien, AB, CD, welche einer und derselben geraden Linie, EF, mit der sie nicht in einerley Ebene liegen, parallel sind, sind auch einander parallel.

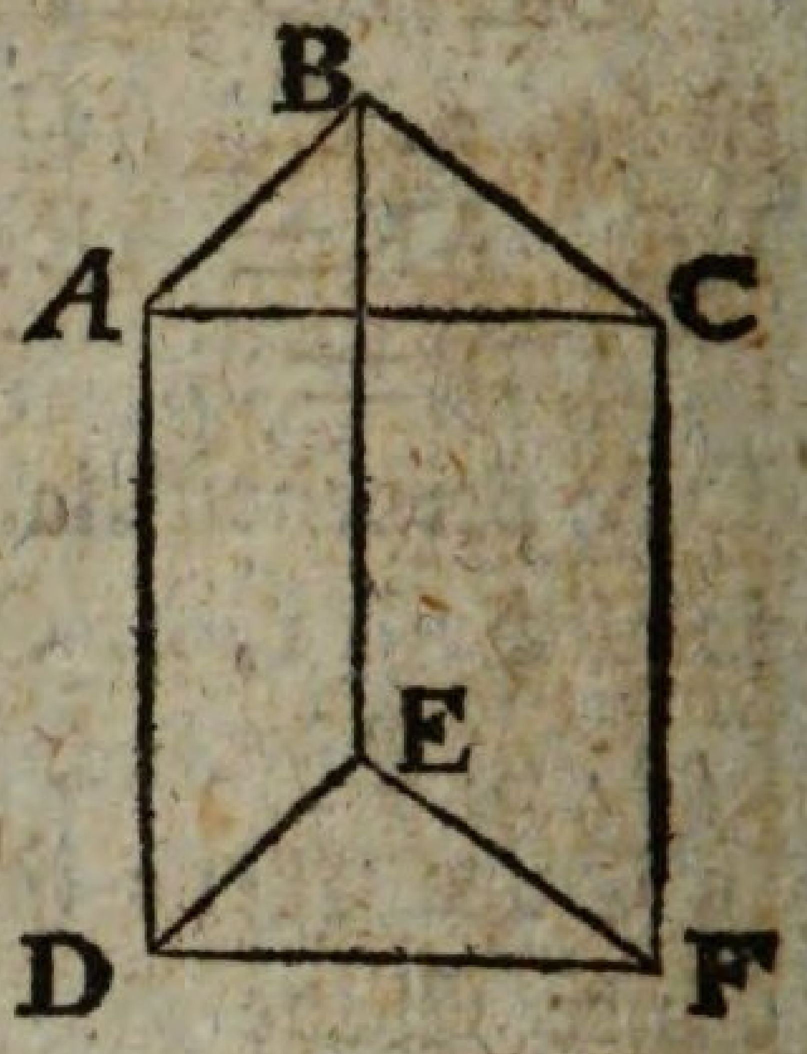


Nimm in EF willkührlich einen Punkt G, errichte auf EF in G, die Perpendikel, GH in der Ebene durch EF, AB, und GI in der Ebene durch EF, CD. Da hiernach EF auf GH, GI, also (11, 4. S.) auf der Ebene durch GH, GI, perpendikular, und der AB parallel ist: so ist (11, 8. S.) AB auf derselben Ebene perpendikular. Nun ist aus eben den Gründen auch CD auf dieser Ebene perpendikular. Folglich sind (11, 6. S.) AB, CD, parallel.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel, ABC, DEF, die von parallelen Linien, AB, DE; BC, EF, eingeschlossen werden, sind einander gleich.

Mache

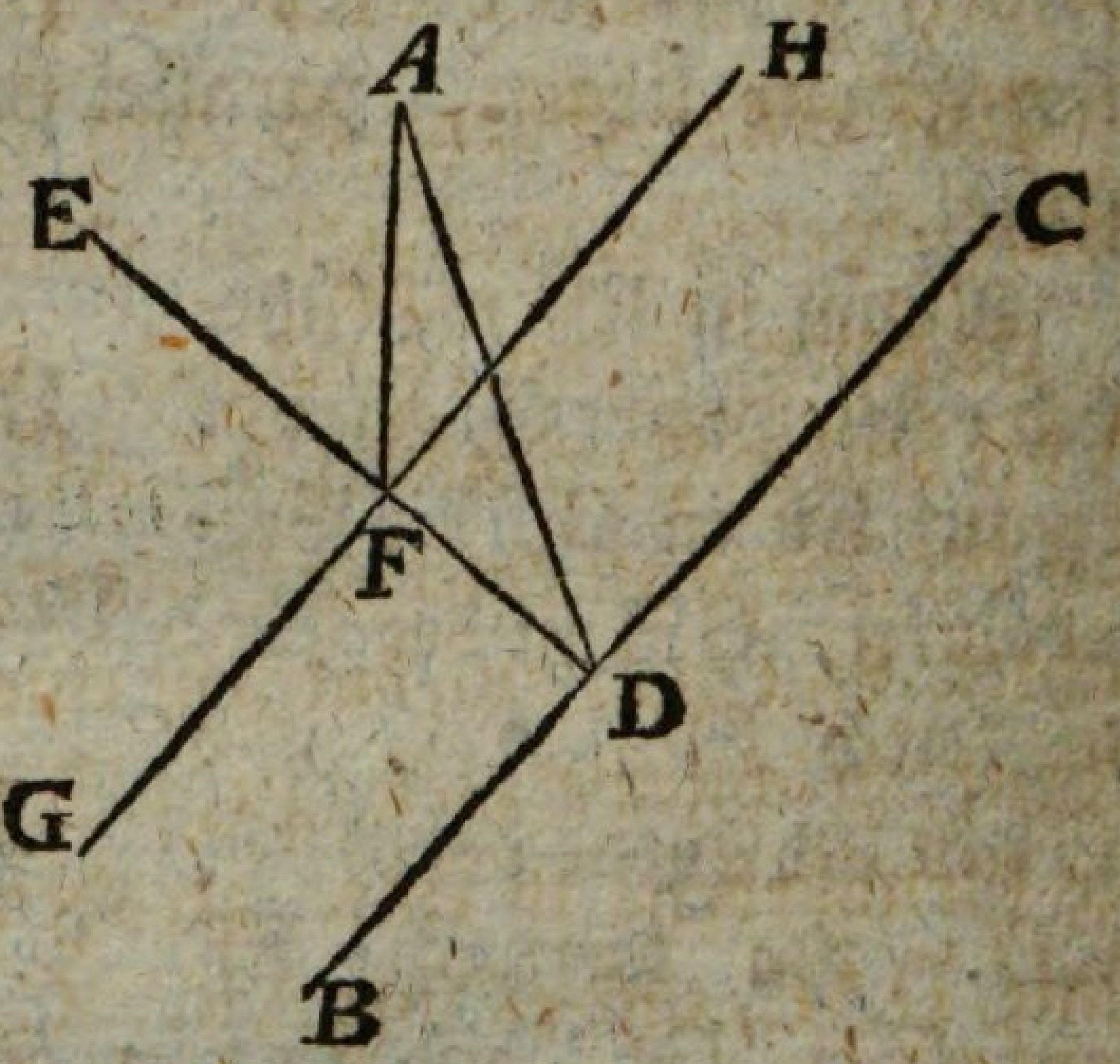


Mache AB = DE, BC = EF, und ziehe AD, CF, BE; AC, DF.

Da AB, DE, gleich und parallel: so sind (1, 33. S.) auch AD, BE, gleich und parallel. Nun sind aus eben den Gründen CF, BE, gleich und parallel. Folglich sind (11, 9. S. und 1, 1. G.) AD, CF, parallel und gleich; folglich (1, 33. S.) auch AC, DF. Da hiernach AG = DF, und nach Obigem AB = DE, BC = EF: so ist (1, 8. S.) ABC = DEF.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene Ebene von einem über derselben gegebenen Punkte, A, einen Perpendikel zu fällen.



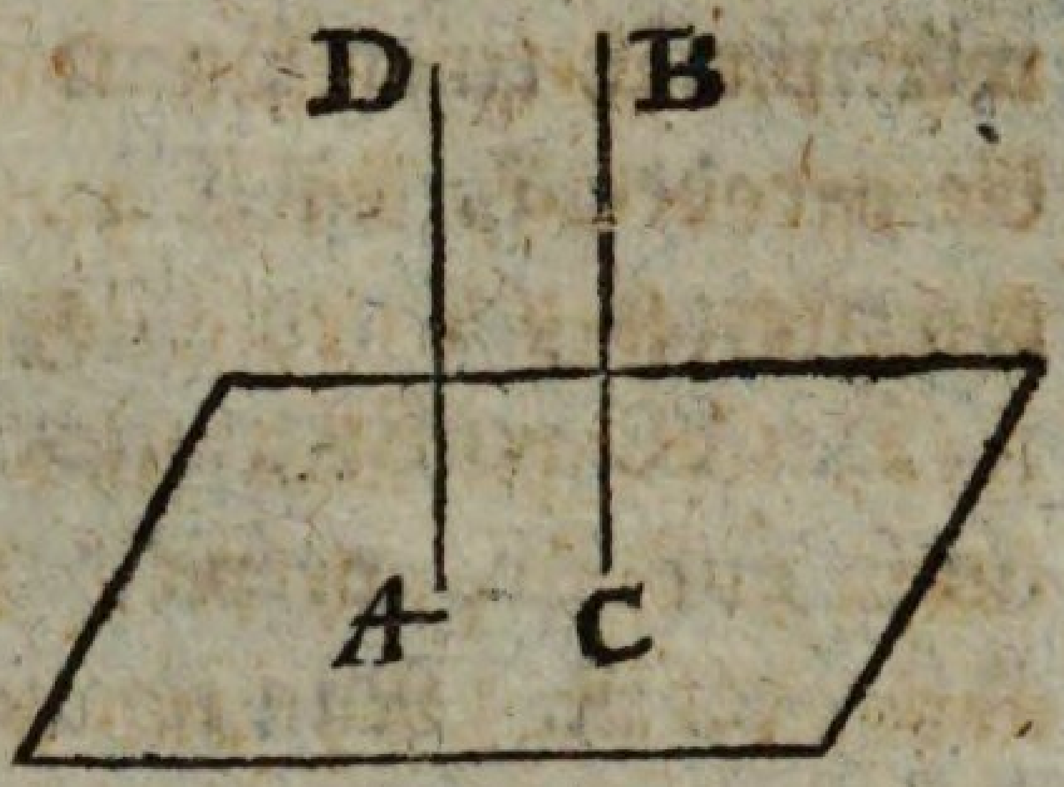
In der gegebenen Ebene ziehe willkührlich eine gerade Linie BC, und fälle (1, 12. S.) auf sie den Perpendikel AD. Ist nun die AD auf der gegebenen Ebene perpendikular, so ist das Verlangte geleistet. Ist sie es aber nicht, so errichte in der gegebenen Ebene (1, 11. S.) auf BC in D den Perpendikel DE, und fälle (1, 12. S.) aus A auf DE den Perpendikel AF: so ist dieser der verlangte.

Denn zieht man (1, 31. S.) durch F die GH der BC parallel: so ist, weil BC auf DE, DA, also (11, 4. S.) auf der Ebene durch DE, DA, perpendikular, (11, 8. S.) auch GH auf dieser Ebene, folglich (11, 3. E.) auch auf FA, welche die GH in F trifft, und in der Ebene durch DE, DA ist. Demnach ist AF auf GH, perpendikular; aber nach Obigem auch auf DE, folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch GH, DE, also auf der gegebenen Ebene.

Der

Der 12. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen Ebene aus einem in derselben gegebenen Punkte, A, einen Perpendikel zu errichten.

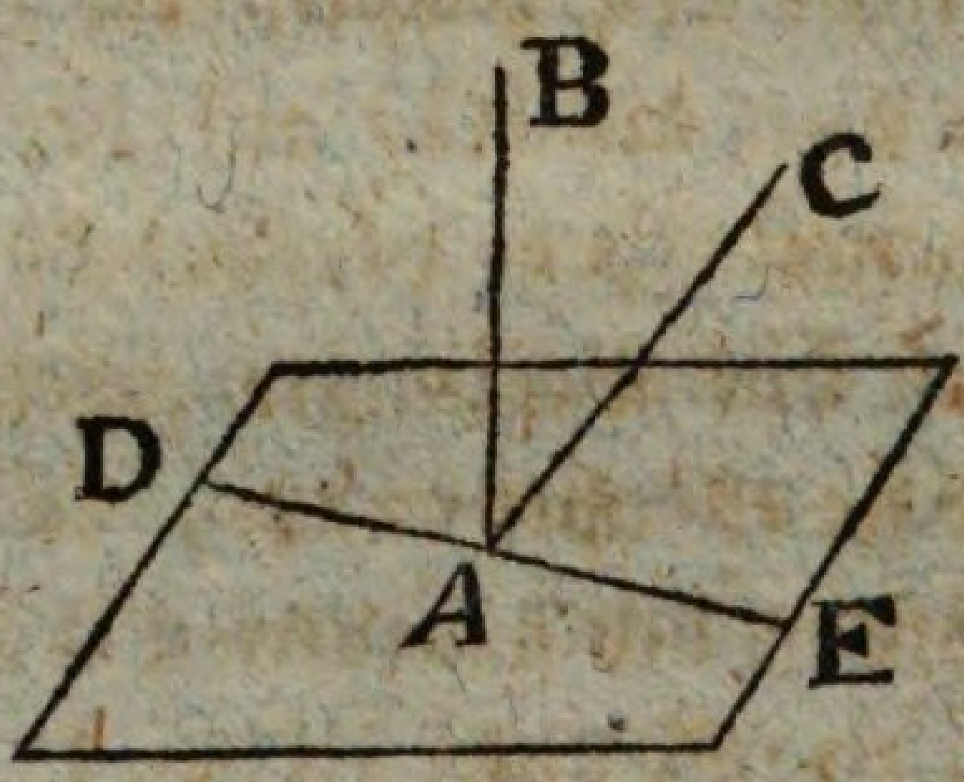


Nimm über der Ebene irgend einen Punkt, B, fälle (11, 11. S.) von ihm auf die Ebene den Perpendikel BC, und ziehe (1, 31. S.) durch A mit BC die AD parallel: so ist diese der verlangte Perpendikel.

Denn da AD, BC, parallel, und CB auf der gegebenen Ebene perpendikular ist: so ist (11, 8. S.) auch AD auf dieser Ebene perpendikular.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Auf einer Ebene können aus einem Punkte, A, in ihr nicht zwey Perpendikel an einerley Seite errichtet werden.

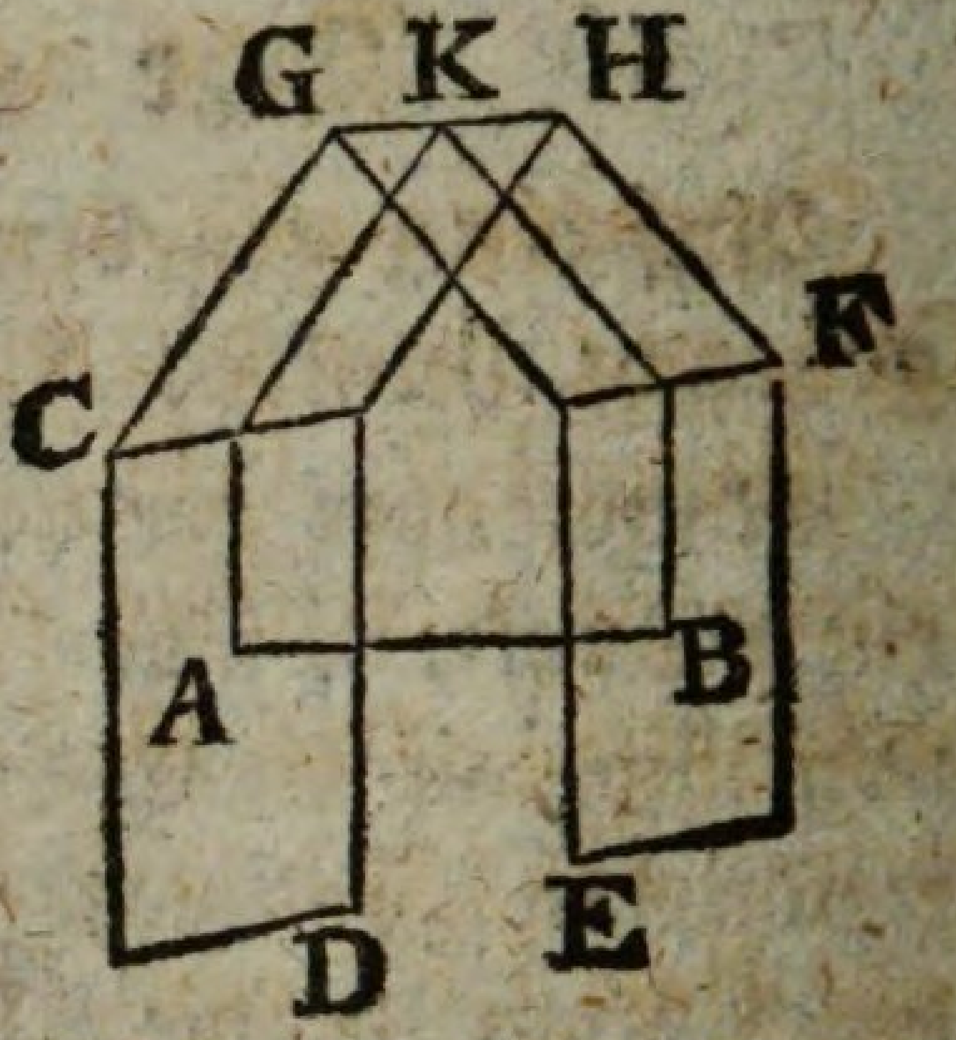


Es seyen, wenn es möglich, in A die beyden Perpendikel AB, AC, auf der Ebene an einerley Seite errichtet. Legt man nun durch sie eine Ebene: so schneidet diese (11,3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie, DAE, und es sind AB, AC, AE, in Einer Ebene. Nun sind (11, 3. E.) BAE, CAE, rechte Winkel, weil AB, AC, auf der Grundebene, in welcher AE ist, perpendikular sind. Folglich wäre BAE = CAE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach können nicht AB, AC, zugleich auf derselben Ebene in einerley Punkte A perpendikular seyn.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Ebenen, CD, EF, auf welchen dieselbe gerade Linie, AB, perpendikular ist, sind parallel.

Wären

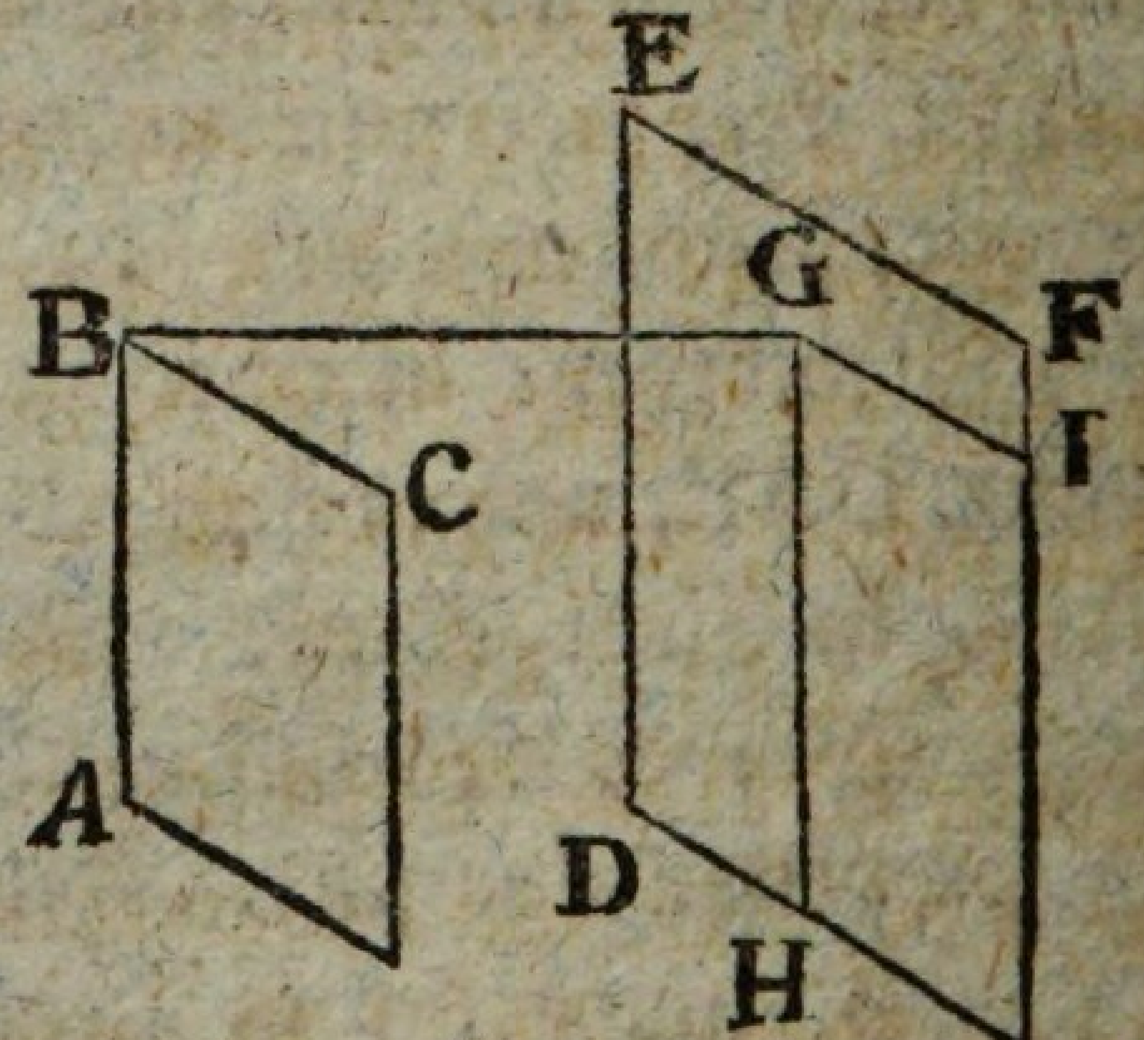


Wären sie nicht parallel, so träfen sie genugsam erweitert zusammen, und schnitten einander (11, 3. S.) in einer geraden Linie GH. Nimm in GH willkührlich einen Punkt K, und ziehe die geraden Linien KA, KB, in den erweiterten Ebenen CD, EF.

Da AB auf EF, folglich (11, 3. E.) auch auf BK perpendikular: so ist ABK = R. Nun ist aus eben dem Grunde auch BAK = R. Folglich wären im △ KAB zwey Winkel zusammen zweyen rechten gleich, welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Demnach können die Ebenen CD, EF, erweitert nicht zusammentreffen, und sind folglich (11, 8. E.) parallel.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Sind die geraden Linien, welche zwey Winkel in verschiedenen Ebenen, ABC, DEF, einschließen, parallel: so sind die Ebenen, AC, DF, in denen diese Winkel liegen, parallel.

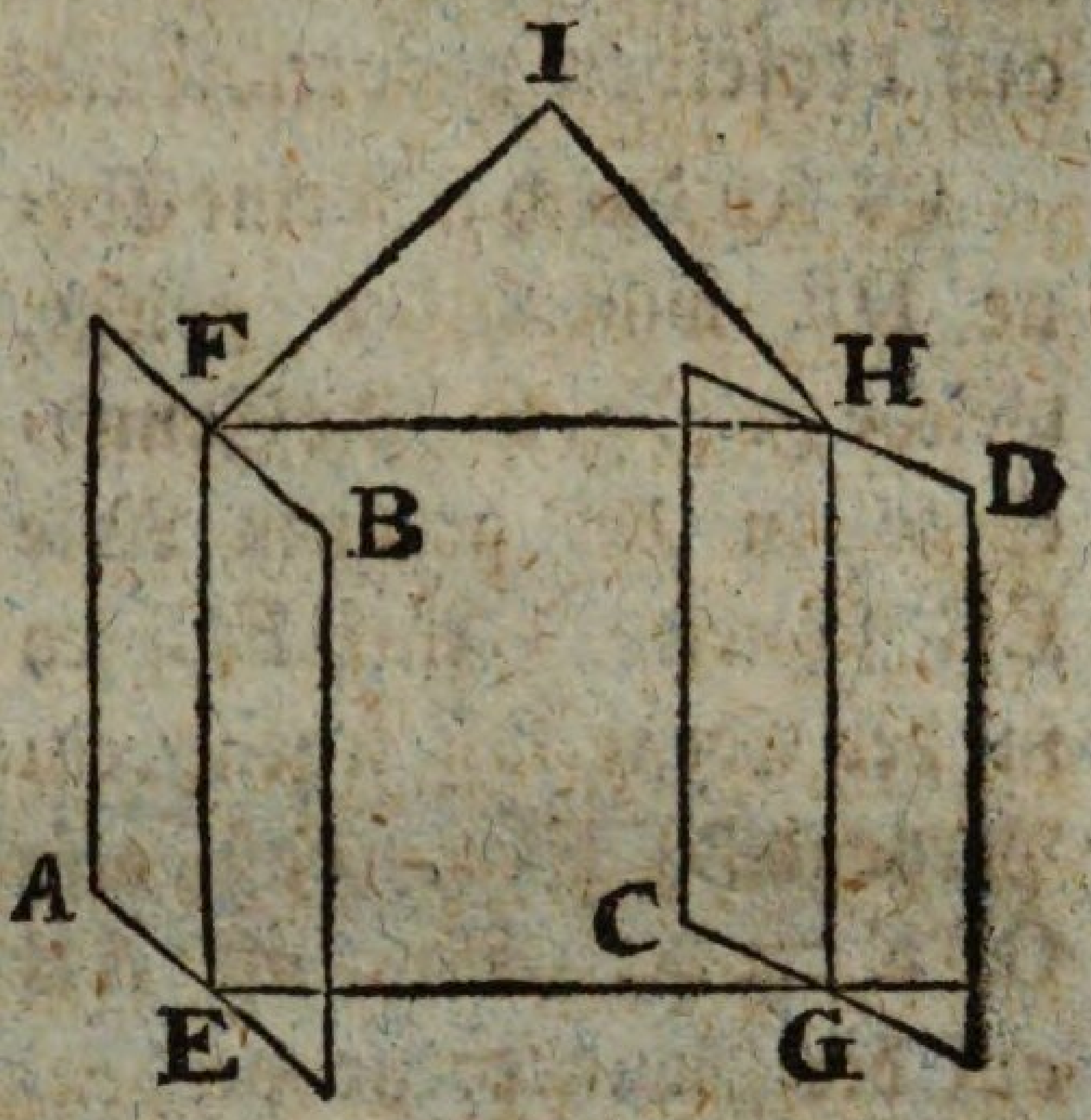


Fälle (11, 11. S.) von B auf die Ebene DF den Perpendikel BG, und ziehe (1, 31. S.) durch G in solcher Ebene mit ED die GH, und mit EF die GI parallel.

Da BG auf der Ebene DF perpendikular, so ist (11, 3. E.) BGH = R. = BGI. Nun ist AB der ED, folglich auch (11, 9. S.) der GH parallel, also (1, 29. S.) BGH + ABG = 2 R. Folglich ist ABG = R., also GB auf BA perpendikular; aber aus eben den Gründen auch auf BC; folglich (11, 4. S.) auf der Ebene AC. Nun ist nach Obigem GB auch auf der Ebene DF perpendikular. Folglich sind (11, 14. S.) die Ebenen AC, DF, parallel.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

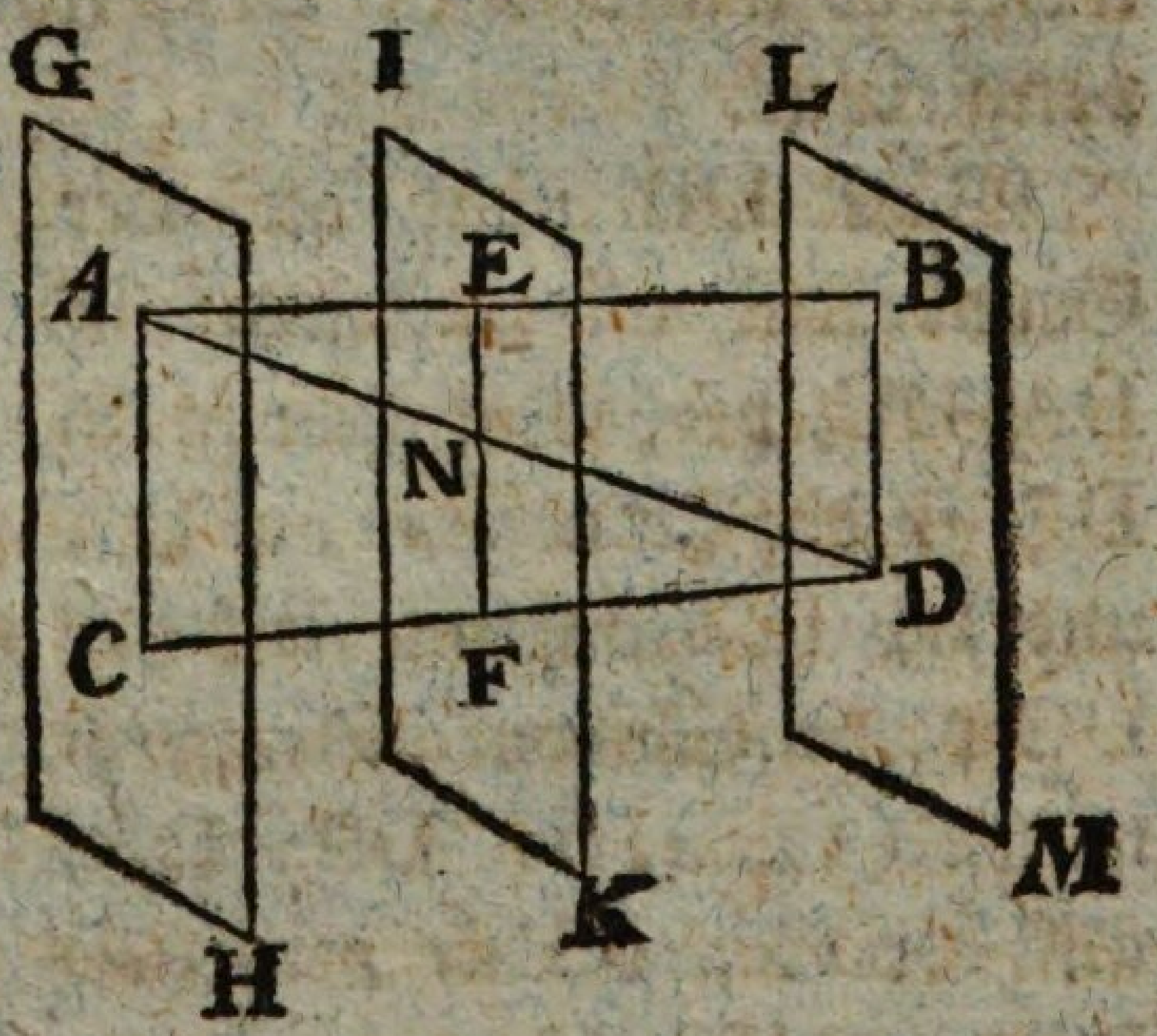
Zweyer parallelen Ebenen, AB, CD, Durchschnitte, EF, GH, mit einer dritten Ebene, EFGH, sind parallel.



Wären EF, GH, nicht parallel, so träfen sie genugsam verlängert, etwa in I, zusammen. Da (11, 1. S.) die gerade Linie EFI, ganz, also auch der Punkt I, in der Ebene AB, und aus denselben Gründen der Punkt I in der Ebene CD ist: so träfen die Ebenen AB, CD, genugsam erweitert zusammen, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach können EF, GH, nicht auf dieser Seite, und aus eben den Gründen auch nicht auf der entgegengesetzten Seite, zusammentreffen, und sind also parallel.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, werden von parallelen Ebenen, GH, IK, LM, proportionirt geschnitten.

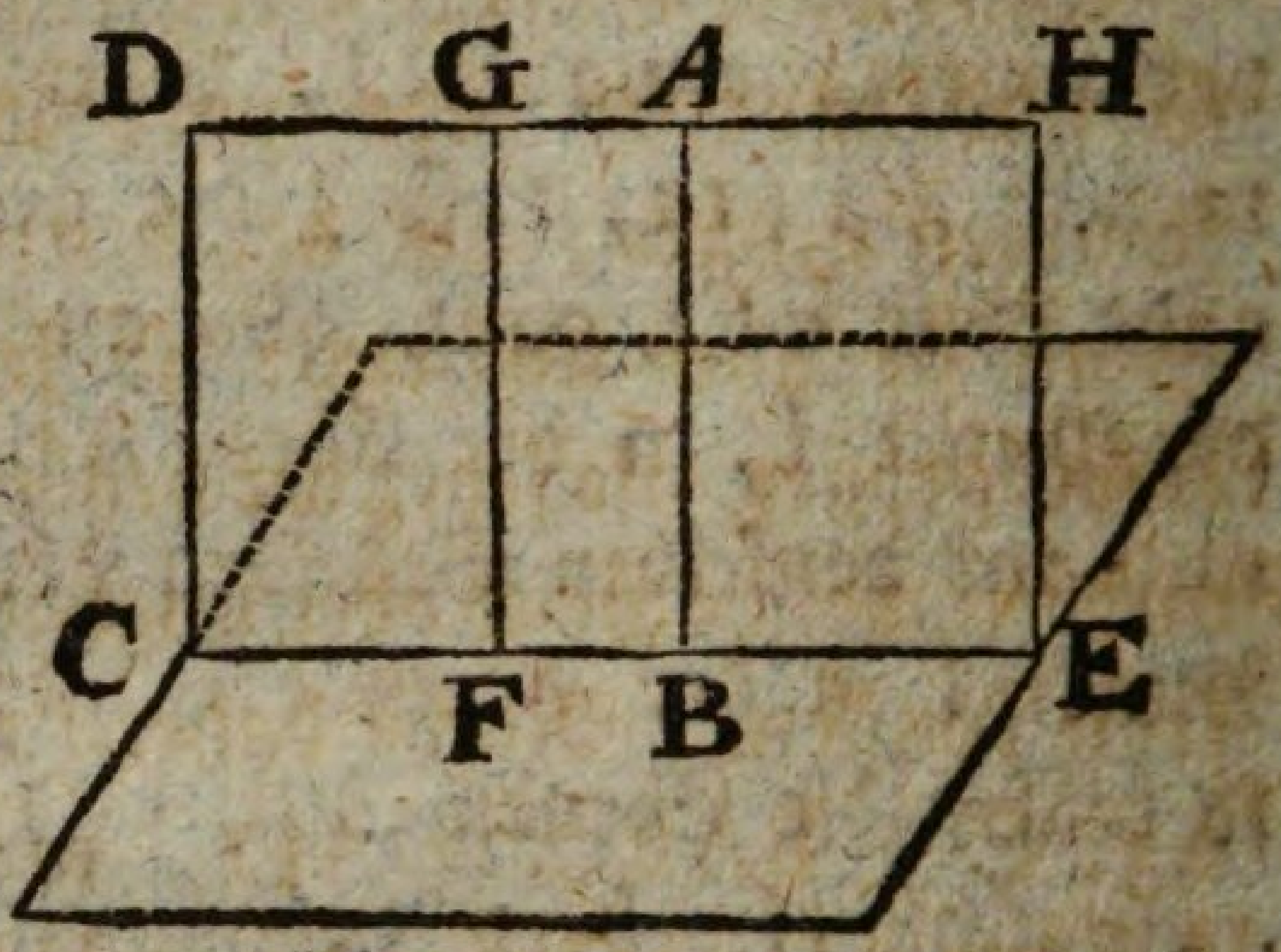


Ziehe AC, BD, DA, von denen die letztere durch N in IK gehet; ziehe EN, NF.

Da (11, 16. S.) der Ebene ENDB, Durchschnitte, EN, BD, mit den parallelen Ebenen IK, LM, parallel sind: so ist (6, 2. S.) AE : EB = AN : ND. Nun ist aus eben den Gründen AN : ND = CF : FD. Folglich ist (5, 11. S.) AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

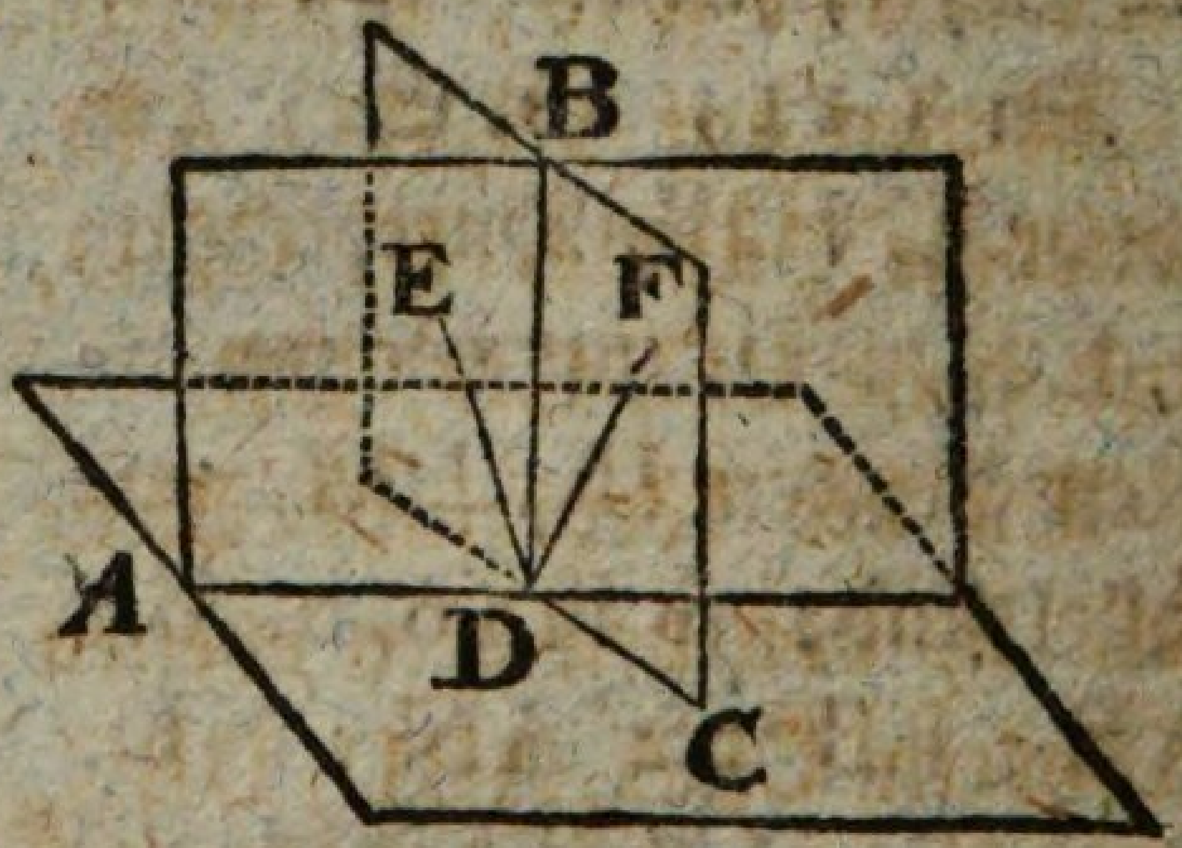
Ist eine gerade Linie, AB, auf irgend einer Ebene perpendikular: so sind alle durch die Linie gelegten Ebenen auf derselben perpendikular.



Es sey durch AB eine Ebene DE willkührlich gelegt, welche (11, 3. S.) die Grundebene in der geraden Linie EC schneide. Auf EC sey in der Ebene DE irgend ein Perpendikel FG, daß also GFE = R. Nun ist AB auf der Grundebene perpendikular, also (11, 3. E.) auch ABE = R. Folglich sind (1, 28. S.) AB, FG, parallel. Folglich ist (11, 8. S.) auch FG, folglich (11, 4. E.) auch die (durch AB gelegte) Ebene DE, auf der Grundebene perpendikular.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey einander schneidende Ebenen, AB, BC, auf irgend einer Ebene perpendikular: so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt, BD, auf derselben Ebene auch perpendikular.

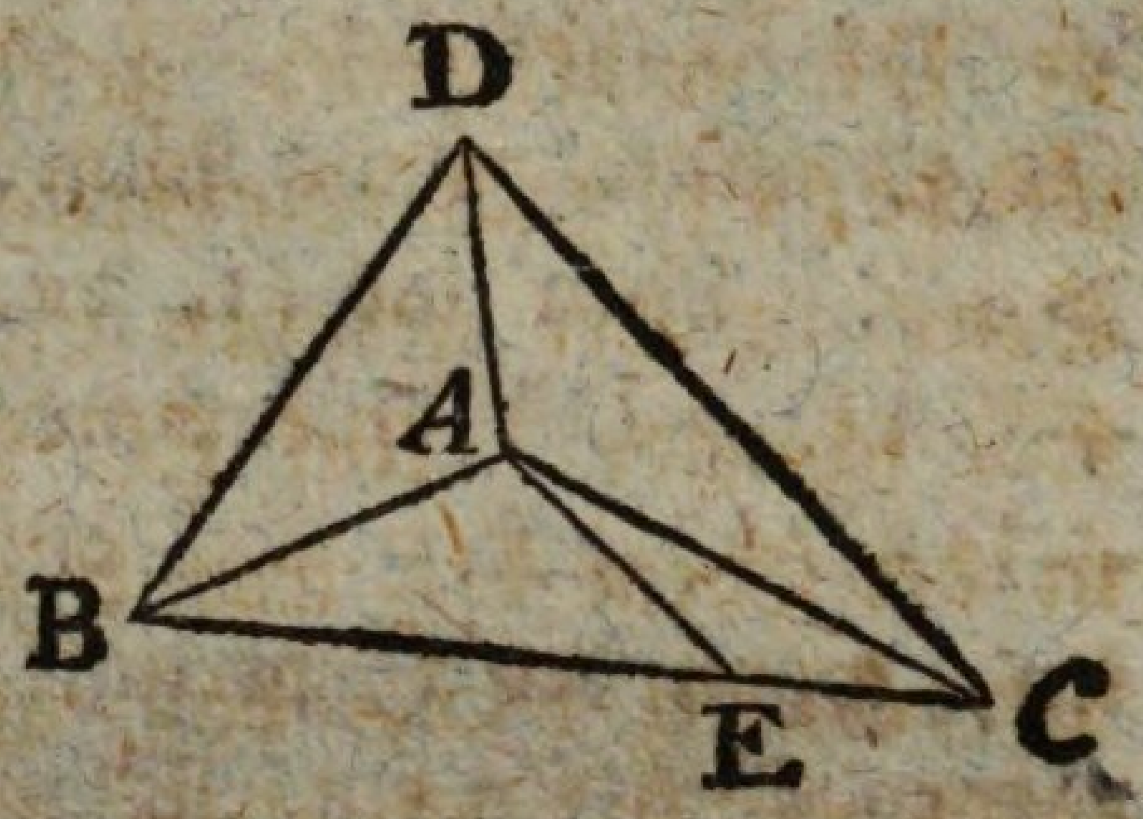


Wäre DB nicht auf der Grundebene, also auch nicht auf DA, DC, perpendikular: so sey DE, in der Ebene AB auf DA und DF in der Ebene BC auf DC perpendikular. Demnach wären (11, 4. E.) DE, DF, auf der Grundebene perpendikular, welches (11, 13. S.) unmöglich ist. Folglich kann auf der Grundebene keine andere Linie, als DB, perpendikular seyn.

Der

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Von drey ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche einen körperlichen Winkel, A, einschließen, sind jede zwey zusammen größer, als der dritte.

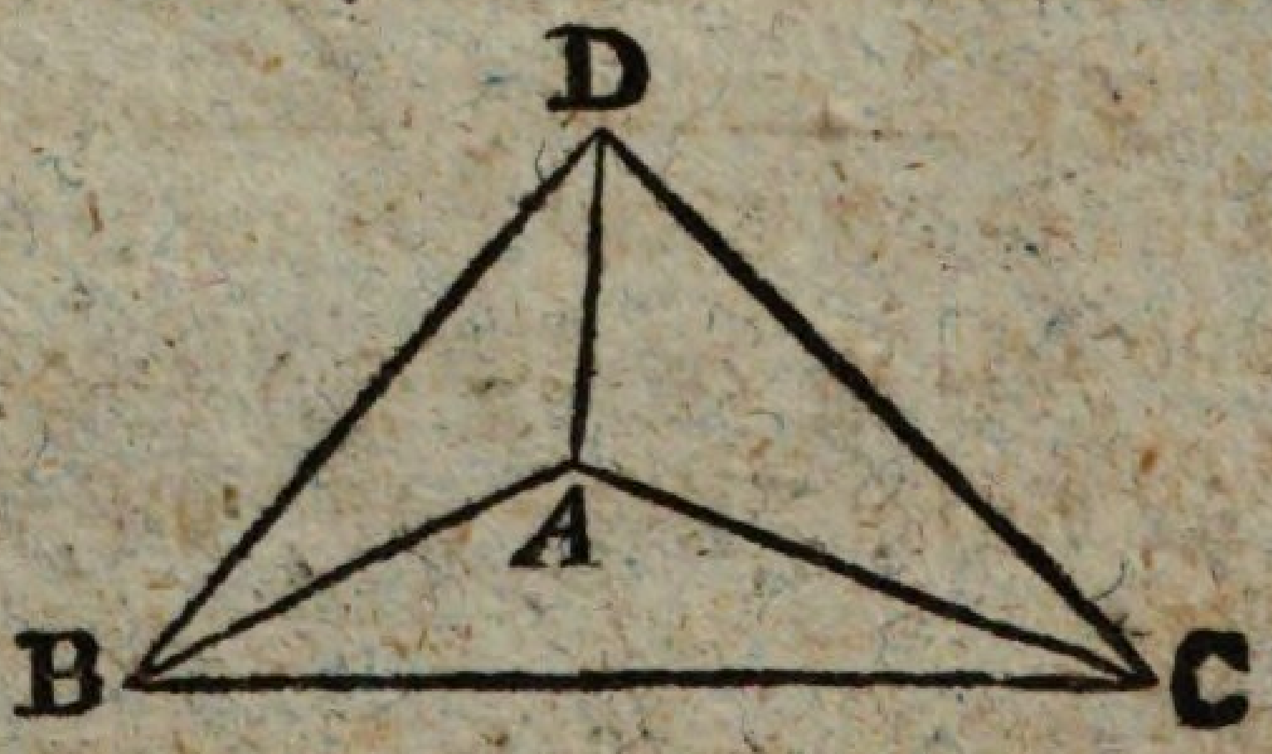


Sind diese drey Winkel gleich: so sind offenbar jede zwey zusammen größer, als der dritte. Sind sie aber ungleich: so sey BAC größer, als jeder der beyden andern, welche gleich oder ungleich seyn können. Mache daher (1, 23. S.) $BAE = BAD$, und $AE = AD$. Ziehe durch E die BEC, welche AB, AC, in B, C, schneidet, und ziehe DB, DC.

Da hiernach $BAE = BAD$, $AE = AD$, $AB = AB$: so ist (1, 4. S.) $BE = BD$. Nun ist (1, 20. S.) $BD + DC > BE + EC$. Folglich ist (1, 5. S.) $DC > EC$; folglich, weil $AD = AE$, und $AC = AC$, (1, 25. S.) $DAC > EAC$: folglich, weil $DAB = BAE$, (1, 4. S.) $DAC + DAB > BAC$.

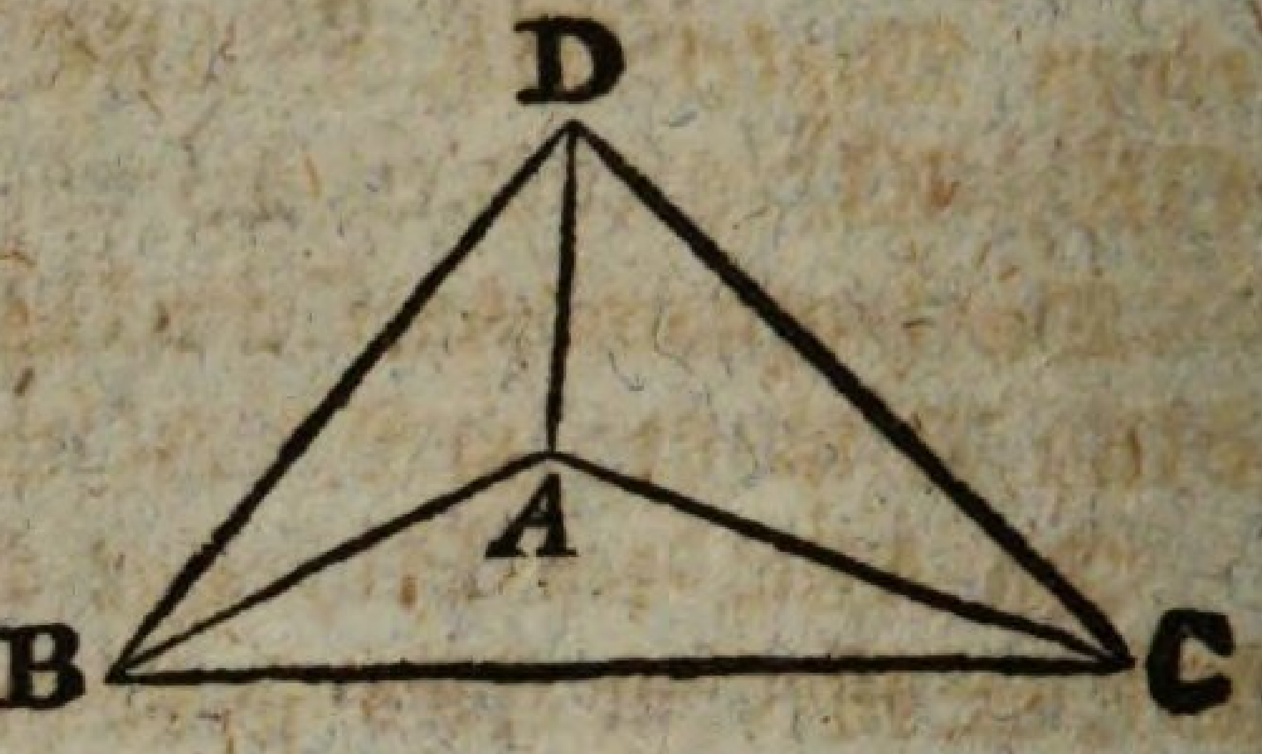
Der 21. Satz. Lehrsatz.

Jeder körperliche Winkel, A, wird von ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche zusammen kleiner als vier rechte sind, eingeschlossen.



Nimm auf AB, AC, AD, beliebige Punkte, B, C, D, und ziehe BC, CD, DB.

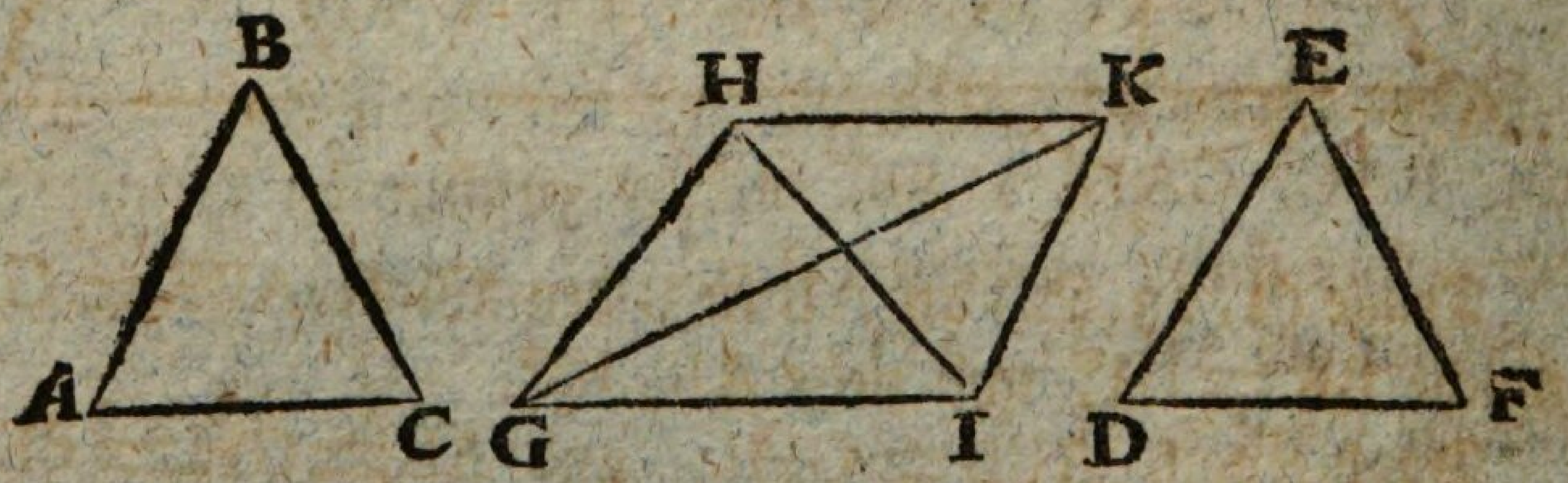
Da der körperliche Winkel, B, von den drey ebenen Winkeln, CBA, ABD, DBC, eingeschlossen wird; so ist (10, 20. S.) $CBA + ABD > DBC$. Aus eben den Gründen ist, beym körperlichen Winkel C, $BCA + ACD > DCB$, und beym körperlichen Winkel D, $CDA + ADB > BDC$.



Folglich ist $CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + DCB + BDC$. Nun sind (1, 32. S.) die letzt genannten drey Winkel $= 2$ R. Folglich sind die erst genannten sechs Winkel > 2 R. Nun sind (1, 32. S.) diese sechs Winkel nebst BAC + CAD + DAB zusammen $= 6$ R. Folglich ist $BAC + CAD + DAB < 4$ R. Auf ähnliche Art wird obiger Satz bewiesen, wenn der körperliche Winkel A auch von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind von drey ebenen Winkeln, ABC, DEF, GHI, jede zwey zusammen größer, als der dritte, und die geraden Linien, welche diese Winkel einschließen, alle einander gleich; so läßt sich aus den geraden Linien, AC, DF, GI, welche die Endpunkte der gleichen Linien verbinden, ein Triangel verzeichnen.



Hier ist (1, 22. S.) bloß zu beweisen, daß jede zwey dieser Linien, AC, DF, GI, zusammen größer, als die dritte sind.

Sind nun die drey ebenen Winkel ABC, DEF, GHI, einander gleich: so sind (1, 4. S.) auch die Linien, AC, DF, GI, einander gleich; folglich offenbar jede zwey zusammen größer, als die dritte.

Sind

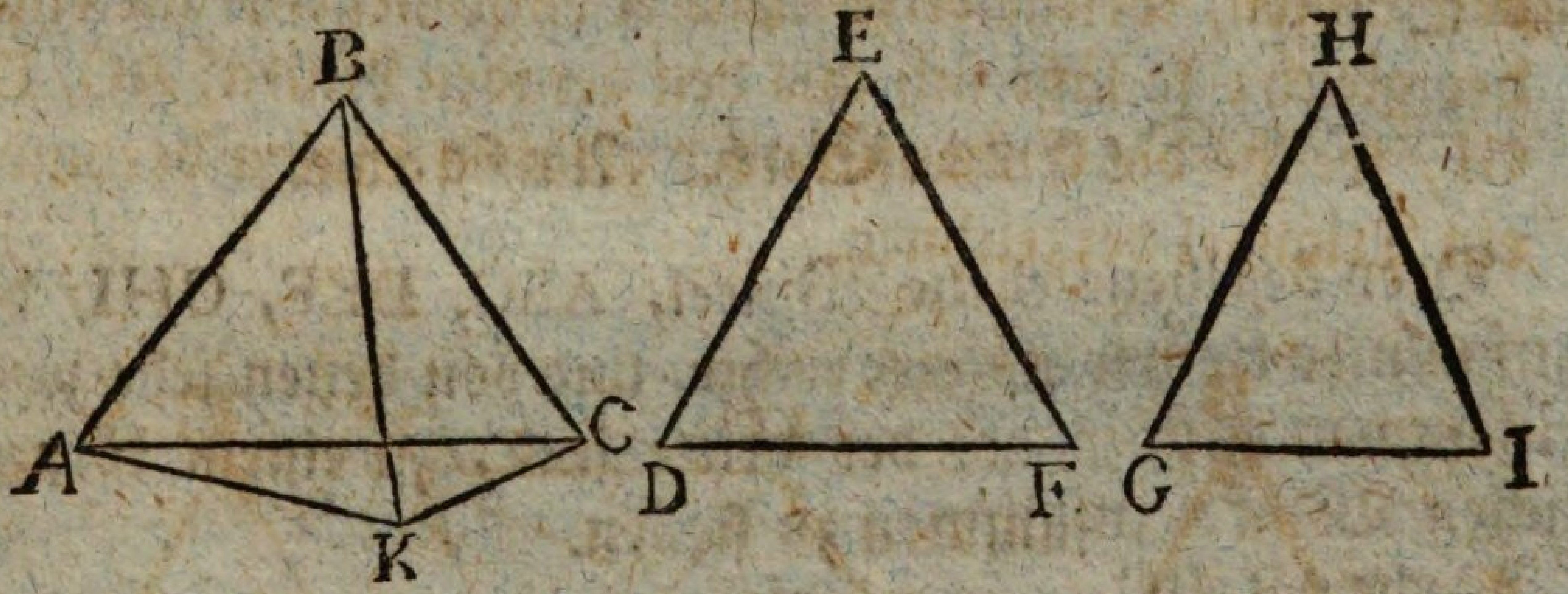
Sind sie aber ungleich: so lege (1, 23. S.) an HI in H einen Winkel IHK = ABC, mache HK = HI, und ziehe GK, KI.

Da hiernach ABC = IHK, und AB = HI = BC = HK: so ist (1, 4. S.) AC = IK.

Da ABC + GHI, das ist GHK > DEF, und GH = DE = HK = EF: so ist (1, 24. S.) GK > DF. Nun ist (1, 20. S.) GI + IK, das ist, GI + AC > GK. Folglich ist um so mehr GI + AC > DF.

Ein anderer Beweis.

Es sey von den drey nicht gleichen ebenen Winkeln der eine ABC, nicht kleiner, als jeder der übrigen DEF, GHI: so ist (1, 24. S.) die Seite AC nicht kleiner, als jede der übrigen DF, GI, folglich offenbar AC + DF > GI, und AC + GI > DF; also nur noch zu beweisen, daß auch DF + GI > AC.



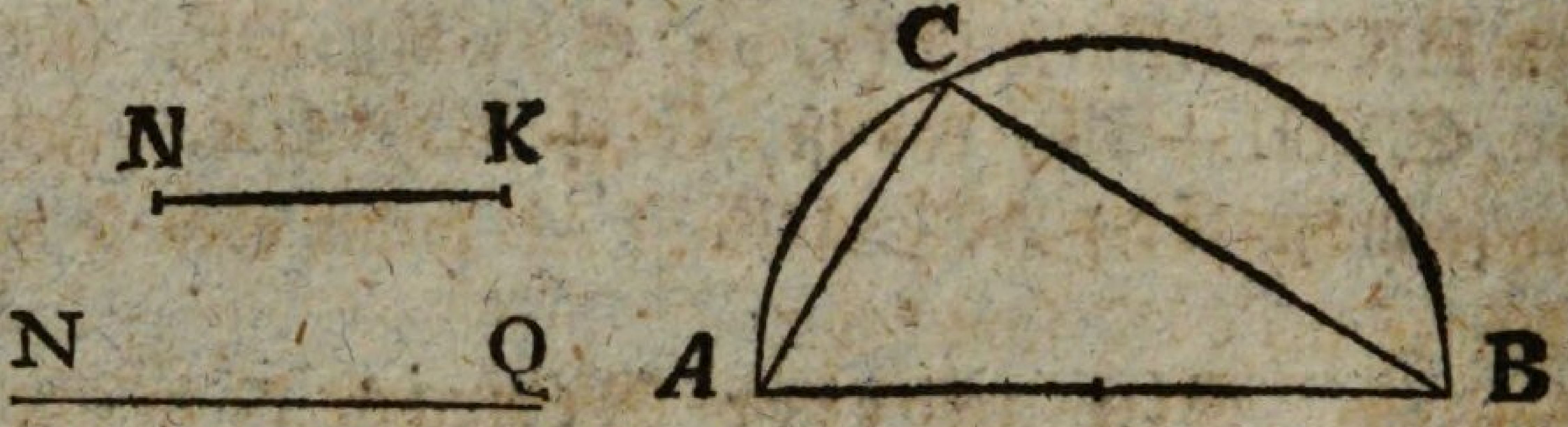
Trage (1, 23. S.) an AB in B den Winkel ABK = GHI, mache BK = HI, und ziehe AK, KC.

Da hiernach ABK = GHI, und AB = GH = BK = HI: so ist (1, 4. S.) AK = GI.

Da E + H > ABC, aber H = ABK: so ist E > CBK, aber CB = EF = BK = ED, folglich (1, 24. S.) DF > CK. Nun ist nach Obigem GI = AK. Folglich ist DF + GI > CK + AK, aber (1, 20. S.) CK + AK > AC, folglich noch viel mehr DF + GI > AC.

Lehnsatz.

Aus zwey gegebenen ungleichen geraden Linien, AB, KN, von denen AB > KN, die gerade Linie, NQ, zu finden, um deren Quadrat das Quadrat der AB das Quadrat der KN übertrifft.



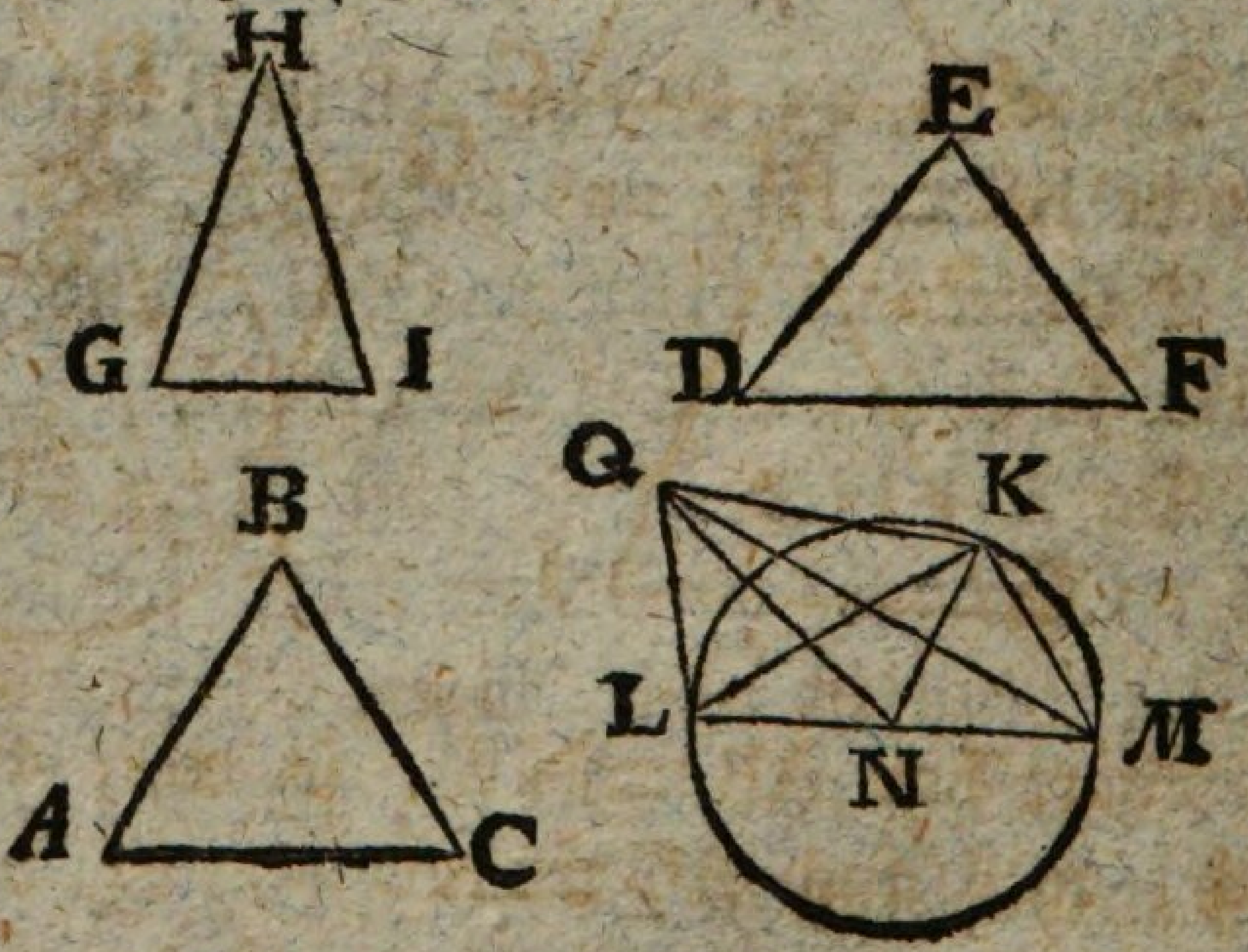
Beschreibe über AB einen Halbkreis, trage in denselben AC = NK, und ziehe CB: so ist NQ = CB die verlangte Linie.

Denn da (3, 31. S.) ACB = R., so ist (1, 47. S.) □ AB = □ AC + □ CB = □ NK + □ NQ, weil AC = NK, und CB = NQ ist. Demnach ist □ AB > □ NK um □ NQ.

Der 23. Satz. Aufgabe.

Drey gegebene ebene Winkel, ABC, DEF, GHI, die zusammen kleiner als vier rechte, und von denen jede zwey zusammen größer als der dritte sind, zu einem körperlichen Winkel zusammen zu stellen.

Mache AB, BC, ED, EF, HG, HI, einander gleich, und ziehe AC, DF, GI: so läßt sich aus den letztern drey geraden Linien (11, 22. S.) ein Triangel verzeichnen. Dieser sey △KLM, so daß



KL = AC, LM = DF, MK = GI ist. Beschreibe (4, 5. S.) um den △ KLM einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt N entweder innerhalb, oder außerhalb des △ KLM, oder in eine seiner Seiten. Ziehet man nun NK, NL, NM: so ist **theils** zu beweisen, daß AB > NK, **theils** zu zeigen, wie der verlangte körperliche Winkel über △ KLM zu errichten sey.

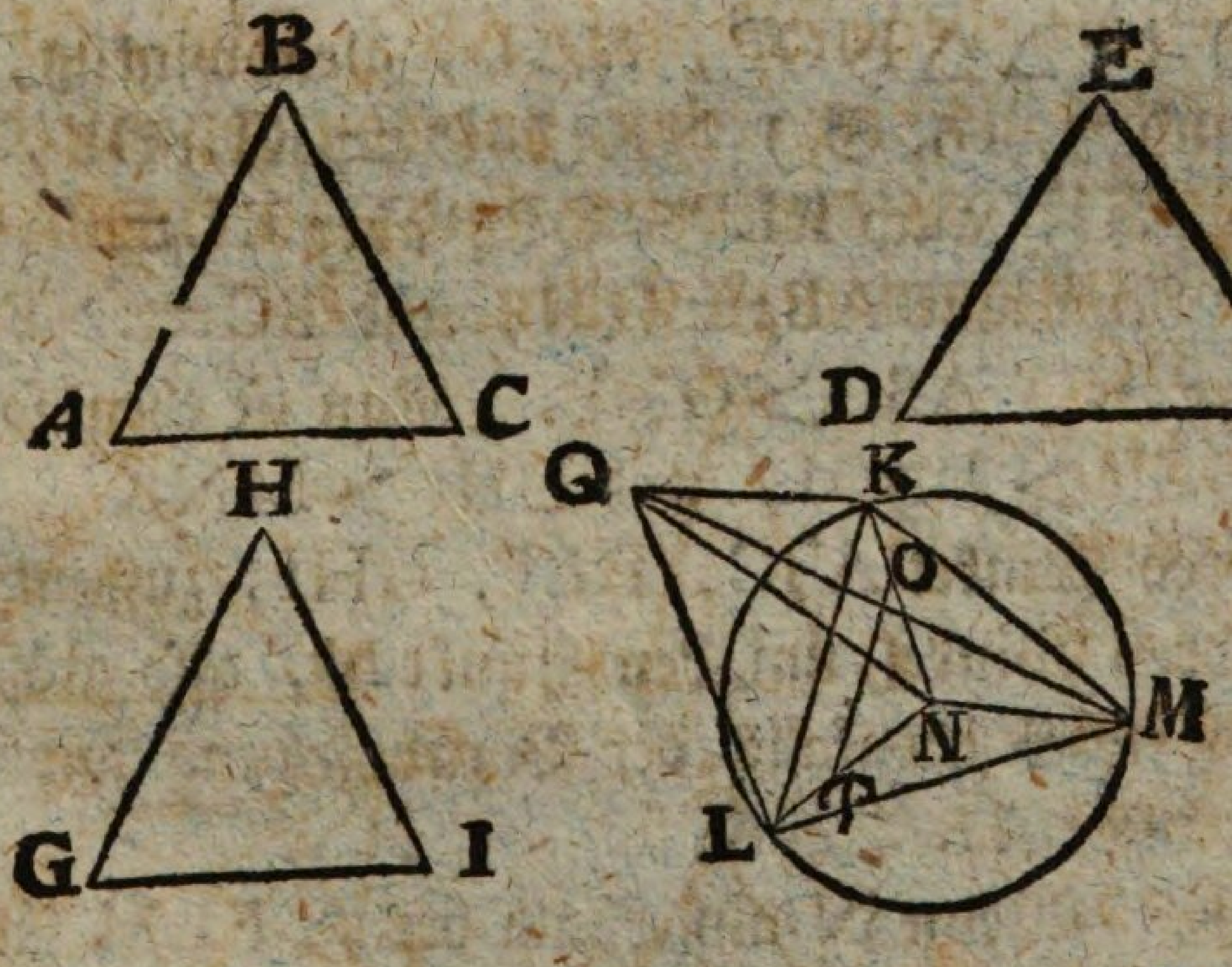
Erster Theil.

Beweis, daß AB > NK ist, weil AB weder eben so groß, noch kleiner als NK seyn kann.

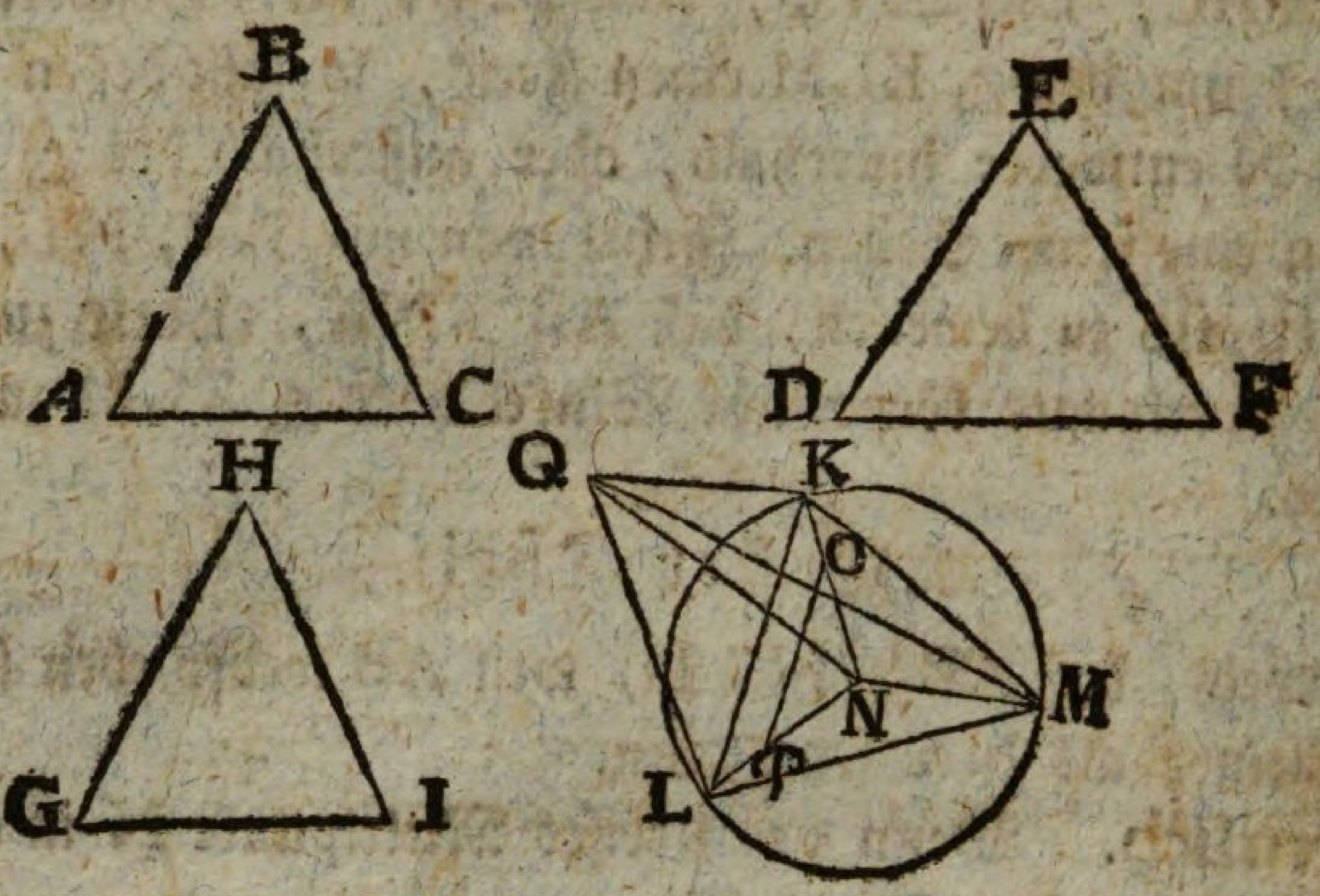
Erstlich. Wenn des Kreises Mittelpunkt N in eine der Seiten LM des △ KLM fällt.

Wäre hier AB = NK, so wäre, weil AB = DE = EF, und NK = LN = NM ist, DE + EF = LM. Nun ist LM = DF. Folglich wäre DE + EF = DF, welches (1, 20. S.) unmöglich ist. Demnach ist nicht AB = NK. Wäre AB < NK, so gäben obige Schlüsse DE + EF < DF, welches (1, 20. S.) noch mehr unmöglich ist. Demnach ist nicht AB < NK.

Zweytens. Wenn N innerhalb des △ KLM fällt.



Wäre hier AB = NK, so wäre auch BC = NL, folglich, weil auch AC = KL ist, (1, 8. S.) ABC = KNL. Nun



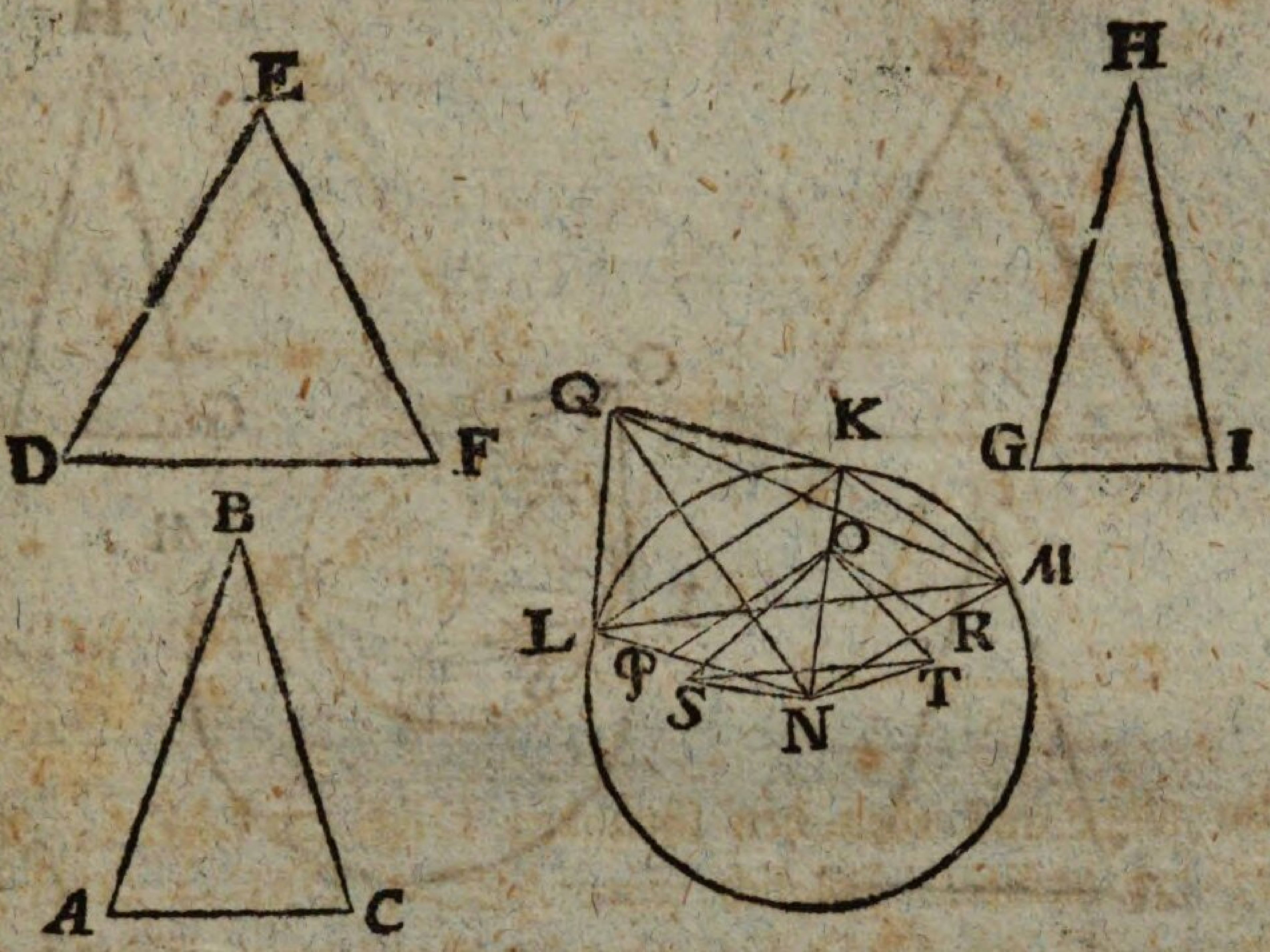
Nun wäre aus eben den Gründen DEF = LNM, und GHI = MNK. Folglich wäre ABC + DEF + GHI = KNL + LNM + MNK; aber die drey letztern Winkel (1, 15. Zus.) sind vier rechten gleich, folglich auch die drey erstern Winkel, welches der Voraussetzung, daß sie < 4 R. sind, widerspricht. Demnach ist nicht AB = NK.

Wäre AB < NK, so sey NO = AB, NP = BC, und OP gezogen. Da AB = BC, und NK = NL; so ist auch OK = PL, folglich (6, 2. S.) OP der KL parallel, folglich (1, 29. S.) die △△ NOP, NKL, gleichwinklig, folglich (6, 4. S. und 5, 16. S.) NK : NO = KL : OP, folglich, weil NK > NO, auch KL > OP; aber KL = AC, also AC > OP. Nun war AB = ON, und BC = NP. Folglich ist (1, 25 S.) ABC > ONP. Nun ist eben so erweislich, daß DEF > LNM, und GHI > MNK. Folglich wären die drey Winkel ABC, DEF, GHI, zusammen größer als die drey Winkel um den Punkt N, also größer, als vier rechte, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Demnach ist nicht AB < NK.

Drittens. Wenn N außerhalb des △ KLM fällt.

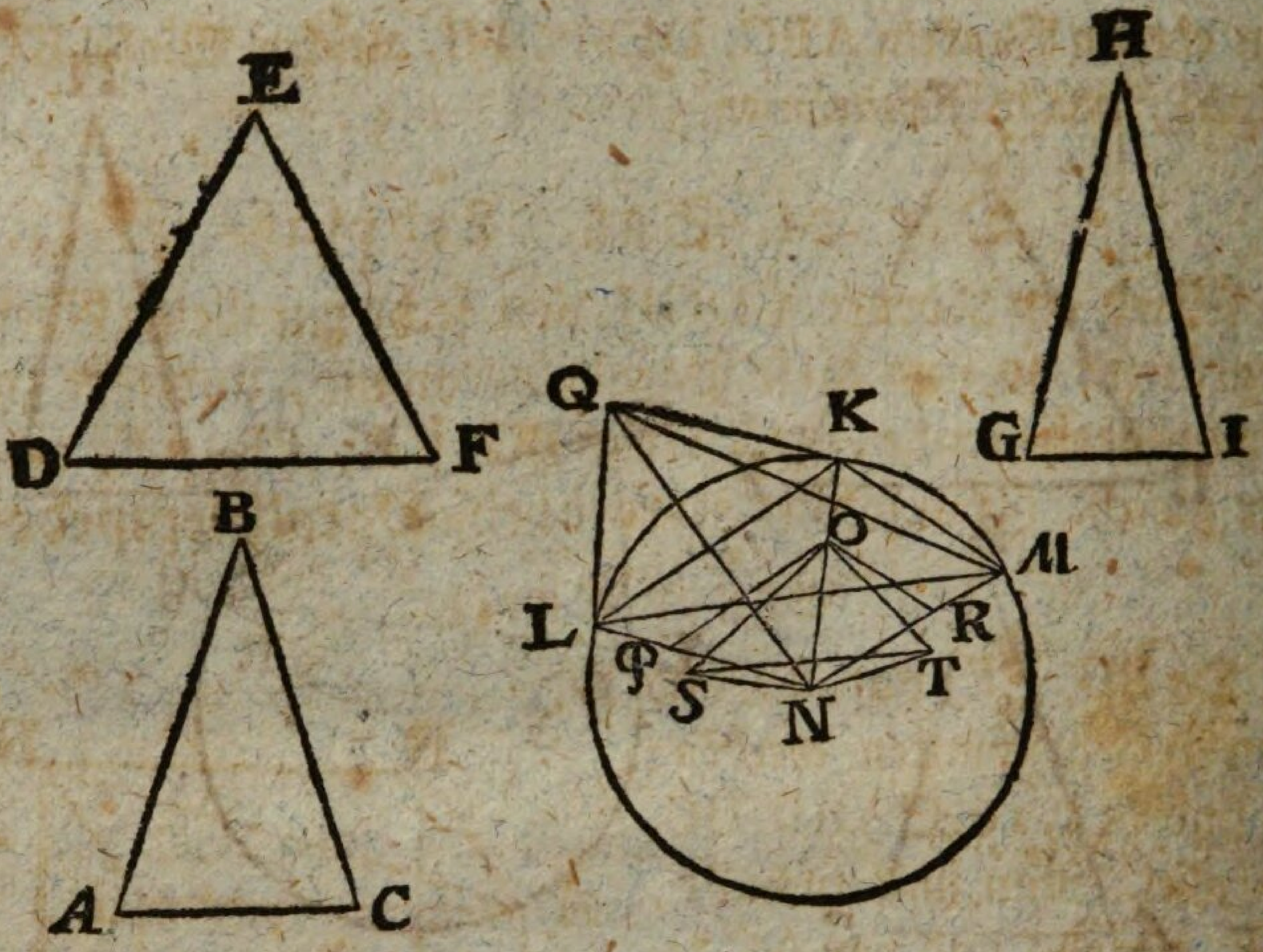
Wäre hier AB = NK = NL = BC, so wäre, weil auch AC = LK ist, (1, 8. S.) ABC = LNK; aber aus gleichen Gründen auch GHI = KNM, folglich LNM =

ABC



ABC + GHI. Nun ist ABC + GHI > DEF. Folglich LNM > DEF. Da aber auch DE = LN = EF = NM, und DF = LM: so ist (1, 8. S.) LNM = DEF; welches dem Vorigen widerspricht. Demnach ist nicht AB = NK.

Wäre AB < NK, so sey NO = AB, NP = BC, und OP gezogen, da denn, wie beym zweyten Falle, erweislich ist, daß ABC > ONP. Nun sey NR = NO = NP, und OR gezogen, so ist aus eben den Gründen GHI > ONR. Setze an NK den Winkel KNS = ABC, und KNT = GHI, mache NS, NT, jede der NO gleich, und ziehe OS, OT, ST. Da AB = ON = BC = NS, und ABC = ONS: so ist (1, 4. S.) AC, das ist KL, = OS. Aus eben den Gründen ist auch KM = OT = GI. Da hiernach LK = OS, RM = OT, aber POR, das ist LKM, > SOT: so ist (1, 24. S.) LM, das ist DF, > ST, folglich (1, 25. S.) DEF > SNT. Nun war SNT = ABC + GHI. Folglich ist DEF > ABC + GHI, welches der Voraussetzung offenbar widerspricht. Demnach ist nicht AB < NK.



Zweyter Theil.

Errichtung des verlangten körperlichen Winkels.

Da nach dem obigen Beweise in allen Fällen AB > KN ist: so errichte (11, 12. S.) auf der Ebene des Kreises KLM in N den Perpendikel NQ, und mache denselben so groß, daß (11, 22. Lehns.) □ AB = □ KN + □ NQ ist, und ziehe QK, QL, QM: so ist bey Q der verlangte körperliche Winkel.

Denn NQ ist auf der Ebene KLM, folglich (11, 3. E.) auf den drey Linien NL, NK, NM, perdendikular. Da hiernach bey N rechte Winkel sind, und KN = NL, QN = QN ist: so ist (1, 4. S.) KQ = QL, aber aus eben den Gründen QM = QK, folglich QK = QL = QM. Da □ AB = □ KN + □ NQ, und, weil QNK = R., auch □ QK = □ KN + □ NQ: so ist □ AB = □ QK, also AB = QK = QL = QM.

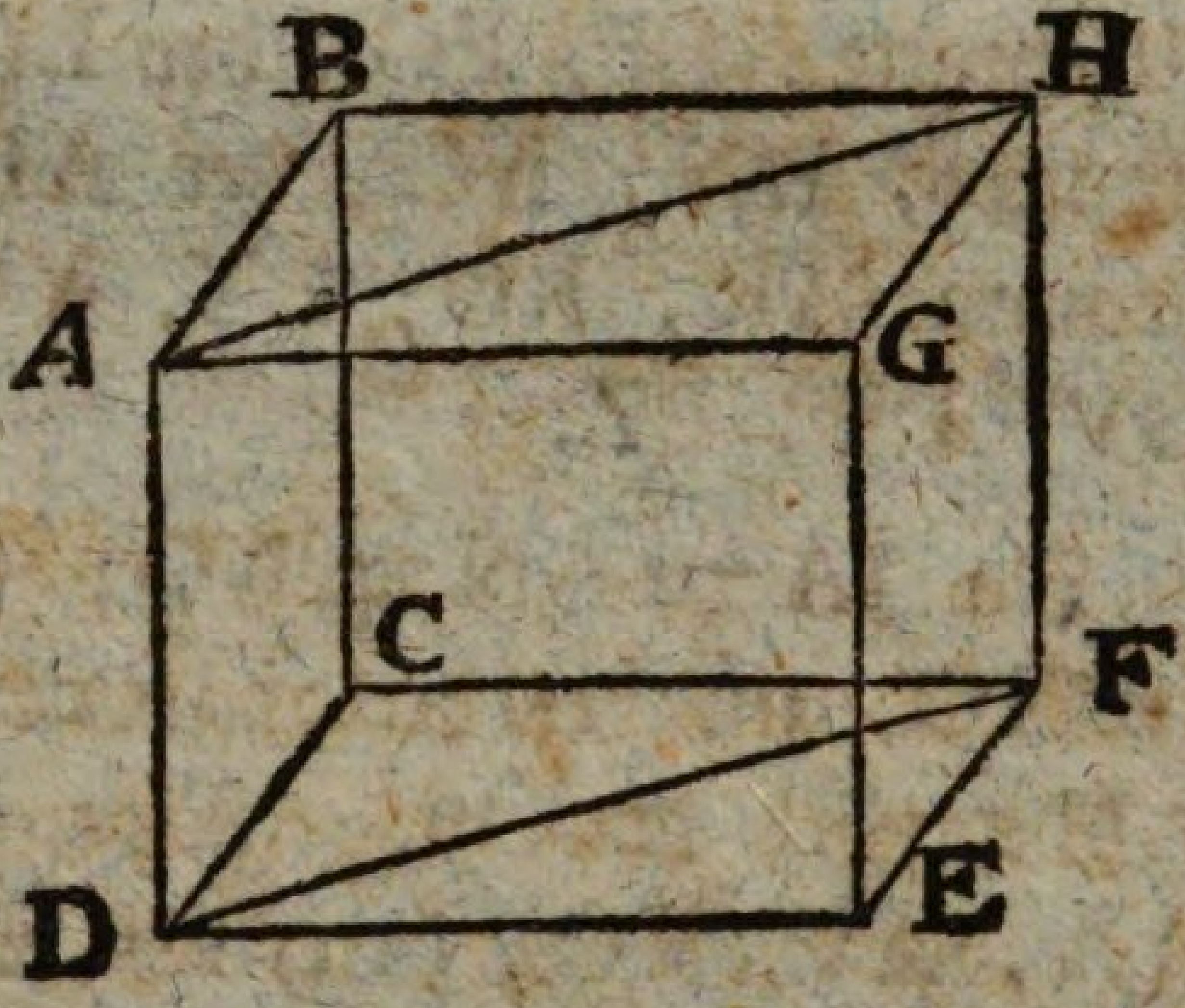
Da hiernach QK = AB, QL = BC, KL = AC: so ist (1, 8 S.) KQL = ABC. Nun ist aus eben den Gründen LQM = DEF, und MQK = GHI. Folglich ist bey Q der verlangte körperliche Winkel, welchen die den gegebenen

nen ebenen Winkeln ABC, DEF, GHI, gleichen Winkel KQL, LQM, MQK, begränzen.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Körper, CDGH, von sechs parallelen Ebenen begränzt: so sind diese Parallelogramme, und jede zwey gegenüberliegende, AC, GF; BG, CE; FB, AE, einander gleich. (Ein solcher Körper heiße **Parallelepipedon.**)

Erster Theil.



Da BG, CE, parallel, und von AC geschnitten werden: so sind (11, 16. S.) AB, DC, parallel. Nun sind auch BF, AE, parallel und von AC geschnitten, also (11, 16. S.) AD, BC, parallel. Folglich ist AC ein Parallelogramm. Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch GF, ferner BG, CE, und FB, AE, Parallelogramme sind.

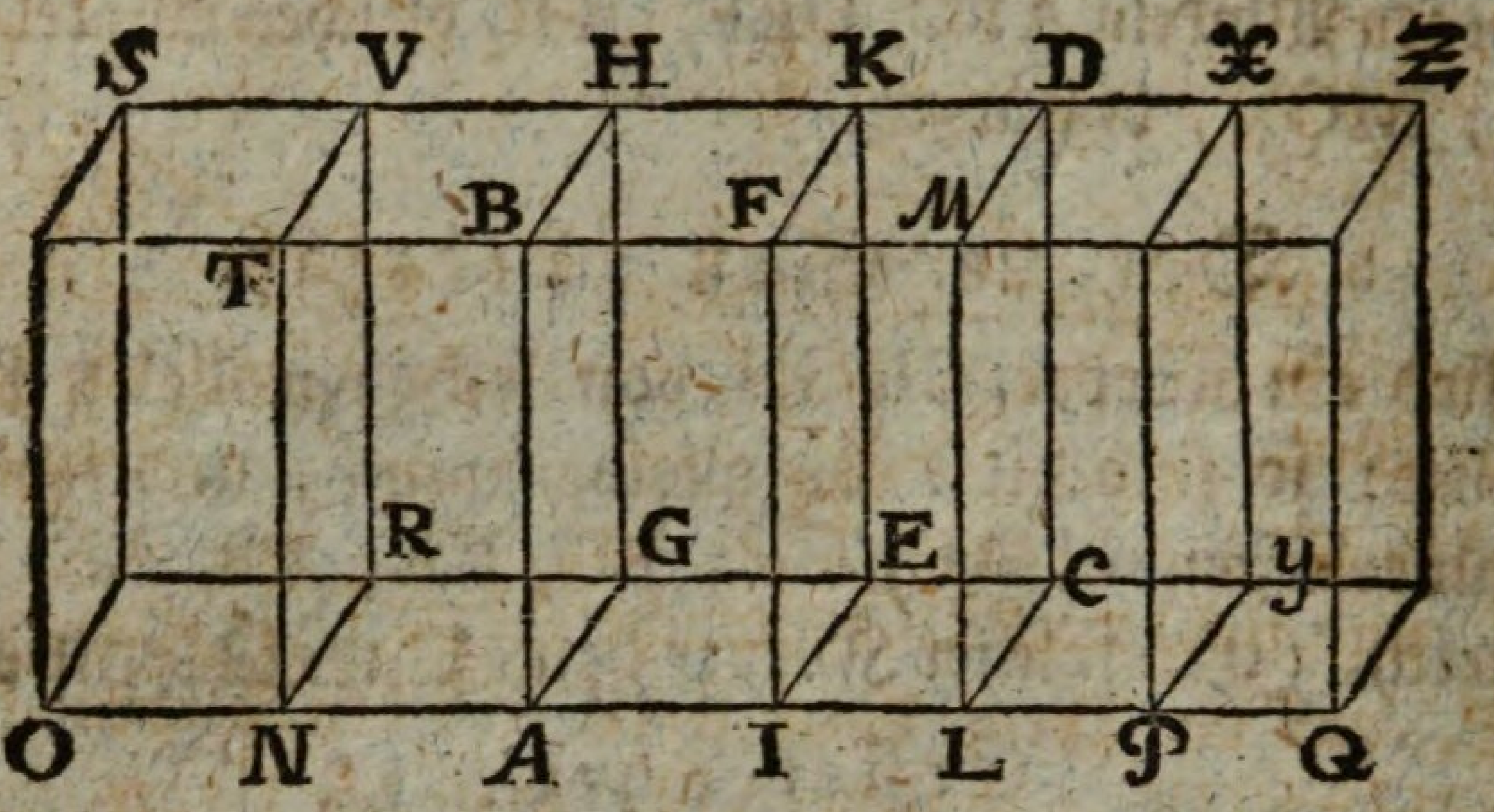
Zweyter Theil.

Ziehe in BG, CE, die Diagonalen AH, DF. Da AB der DC, und BH der CF parallel: so ist (11, 10. S.) ABH = DCF. Nun ist (1, 34. S.) AB = DC, und BH = CF. Folglich ist (1, 4. S.) △ ABH = △ DCF, also auch 2 △ ABH = 2 △ DCF, folglich (1, 34. S.) BG = CE. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AC = GF, und FB = AE ist.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Parallelepipedon, ABCD, von einer Ebene, EF, den einander gegenüber liegenden Ebenen, AH, DL, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Körper, AK, ID, wie ihre Grundflächen, AE, IC.

Ver-



Verlängere AL auf beyden Seiten: nimm beliebig viele Abschnitte, LP, PQ, der LI, und wieder beliebig viele Abschnitte, AN, NO, der AI, gleich; vollende die Parallelogramme AR, RO, LY, YQ, desgleichen die Körper NH, OV, LX, PZ.

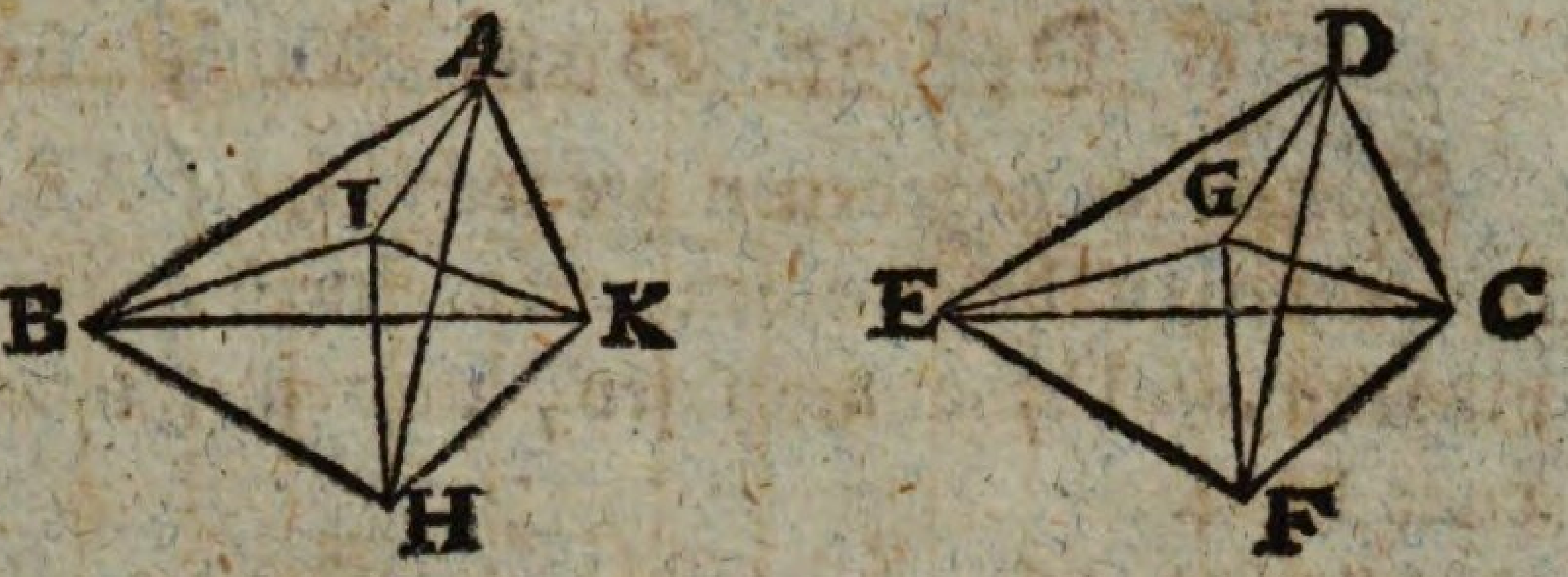
Da IA = AN = NO: so ist (1, 36. S.) EA = AR = RO, und EH = HR = RS, desgleichen (11, 24. S.) AH = NV = OS. Nun sind auch in den drey Körpern KA, AV, VO, (11, 24. S.) obigen Ebenen die gegenüber liegenden gleich. Folglich sind (11, 10. E.) gedachte drey Körper gleich. Nun sind aus eben den Gründen auch die drey Körper ID, DP, PZ, gleich. Folglich ist OK von AK eben so vielfach, als OE von AE; und KQ von ID eben so vielfach, als EQ von IC. Nun ist, wenn OE $\gtrless$ EQ, auch OK $\gtrless$ KQ. Folglich ist (5, 5. E.) AK : ID = AE : IC.

Der 26. Satz. Aufgabe.

An eine gegebene gerade Linie, AB, in einem ihrer Punkte, A, einen körperlichen Winkel zu stellen, der einem gegebenen körperlichen Winkel, D, gleich sey.

Es werde der gegebene körperliche Winkel D, von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC, begränzt. Fälle von einem beliebigen Punkte F, der Linie DF, auf die Ebene durch ED, DC, den Perpendikel FG, der die Ebene in G

treffe,



treffe, und ziehe DG. Trage (1, 23. S.) an AB in A den Winkel BAK = EDC, und BAI = EDG; mache AI = DG; errichte (11, 12. S.) auf der Ebene durch BAK in I den Perpendikel IH, mache IH = GF, und ziehe AH: so ist der körperliche Winkel bey A dem gegebenen bey D gleich.

Denn macht man AB = DE, und zieht HB, IB, FE, GE: so sind, weil FG auf der Grundebene perpendikular, (11, 3. E.) FGD, FGE, rechte Winkel, und aus eben den Gründen auch HIA, HIB.

Da AI = DG, AB = DE, und BAI = EDG: so ist (1, 4. S.) BI = EG. Nun ist auch IH = GF, und es sind bey I, G, rechte Winkel. Folglich ist (1, 4. S.) BH = EF. Ferner ist AI = DG, IH = GF, auch sind bey I, G, rechte Winkel, also (1, 4. S.) AH = DF. Nun war auch AB = DE. Folglich (1, 8. S.) BAH = EDF.

Mache AK = DC, und ziehe IK, HK, GC, FC. Da BAK = EDC, und BAI = EDG: so ist IAK = GDC. Nun ist AI = DG, und AK = DC. Folglich ist (1, 4. S.) IK = GC. Nun ist IH = GF, und es sind bei I, G, rechte Winkel. Folglich (1, 4. S.) HK = FC. Nun war auch HA = FD, und AK = DC. Folglich ist (1, 4. S.) HAK = FDC.

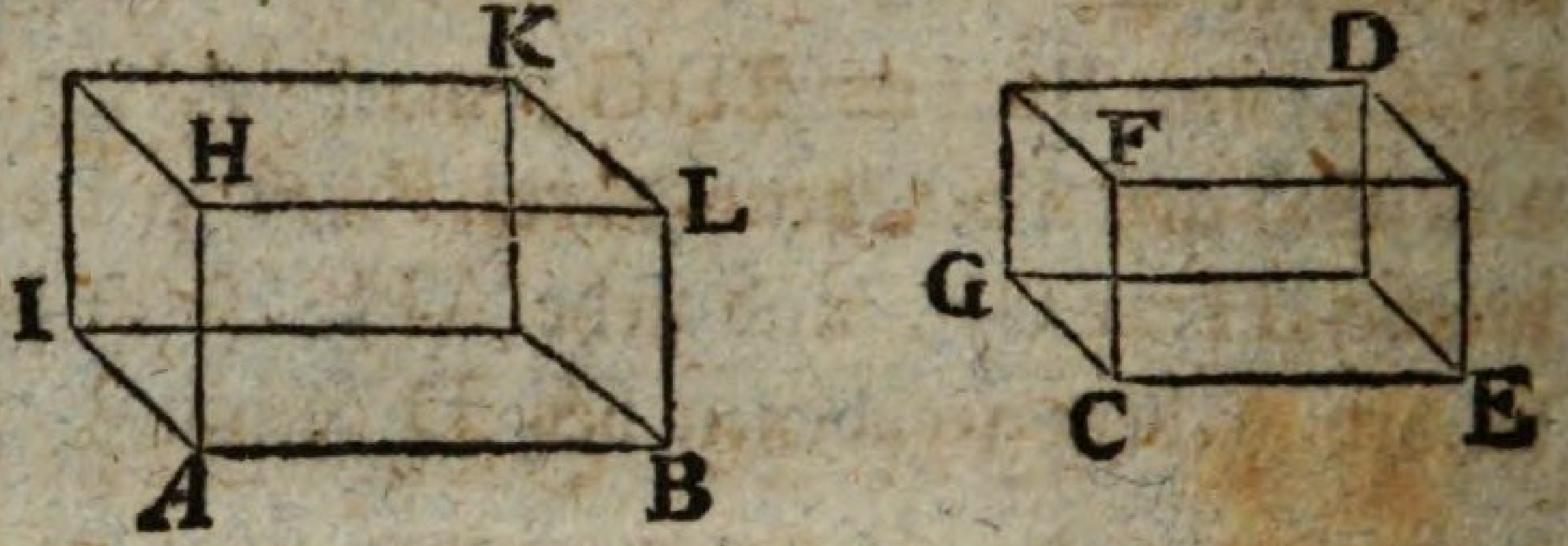
Demnach ist BAH = EDF, HAK = FDC, und nach Obigem BAK = EDC. Folglich ist der körperliche Winkel bey A, welchen die den ebenen Winkeln, EDF, FDC, EDC, gleichen Winkel BAH, HAK, BAK, begränzen, dem gegebenen körperlichen Winkel bey D gleich.

Der

Der 27. Satz. Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie, AB, ein Parallelepipedon zu beschreiben, das einem gegebenen Parallepipedon, CD, ähnlich sey, und mit ihm eine ähnliche Lage habe.

Stelle (11, 26. S.) an AB, in A, einen körperlichen Winkel, welcher dem bey C gleich ist, und von den



ebenen Winkeln BAH = ECF, HAI = FCG, und IAB = GCE begränzt wird. Mache (6, 12. S.) EC:CG = BA:AI, auch CG:CF = IA:AH, daß also (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** ist EC:CF = BA:AH. Vollende das Parallelogramm BH, und das Parallelepipedon AK: so ist dieses das verlangte.

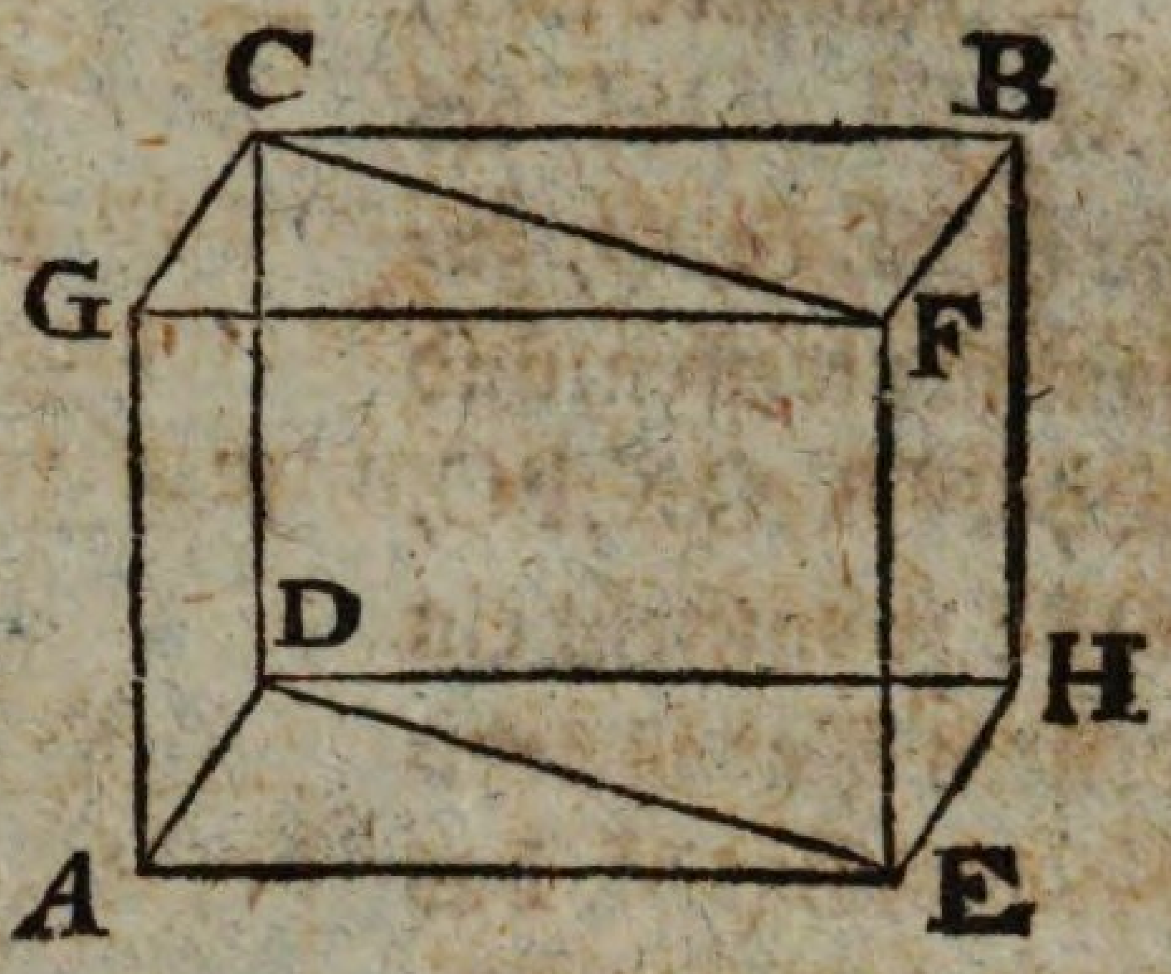
Denn da EC:CG = BA:AI, und ECG = BAI: so ist (6, 4. S. u. 1. 33. S.) BI $\sim$ EG; aber aus eben den Gründen IH $\sim$ GF, und HB $\sim$ FE. Demnach sind drey Ebenen des Körpers AK dreyen gleichliegenden Ebenen des Körpers CD ähnlich. Nun sind (11, 24. S.) in beyden Körpern den genannten Ebenen eines jeden die denselben gegenüber liegenden Ebenen gleich und ähnlich. Folglich ist (11, 9. E.) AK $\sim$ CD.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Jedes Parallelepipedon, AB, wird von einer Ebene, CDEF, die zwey gegenüber liegende Ebenen, GB, AH, nach deren Diagonalen, CF, DE, schneidet, halbirt.

Da (1, 34. S.) △ CGF = △ CBF, auch △ DAE = △ DHE, desgleichen (11, 24. S.) CA = BE, und GE = CH: so ist (11, 10. E.) das von den Triangeln CGF, EDA,

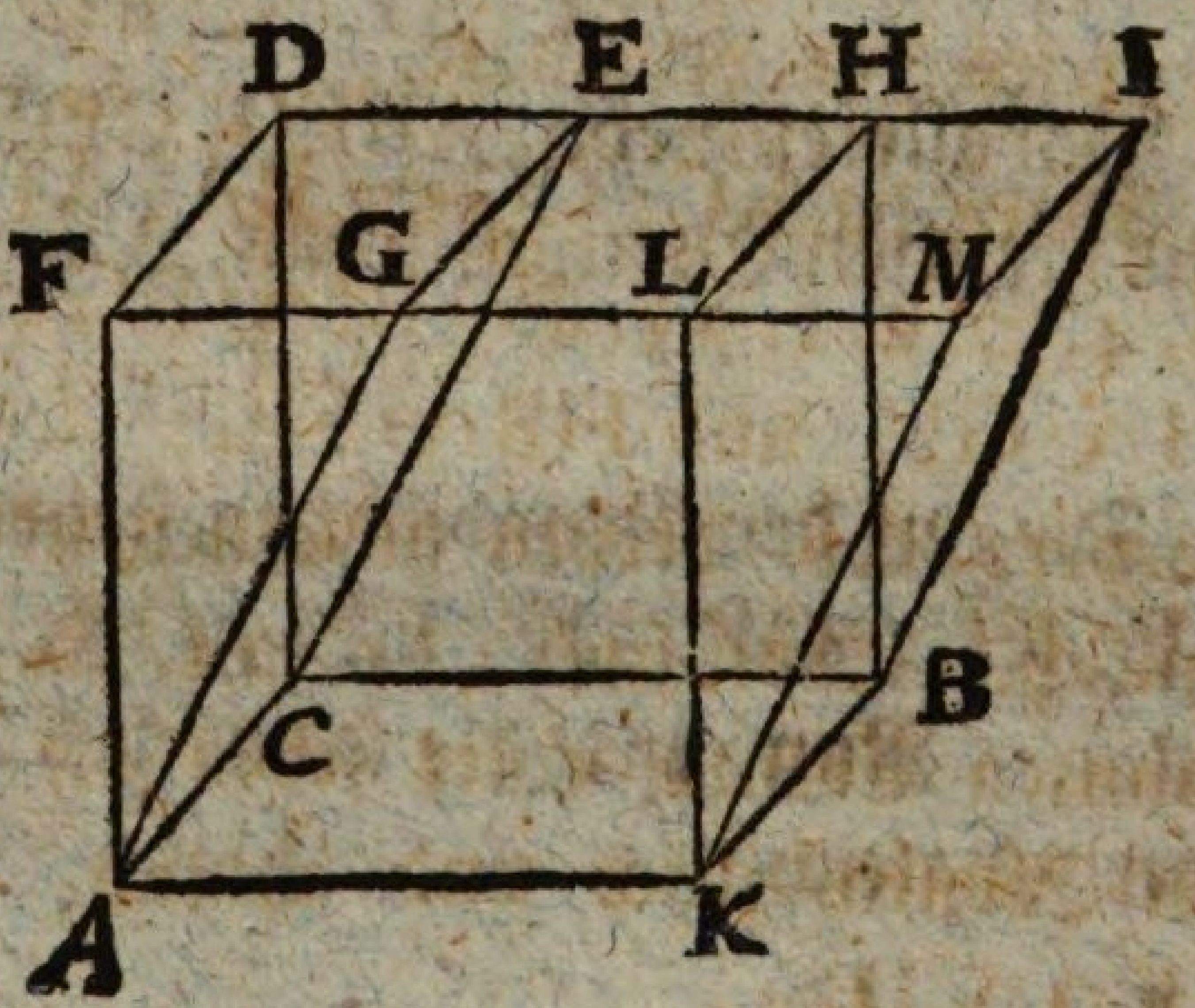
EDA, und den Parallelogrammen GE, AC, CE, begränzte Prisma CGFEDA, dem von den Triangeln FCB, HED, und den Parallelogrammen CH, BE, CE, begränzten Prisma FCBHED, gleich; folglich das Parallelepipedon AB von der Ebene CDEF halbirt.



Der 29. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, AH, HI, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien, AF, AG, KL, LM, und CD, CE, BH, BI, sich in denselben geraden Linien, FM, DI, endigen, sind einander gleich.

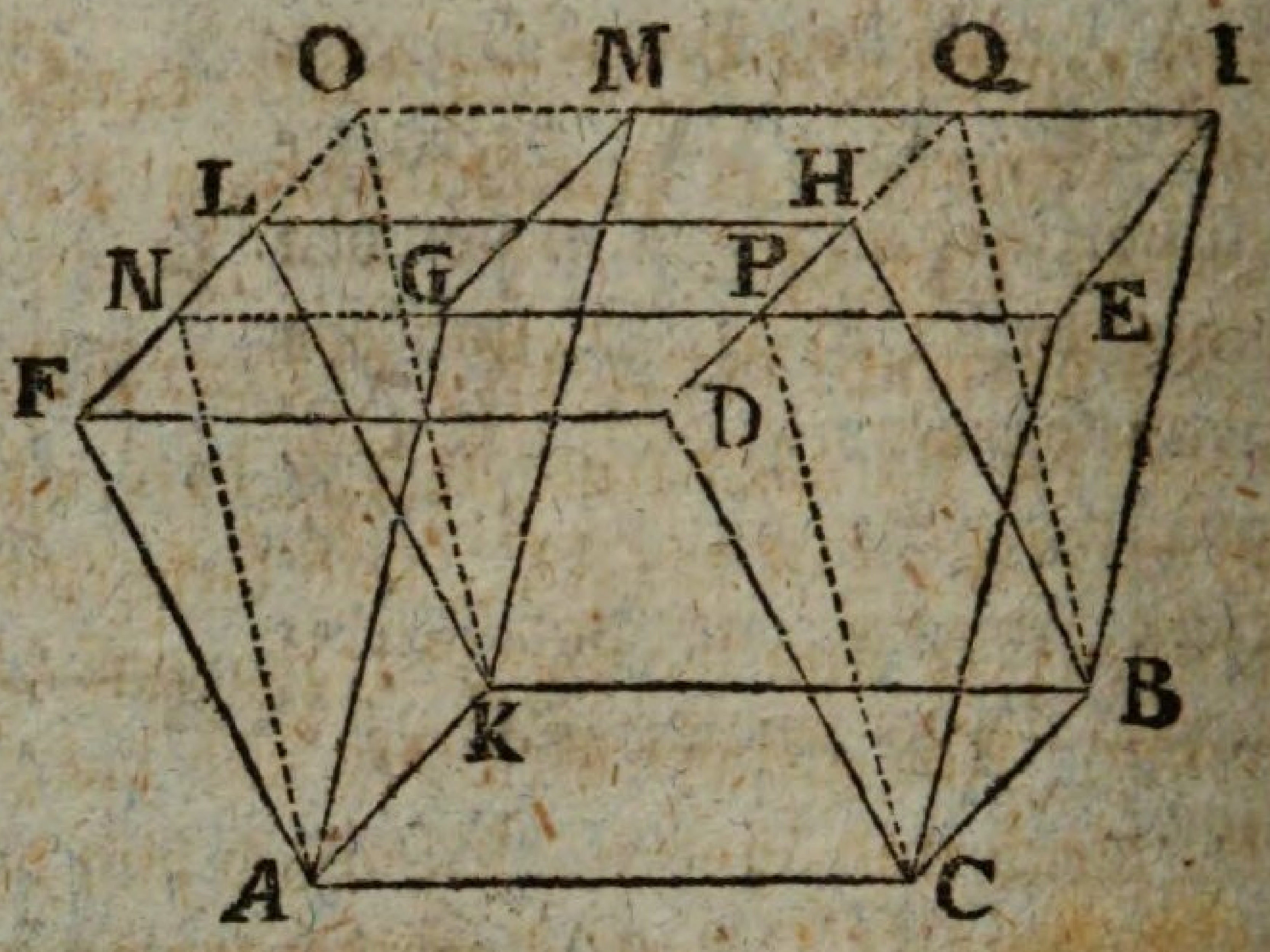
Da CH, CI, Parallelogramme sind: so ist (1, 34. S.) CB = DH = EI; folglich, wenn man EH wegnimmt, DE = HI, folglich (1, 8. S.) △ DEC = △ HIB, und (1, 36. S.) DG = HM. Nun ist aus eben den Gründen △ AFG = △ KLM, aber auch CF = BL, und CG = BM. Folglich (11, 10. E.) Prisma EFAC = Prisma ILKB; folglich, wenn zu beyden der Körper ABHG hinzukommt, AH = AI.



Der 30. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, ABHF, ABIG, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien, AF, AG, CD, CE, und KL, KM, BH, BI, sich nicht in denselben geraden Linien endigen, sind einander gleich.

Ver=



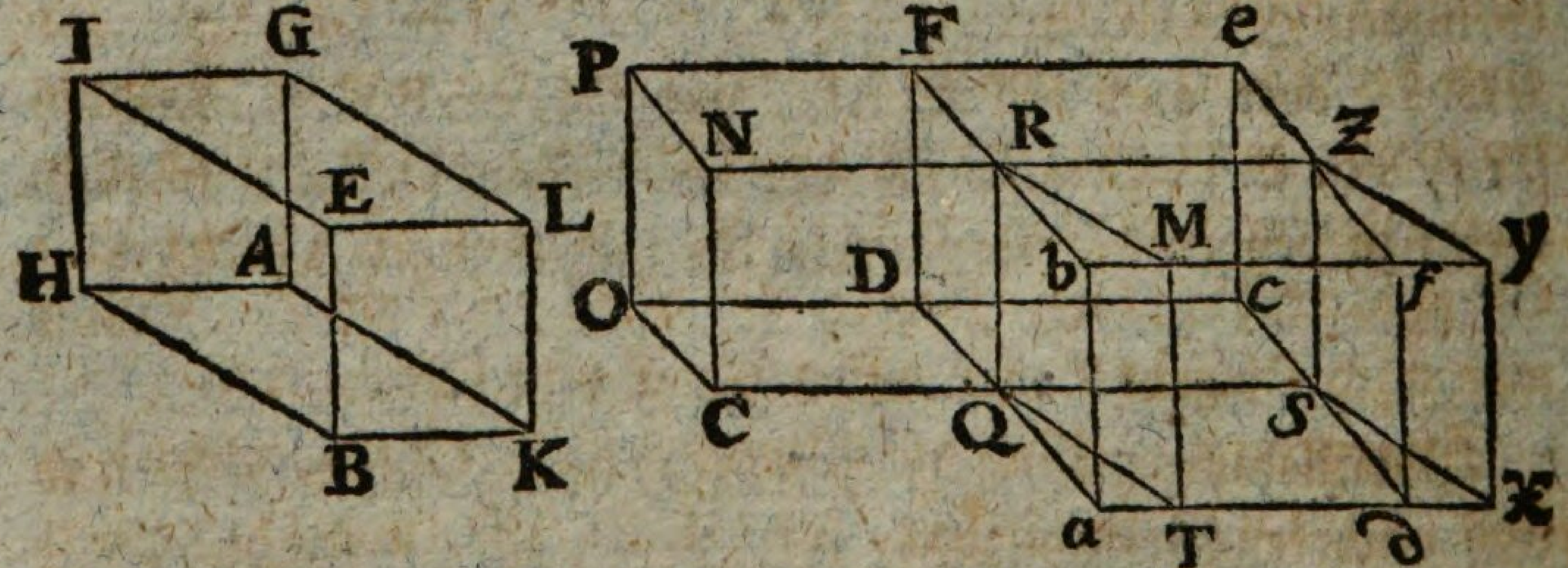
Verlängere EG, IM, FL, DH, bis sie in N, O, Q, zusammentreffen, und ziehe NA, OK, PC, QB: so entsteht ein drittes Parallelepipedon ABQN, das mit oben genannten beyden von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche ist. Nun endigen sich die Seitenlinien des dritten und ersten in denselben geraden Linien FO, DQ, und die Seitenlinien des dritten und zweyten in denselben geraden Linien, NE, OI. Folglich ist (11, 29. S.) ABHF = ABQN, und ABQN = ABIG; folglich ABHF = ABIG.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, ABEG, CDFN, von gleicher Höhe und auf gleichen Grundflächen, AB, CD, sind einander gleich.

Erster Fall.

Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien, AG, HI, BE, KL; OP, DF, CN, QR, sind auf denselben perpendikular. Nun sind die Winkel AKB, CQD, entweder gleich oder ungleich.



Erstlich. Sind diese Winkel ungleich, etwa AKB < CQD; so verlängere CQ nach S, trage (1, 23. S.) an QS in

in Q den Winkel SQT = AKB, mache QS = AK, QT = KB; vollende das Parallelogramm TS, und das Parallelepipedon TSZM.

Da hiernach QS = AK, QT = KB, und SQT = AKB: so sind die Parallelogramme TS, HK, gleich und ähnlich. Da QS = AK, QR = KL, und diese Linien rechte Winkel einschließen; so sind die Parallelogramme QZ, AL, gleich und ähnlich. Aus gleichen Gründen sind die Parallelogramme RT, KE, gleich und ähnlich. Demnach sind drey Parallelogramme des Körpers ZT drey Parallelogrammen des Körpers AE, folglich (11, 24. S.) auch die, welche diesen dreyen gegenüber stehen, gleich und ähnlich; folglich (11, 10. E.) ZT = AE.

Verlängere DQ, XT, bis sie in a zusammentreffen, ziehe durch S der Da die Sd parallel; verlängere OD, dS, bis sie in c zusammentreffen, und vollende die Körper Za, Qe.

Da die Körper Za, ZT, auf der gemeinschaftlichen Grundfläche ZQ, welche der Ebene aY parallel ist, also auch von gleicher Höhe sind, und ihre Seitenlinien Qa, QT, Sd, SX; Rb, RM, Zf, ZY, sich in einerley geraden Linien aX, bY, endigen: so ist (11, 29. S.) Za = ZT. Nun war nach Obigem ZT = AE. Folglich Za = AE.

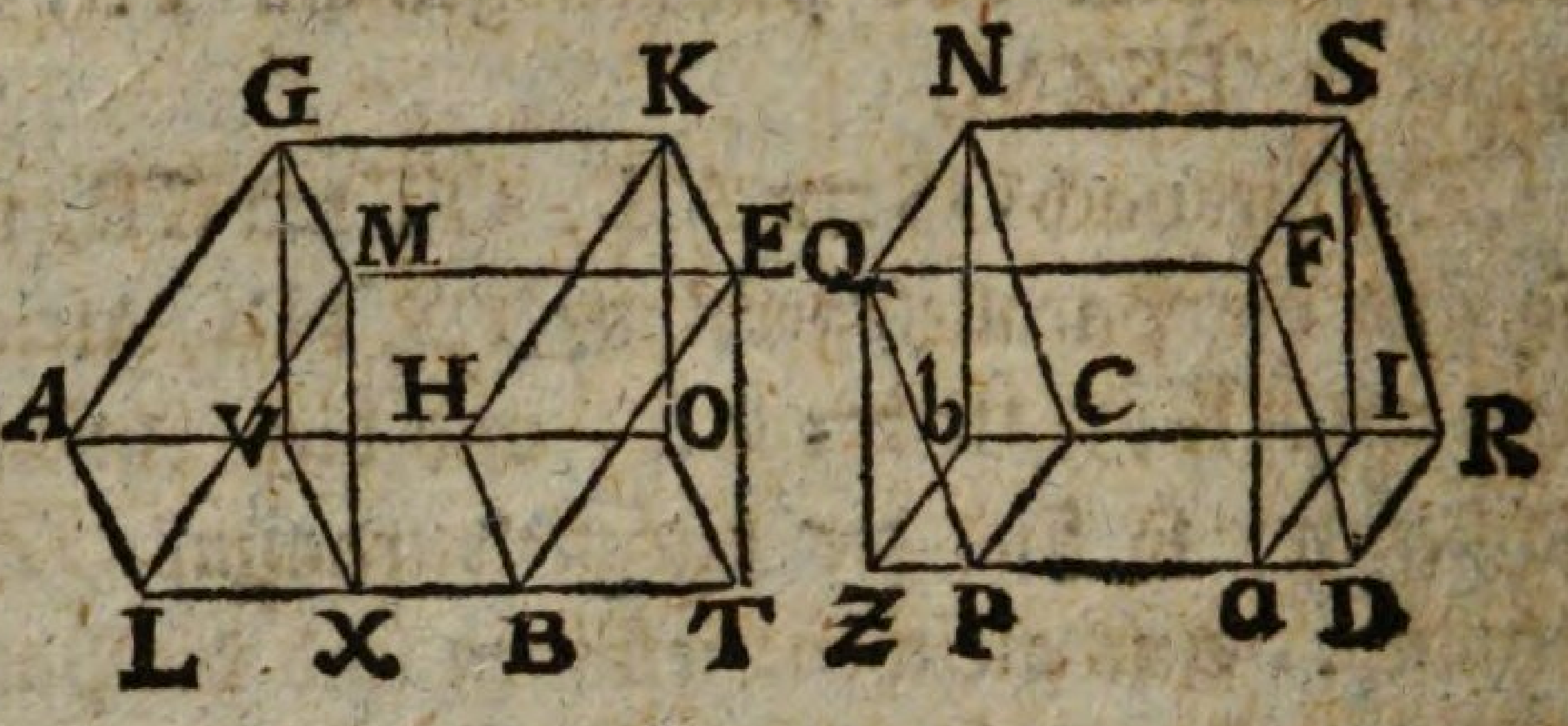
Da (1, 35. S.) ST = Sa; aber ST = AB = CD: so ist Sa = CD, folglich (5, 7. S.) CD : DS = Sa : DS.

Da der Körper Ce von FQ parallel mit CP und Se geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) CD : DS = CF : Qe. Da auch der Körper ae von QZ parallel mit De und af geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) Sa : DS = Za : Qe. Nun war nach Obigem CD : DS = Sa : DS. Folglich ist (5, 11. S.) CF : Qe = Za : Qe, folglich (5, 9. S.) CF = Za. Nun war nach Obigem Za = AE. Folglich ist CF = AE.

Zweytens. Sind die Winkel AKB, CQD, gleich: so seyn CQ, DQ, verlängert, bis QS = AK, und Qa = KB ist. Nun ist (1, 15. S.) SQa = CQD = AKB. Folglich ist, wie vorher, erweislich, daß (11, 10. E.) AE = Za, auch daß (11, 25. S.) CF = Za, daß also CF = AE ist.

Zweyter Fall.

Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien, AG, HK, BE, LM; PQ, CN, RS, DF, sind nicht auf denselben perpendikular.

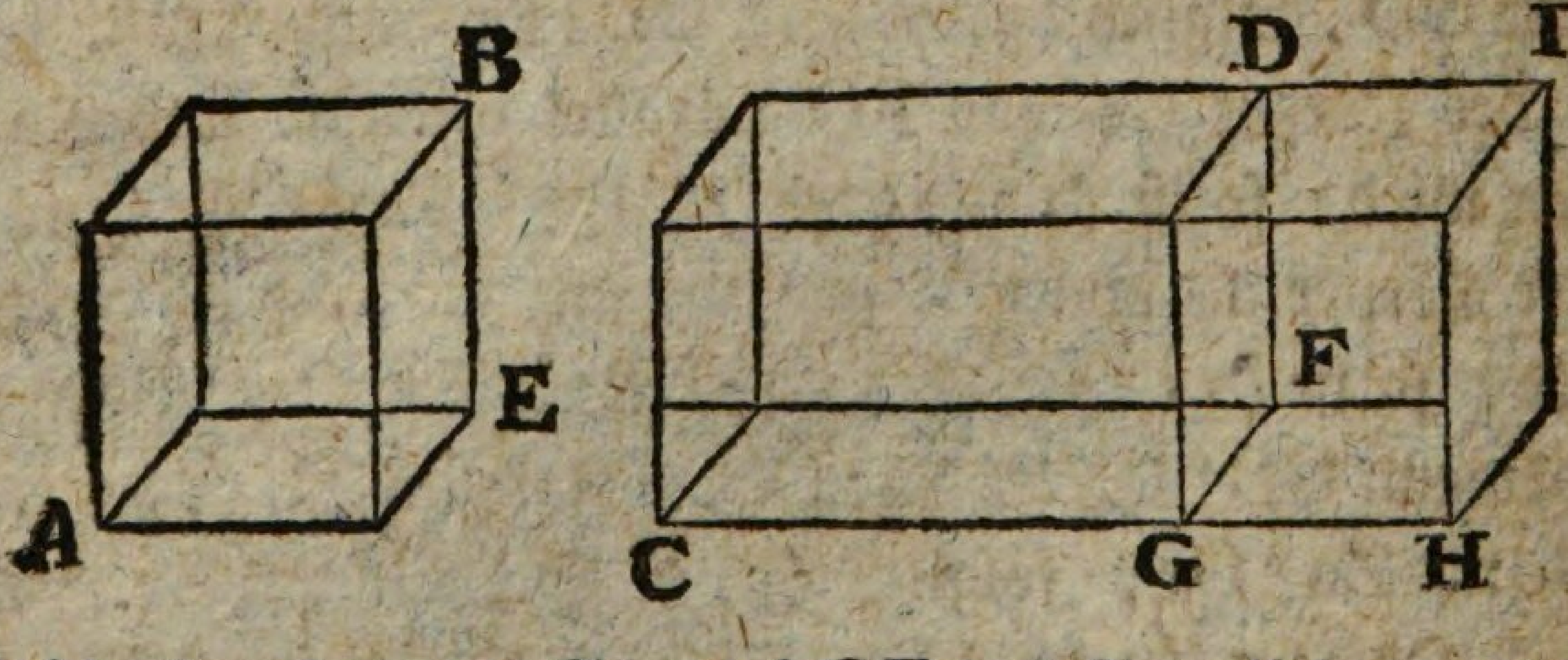


Fälle (11, 11. S.) von den Punkten K, G, M, E; S, N, Q, F, auf die Ebenen der Grundflächen AB, CD, die Perpendikel KO, GV, MX, ET; SI, Nb, QZ, Fa, und ziehe OT, VX, TX, OV; aI, Zb, Za, bI.

Da die Körper, KX, SZ, auf gleichen Grundflächen KM, NF, und von gleichen Höhen sind, und ihre Seitenlinien perpendikular auf den Grundflächen stehen; so sind sie nach dem ersten Falle gleich. Nun ist KX = AE, und SZ = CF, folglich AE = CF.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, AB, CD, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen, AE, CF.



Beschreibe (1, 45. S.) auf GF das Parallelogramm FH = AE, und vollende den Körper GI: so ist (11, 31. S.) AB = GI.

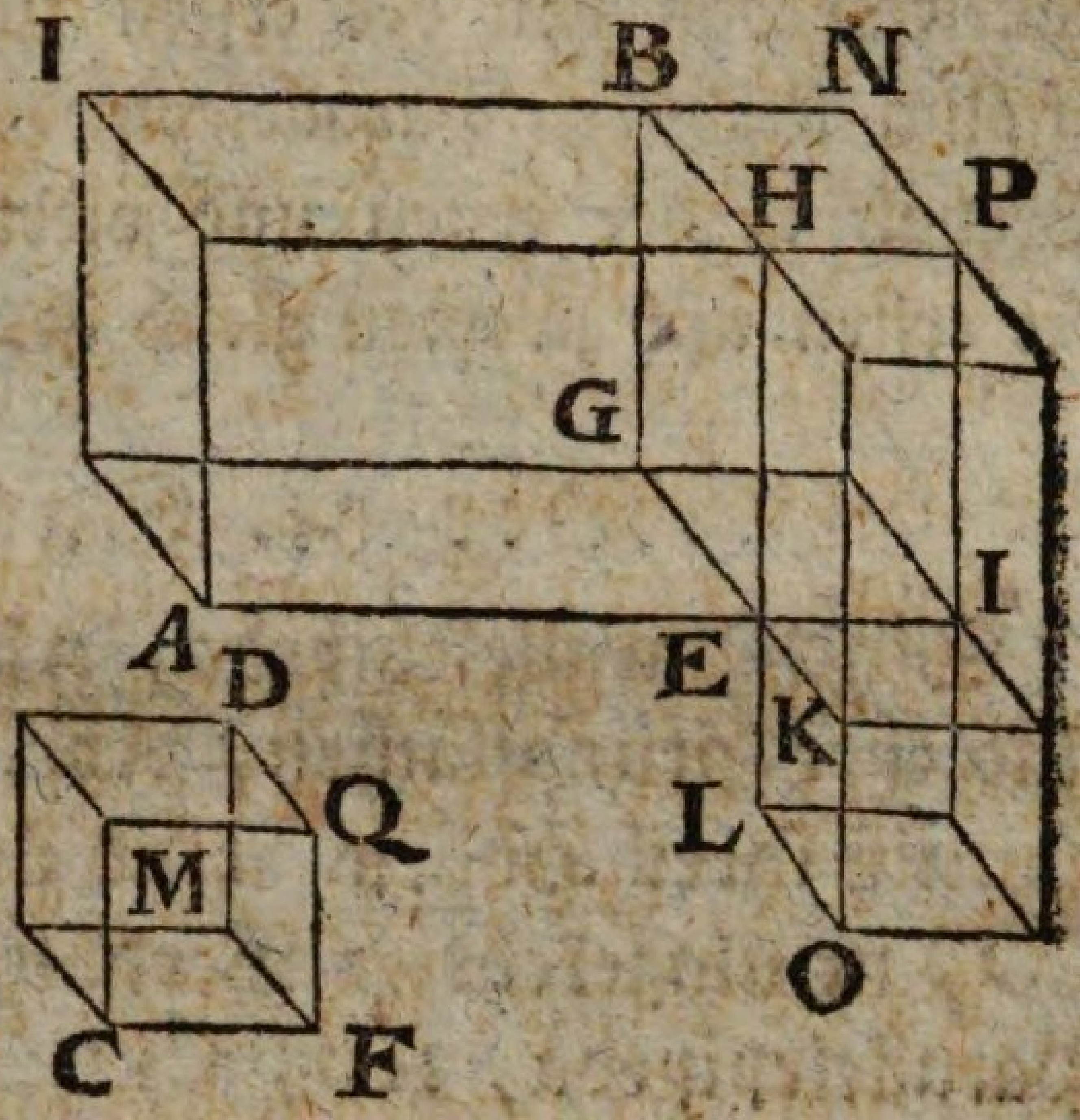
Da der Körper CI von DG parallel der HI geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) GI : CD = FH : CF. Nun war AB = GI, und AE = FH. Folglich AB : CD = AE : CF.

Der

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Parallelepipeda, AB, CD, sind in der dreyfachen Verhältniß ihrer homologen Seiten, AE, CF.

Verlängere AE, GE, HE, bis EI = CF, EK = FM, EL = FQ ist. Vollende das Parallelogramm IK, und den Körper IO; desgleichen das Parallelogramm GI, und auf den Grundflächen GI, IK, die Körper EN, KP, von gleicher Höhe mit AB.



Da wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, CD, die Winkel AEG, CFM, gleich sind, folglich auch IEK = CFM; aber EI = CF, und EK = FM: so sind (6, 1. E.) IK, CM, gleich und ähnlich. Nun sind aus eben den Gründen IL, CQ, desgleichen OE, DF, gleich und ähnlich. Demnach sind drey Parallelogramme des Körpers IO, drey Parallelogrammen des Körpers CD, folglich (11, 24. S.) auch die, welche diesen dreyen gegenüber stehen gleich und ähnlich; folglich sind (11, 10. E.) IO, CD, gleich und ähnlich.

Da AB ∾ CD: so ist (11, 9. E. und 6, 1. E.) AE : CF = EG : FM = EH : FQ; aber CF = EI, FM = EK, FQ = EL; folglich AE : EI = EG : EK = EH : EL. Nun ist (6, 1. S.) AE : EI = AG : GI; EG : EK = GI : IK; EH : EL = PE : IL. Folglich ist AG : GI = GI : IK = PE : IL. Nun ist (11, 32. S.) AG : GI = AB : EN; GI = IK = EN : PK; PE : IL = PK : IO. Folglich ist AB : EN = EN : PK = PK : IO; folglich (5, 11. E.) AB : IO = 3 (AB : EN); aber AB : EN = AG : GI = AE : EI, folglich AB : IO = 3 (AE : EI). Nun war IO = CD, und EI = CF. Folglich ist AB : CD = 3 (AE : CF).

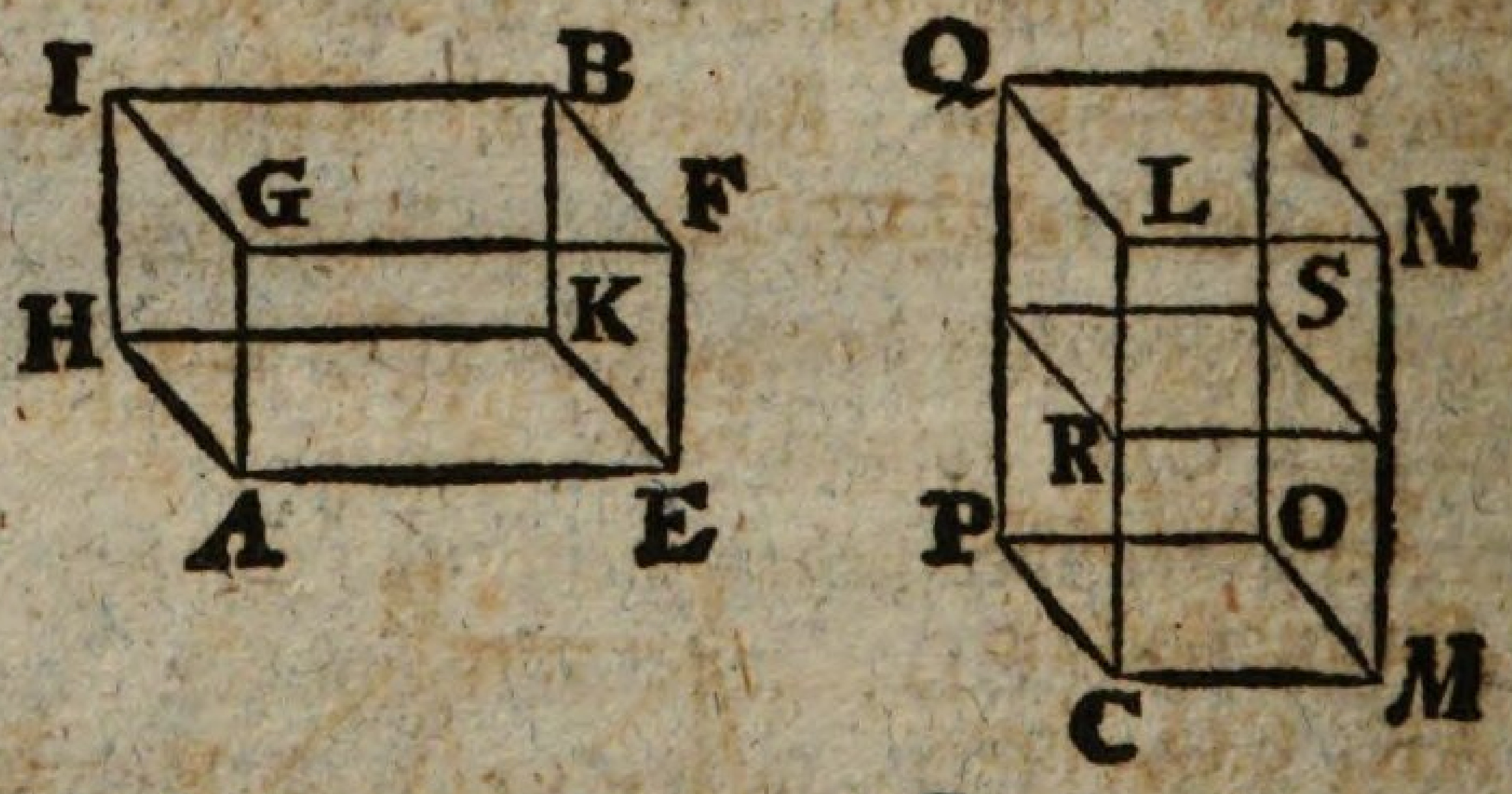
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß von vier stetig proportionirten geraden Linien die erste sich zur vierten verhalte, wie das Parallelepipedon von der ersten zu dem ihm ähnlichen und ihm ähnlich liegenden Parallelepipedon von der zweyten; weil die Verhältniß der ersten und vierten der dreyfachen Verhältniß der ersten und zweyten gleich ist.

Der 34. Satz. Lehrsatz.

Sind Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich: so sind ihre Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen. Und sind die Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß der Höhen: so sind die Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich.

Erster Fall.



Die auf den Grundflächen AK, CO, stehenden Seitenlinien AG, EF, KB, HI, und CL, MN, OD, PQ, sind auf denselben perpendikular, daß also hier die Höhen der Körper AG, CL, sind.

Erster Theil.

Ist AB = CD, so ist AK : CO = CL : AG.

Erstlich, wenn die Grundflächen gleich sind. Da also AK = CO, und AB = CD: so ist auch CL = AG; weil sonst (11, 31. S.) AB, CD, ungleich wären, gegen die Voraussetzung. Demnach ist offenbar AK : CO = CL : AG.

Zweytens, wenn die Grundflächen ungleich sind. Es sey AK > CO: so ist, weil AB = CD, auch CL > AG; weil sonst AB, CD, nicht gleich seyn könnten, gegen die Voraus-

aussetzung. Mache daher CR = AG, und vollende das Parallelepipedon CS.

Da AB = CD, so ist (5, 7. S.) AB : CS = CD : CS. Nun ist (11, 32. S.) AB : CS = AK : CO, und (11, 25. S.) CD : CS = CQ : PR = (6, 1. S.) CL : CR. Folglich ist AK : CO = CL : CR; folglich, weil CR = AG, auch AK : CO = CL : AG.

Zweyter Theil.

Ist AK : CO = CL : AG, so ist AB = CD.

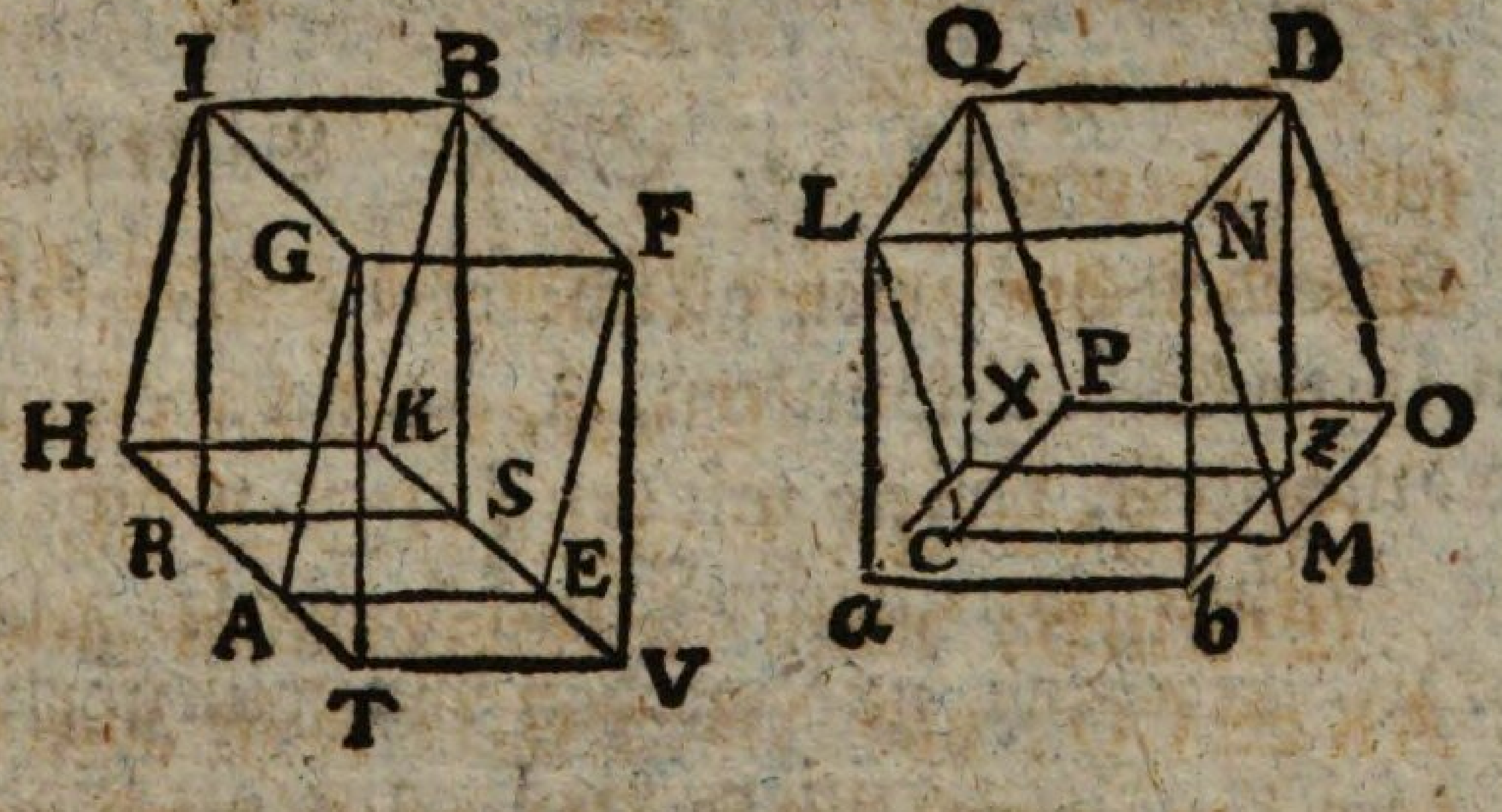
Erstlich, wenn die Grundflächen gleich sind. Da also AK = CO, und AK : CO = CL : AG, so ist auch CL = AG, folglich (11, 31. S.) AB = CD.

Zweytens, wenn die Grundflächen ungleich sind. Es sey AK > CO, folglich auch CL > AG. Mache daher CR = AG, und vollende das Parallelepipedon CS.

Da also CR = AG, so erhält man nach der Voraussetzung AK : CO = CL : CR. Nun ist (11, 32. S.) AK : CO = AB : CS, und (6, 1. S.) CL : CR = CQ : PR = (11, 25. S.) CD : CS. Folglich ist AB : CS = CD : CS; folglich (5, 9. S.) AB = CD.

Zweyter Fall.

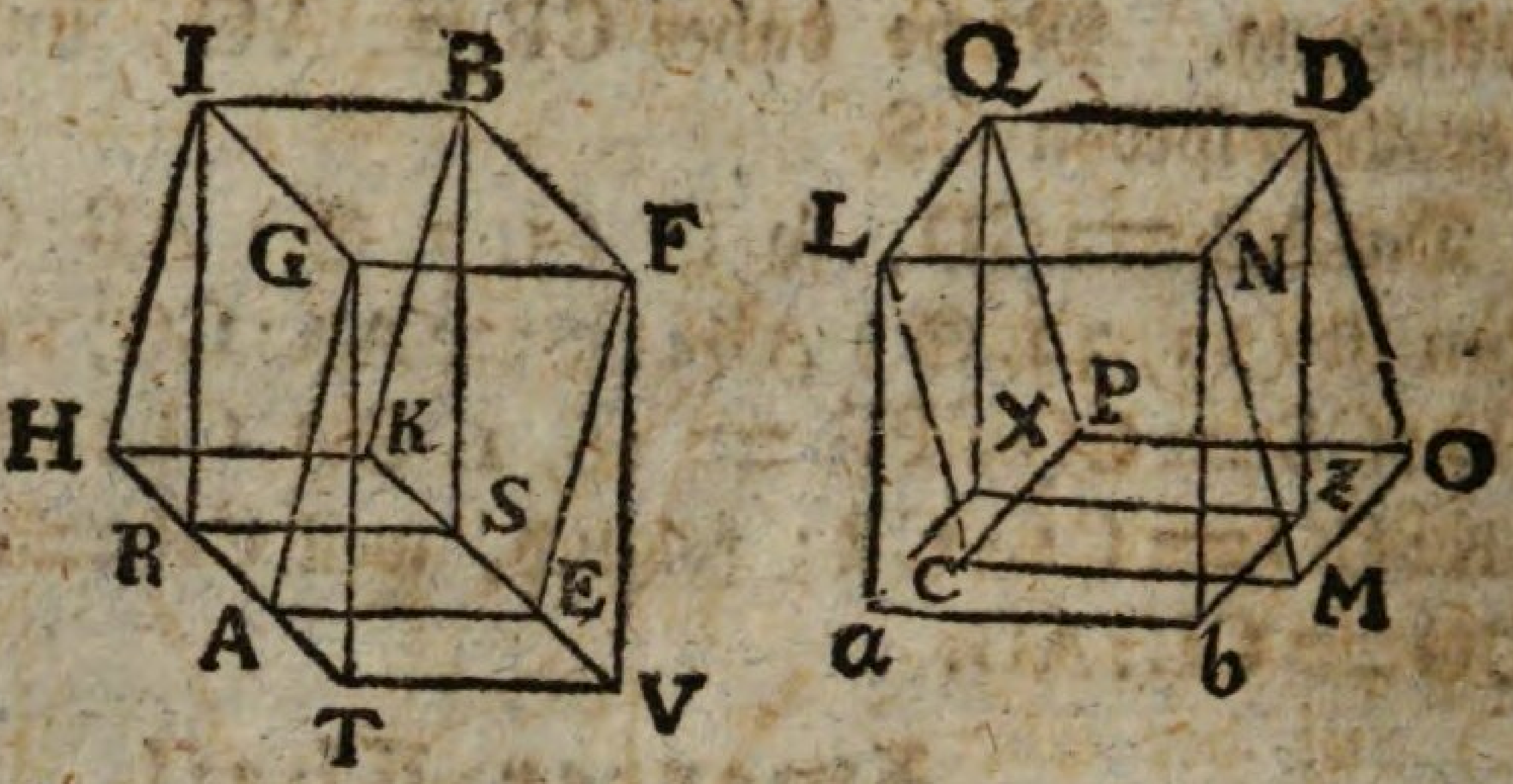
Die auf den Grundflächen AK, CO, stehenden Seitenlinien AG, EF, KB, HI, und CL, MN, OD, PQ, sind auf denselben nicht perpendikular.



Fälle (11, 11. S.) von den Punkten G, F, B, I, und von L, N, D, Q, auf die Ebenen der Grundflächen AK, CO,

 Per-

Perpendikel, die sie in den Punkten T, V, S, R und a, b, Z, X, treffen. Vollende die Parallelepipeda BT, Da; da dann (6, 4. E.) die Körper BT und AB, die TG, und Da, CD, die aL zur Höhe haben.



Erster Theil.

Ist AB = CD, so ist AK : CO = aL : TG.

Da AB = CD, aber (11, 30. S.) AB = BT, und CD = Da: so ist BT = Da, folglich, nach dem ersten Falle, TS : aZ = aL : TG. Nun ist (11, 24. S.) TS = AK, und aZ = CO. Folglich ist AK : CO = aL : TG.

Zweyter Theil.

Ist AK : CO = aL : TG; so ist AB = CD.

Da (11, 24. S.) AK = TS, und CO = aZ: so erhält man nach der Voraussetzung TS : aZ = aL : TG, folglich, nach dem ersten Falle, TB = Da. Nun ist (11, 29. 30. S.) TB = AB und Da = CD. Folglich ist AB = CD.

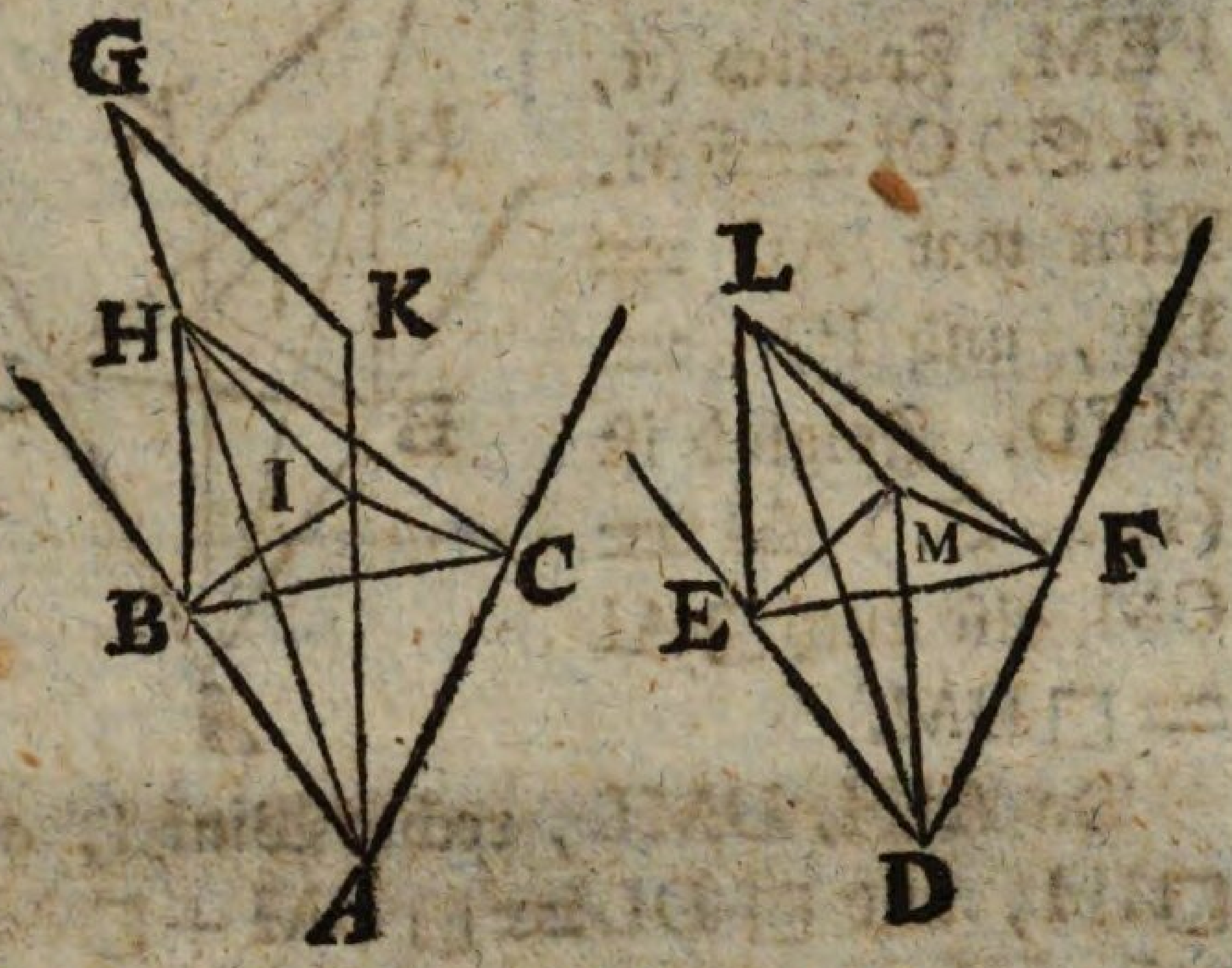
Der 35. Satz. Lehrsatz.

Werden auf zwey gleiche ebene Winkel, BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien, AG, DL, so aufgestellt, daß sie mit den Linien, welche gedachte Winkel einschließen, gleiche Winkel, BAG, EDL, und GAC, LDF, machen; und werden von willkührlichen Punkten der aufgestellten Linien, G, L, auf die Ebenen der zuerst gedachten Winkel Perpendikel, GK, LM, gefällt, von den Punkten, K, M, aber, wo diese Perpendikel die Ebenen treffen, nach obgedachten Scheitelpunkten, A, D, gerade

Linien,

Linien, KA, MD, gezogen: so schließen solche mit den aufgestellten Linien, gleiche Winkel, KAG, MDL, ein.

Mache AH = DL, und ziehe durch H der GK die HI parallel, welche also, so wie GK, (11, 8. S.) auf der Ebene durch BAC, die sie in I trifft, perpendikular ist. Fälle (1, 12. S.) von den Punkten I, M, auf die Linien AB, AC; DE, DF, die Perpendikel IB, IC; ME, MF, und ziehe die geraden Linien, HC, CB, BH; LF, FE, EL.

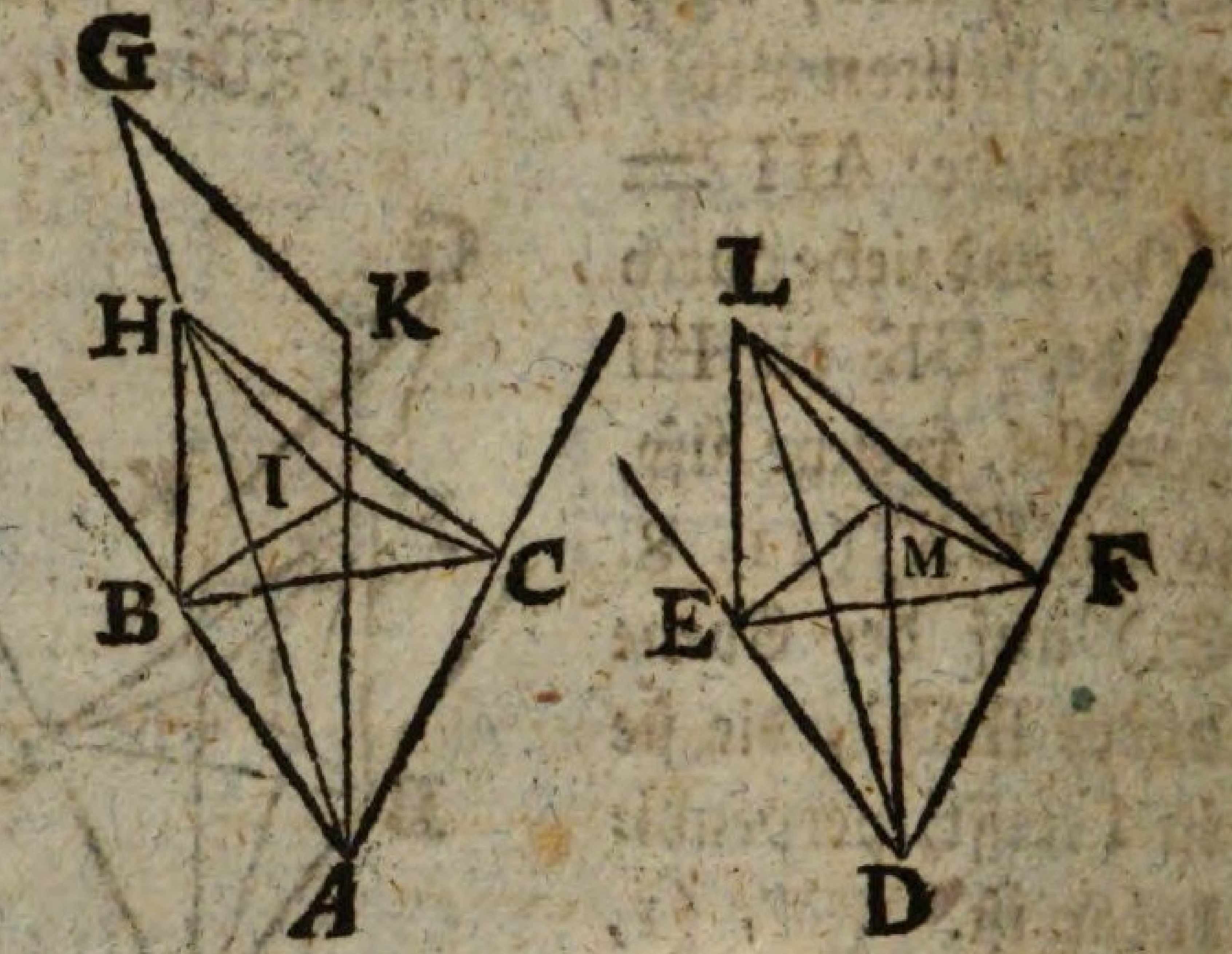


Da HI auf der Ebene durch BAC, also (11, 3. E.) auf den Linien IA, IB, IC, perpendikular ist, so ist (1, 47. S.) □ HA = □ HI + □ IA, aber □ IA = □ IC + □ CA; folglich □ HA = □ HI + □ IC + □ CA; folglich, weil □ HI + □ IC = □ HC, auch □ HA = □ HC + □ CA, folglich (1, 48. S.) HCA = R. Nun ist aus eben den Gründen LFD = R. Folglich ist HCA = LFD. Nun ist nach der Voraussetzung HAC = LDF, auch AH = DL. Folglich ist (1, 26. S.) AC = DF.

Da ferner □ AH = □ AI + □ IH, aber □ AI = □ AB + □ BI: so ist □ AH = □ AB + □ BI + □ IH; folglich, weil □ BI + □ IH = □ BH, auch □ AH = □ AB + □ BH, folglich (1, 48. S.) ABH = R. Nun ist aus gleichen Gründen DEL = R. Folglich ist ABH = DEL. Nun ist nach der Voraussetzung BAH = EDL, auch AH = DL. Folglich ist (1, 26. S.) AB = DE.

Da hiernach AB = DE, AC = DF, und nach der Voraussetzung BAC = EDF: so ist (1, 4. S.) BC = EF, und ACB = DFE; folglich, weil ICA = MFD = R., auch

BCI = EFM. Nun ist aus eben den Gründen CBI = FEM. Folglich (1, 26. S.) CI = FM. Nun war AC = DF, und ICA = MFD. Folglich ist (1, 4. S.) AI = CM, also auch □ AI = □ DM.



Da AIH, DML, rechte Winkel, also □ AH = □ AI + □ IH, und □ DL = □ DM + □ ML; aber AH = DL, also auch □ AH = □ DL: so ist □ AI + □ IH = □ DM + □ ML. Nun war nach Obigem □ AI = □ DM. Folglich ist □ IH = □ ML; also auch IH = ML. Nun war nach Obigem AI = DM, und HA = DL. Folglich ist (1, 8. S.) HAI = LDM.

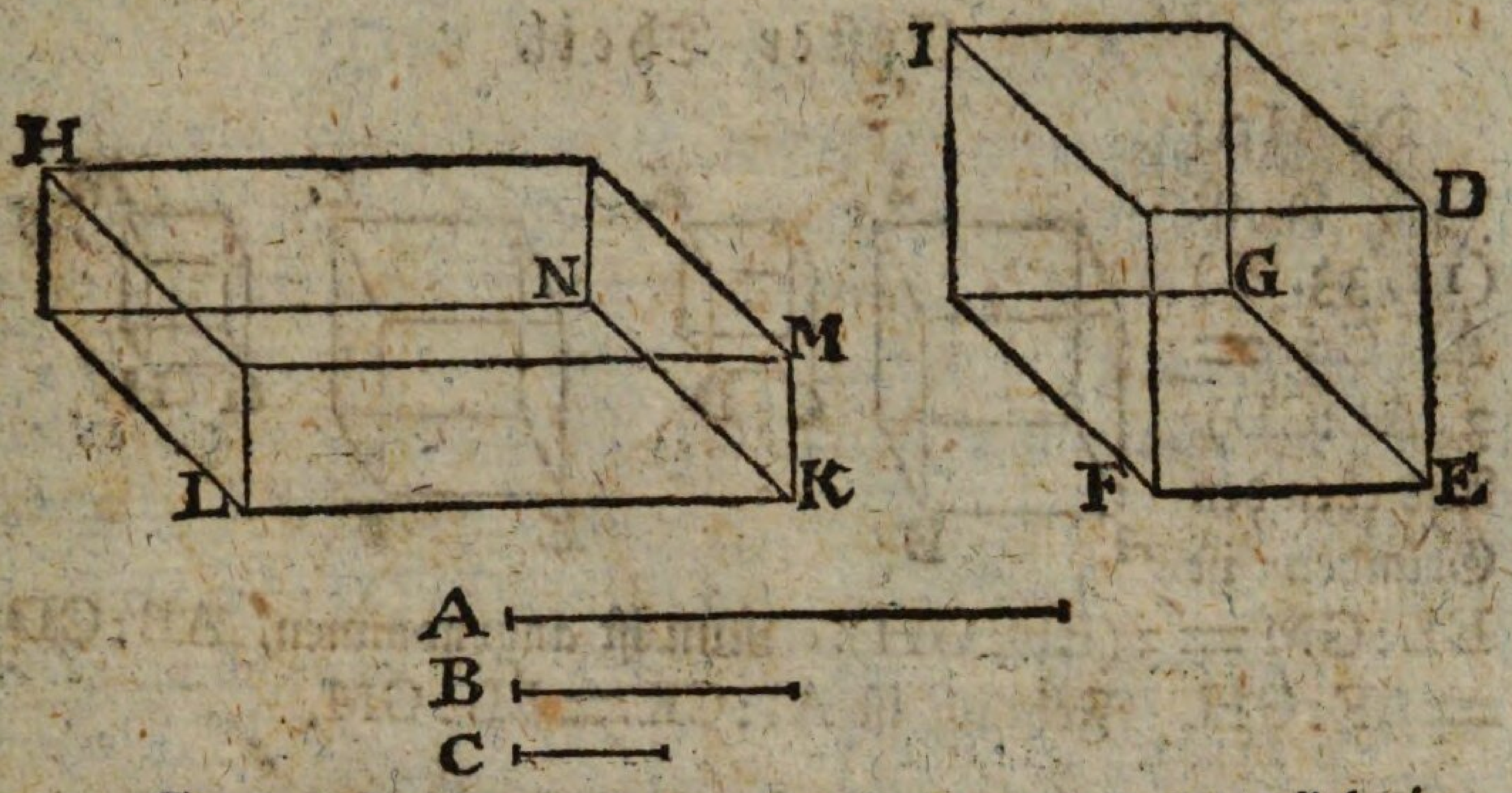
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn die auf zwey gleichen ebenen Winkeln BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten A, D, aufgestellten gleichen geraden Linien AH, DL, gleiche Winkel mit den Linien machen, welche erstgedachte Winkel einschließen, die von den Endpunkten der aufgestellten Linien H, L, auf die Ebenen der Winkel gefällten Perpendikel, HI, LM, gleich sind.

Der 36. Satz. Lehrsatz.

Sind drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt: so ist das Parallelepipedon aus allen dreyen, dem gleichseitigen Parallelepipedon von der mittlern, B, das dem ersten gleichwinklig ist, gleich.

Es sey E ein von den drey ebenen Winkeln, DEG, GEF, FED, begränzter körperlicher Winkel. Mache jede der Linien, DE,



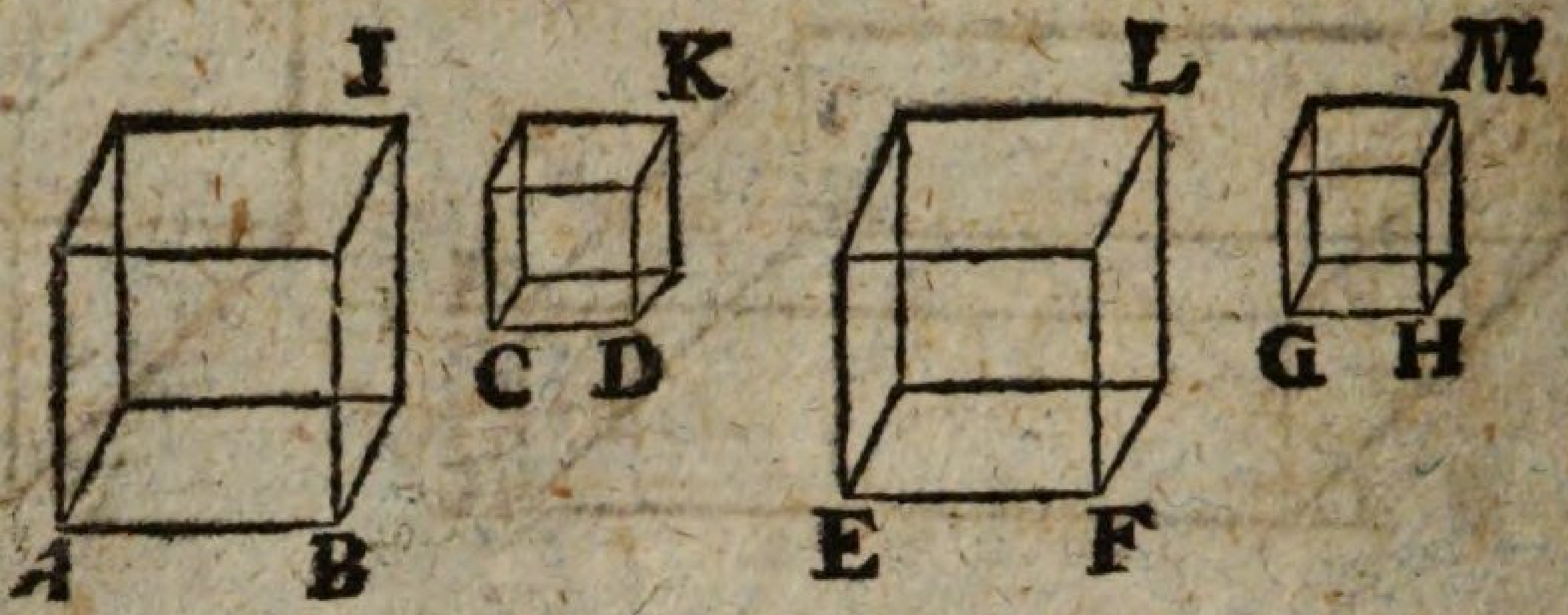
DE, GE, EF, der B gleich, und vollende das Parallelepipedon EI. Es sey ferner die KL der A gleich; stelle (11, 26. S.) an KL in K einen dem E gleichen von den ebenen Winkeln MKN, NKL, LKM, begränzten körperlichen Winkel; mache auch KN = B, und KM = C, und vollende das Parallelepipedon KH.

Da A:B = B:C und A = KL, B = KN = EF = EG = ED, C = KM: so ist KL:EF = ED:KM. Nun ist LKM = DEF. Folglich ist (6, 14. S.) das Parallelogramm ML = DF. Da auf DEF, LKM, in E, K, gleiche Linien KN, EG, so aufgestellt sind, daß LKN = FEG, und MKN = DEG: so sind (11, 35. Zus.) die von N, G, auf die Ebenen der Winkel MKL, DEF, gefällten Perpendikel gleich, also die Körper KH, EI, von gleicher Höhe. Nun sind auch nach Obigem ihre Grundflächen ML, DF, gleich. Folglich (11, 31. S.) KH = EI.

Der 37. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind die von ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelepipeda: AI, CK, EL, GM, auch proportionirt. Und sind vier ähnliche und ähnlich liegende Parallelepipeda proportionirt: so sind die geraden Linien, von denen sie beschrieben sind, auch proportionirt.

Erster Theil.



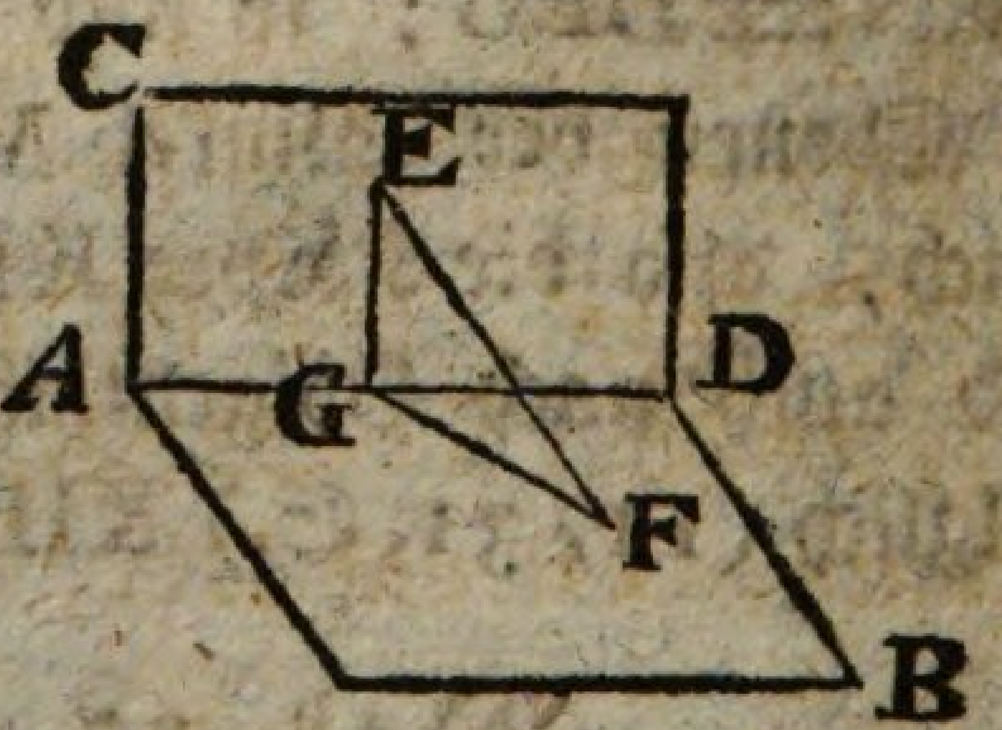
Da AI ∾ CK, so ist (11, 33. S.) AI : CK = 3 (AB : CD). Aus eben den Gründen ist EL : GM = 3 (EF : GH). Nun ist angenommen, AB : CD = EF : GH. Folglich ist AI : CK = EL : GM.

Zweyter Theil.

Da wieder (11, 33. S.) AI : CK = 3 (AB : CD), auch EL : GM = 3 (EF : GH), und nach der Annahme AI : CK = EL : GM; so ist AB : CD = EF : GH.

Der 38. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Ebenen, AB, CD, auf einander perpendikular: so trifft der aus einem willkührlichen Punkte, E, der einen Ebene auf die andere gefällte Perpendikel den gemeinschaftlichen Durchschnitt beyder Ebenen, AD.

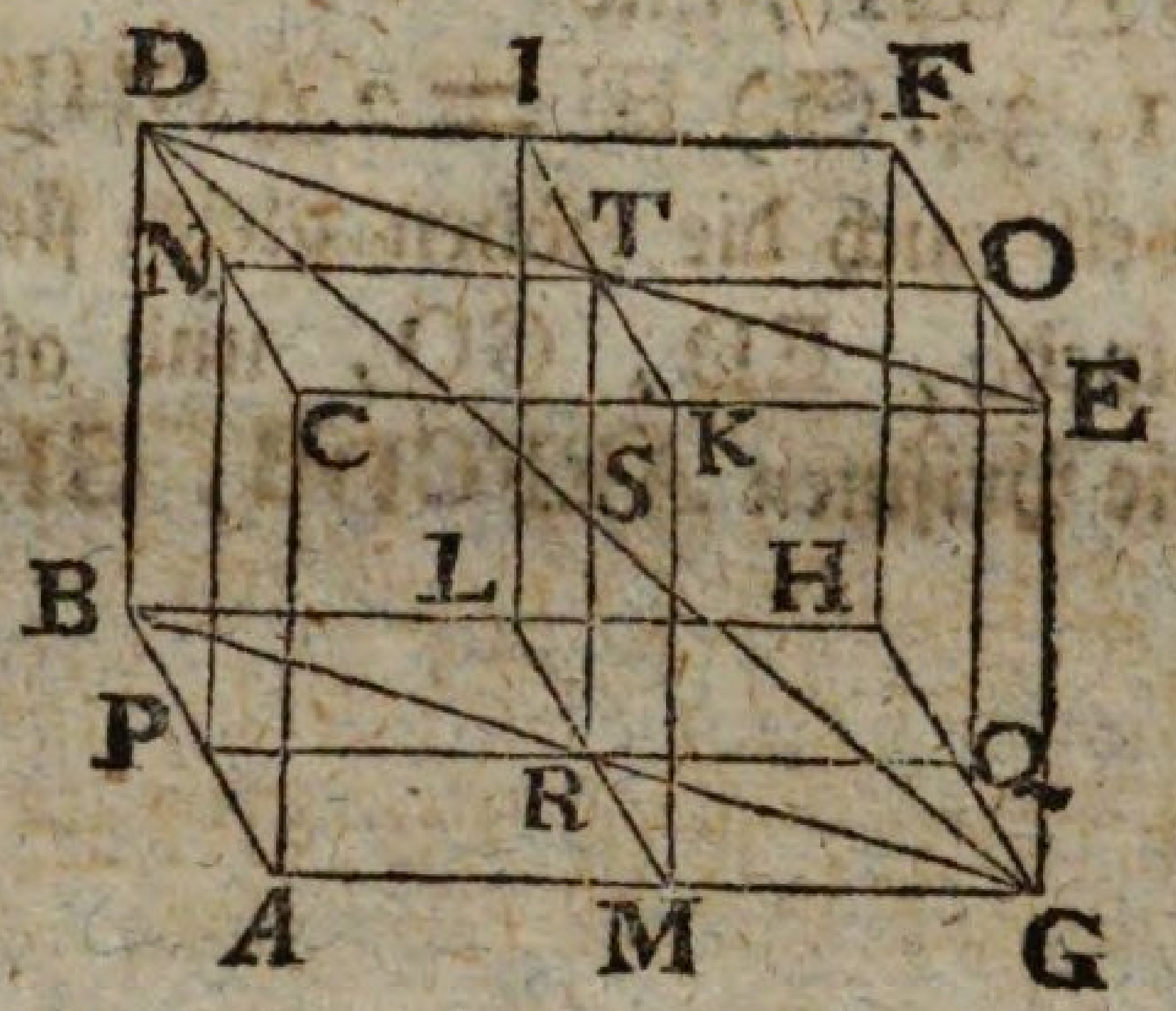


Träfe solcher Perpendikel nicht in AD, sondern die Ebene AB in einem andern Punkte F, wie EF: so fälle (1, 11. S.) in der Ebene AB aus F auf AD den Perpendikel FG, welcher also (11, 4. E.) auf der Ebene CD perpendikular ist. Ziehe EG. Demnach wäre FGE = R., aber auch EFG = R. Folglich wären im △ EFG zwey Winkel = 2 R., welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Folglich kann der aus E auf die Ebene AB gefällte Perpendikel nicht außer AD fallen, und muß also AD treffen.

Der

Der 39. Satz. Lehrsatz.

Halbirt man die Seiten zweyer einander gegenüber liegenden Ebenen, AH, CF, eines Parallelepipedon, AF, und legt durch die Halbirungspunkte, I, K, M, L, O, N, P, Q, Ebenen, IM, NQ: so halbiren die Durchschnittslinie solcher Ebenen, TR, und des Parallelepipedon Diagonale, DG, einander.



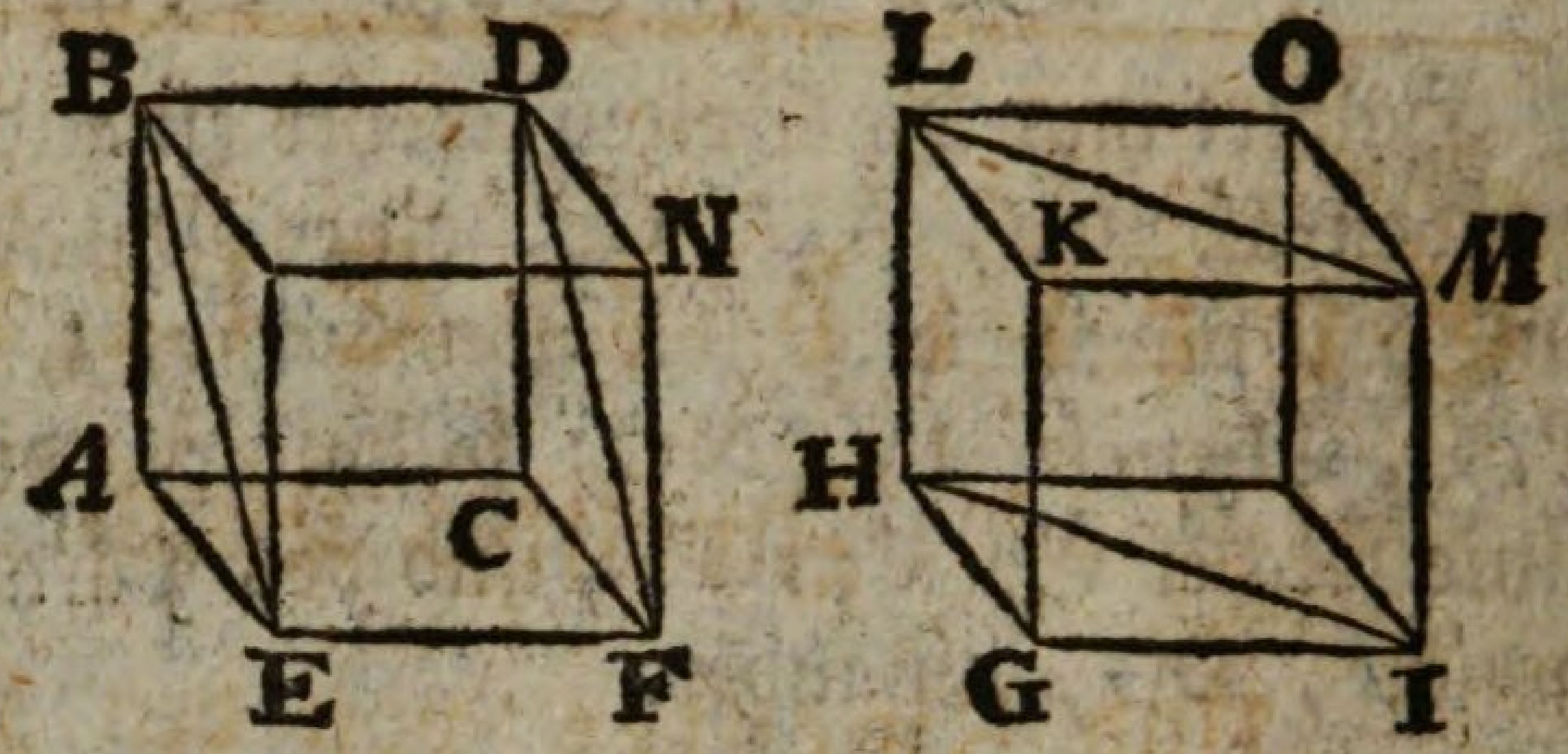
Zieht man DT, TE, BR, RG: so ist, weil DN, OE, parallel, (1, 29. S.) DNT = TOE. Nun ist DN = OE, und NT = TO. Folglich (1, 4. S.) DT = TE, auch NTD = OTE, also (1, 14. S.) DTE eine gerade Linie. Aus gleichen Gründen ist auch BR = RG, und BRG eine gerade Linie.

Da CA der DB sowohl als der EG gleich und parallel ist: so ist auch (11, 9. S.) DB der EG gleich und parallel. Folglich sind (1, 33. S.) DE, GB, gleich und parallel. Folglich sind (11, 7. S.) DG, TR, in Einer Ebene.

Da DE, BG, gleich und parallel sind, auch DT = TE, und BR = RG, so ist DT = GR. Nun ist auch (1, 29. S.) TDS = SGR, und (1, 15. S.) DST = RSG. Folglich ist (1, 26. S.) TS = SR, und DS = SG, folglich sind beyde Linien, TR und DG, in S halbirt.

Der 40. Satz. Lehrsatz.

Zwey gleich hohe Prismen, AEBCFD, HGIMKL, von welchen das eine ein Parallelogramm, AEFC, das andere einen Triangel GHI, dessen Doppeltes das Parallelogramm ist, zur Grundfläche hat, sind einander gleich.



Vollende die Parallelepipeda ED, GO.

Da angenommen ist, daß das Parallelogramm AF = 2 △ GHI, und (1, 34. S.) HI = 2 △ GHI: so ist AF = HI; folglich sind, weil auch die Höhen gleich sind, (11, 31. S.) die Parallelepipeda, ED, GO, und also auch deren Hälften, nämlich die Prismen AEFCDB, GHIMKL, einander gleich.

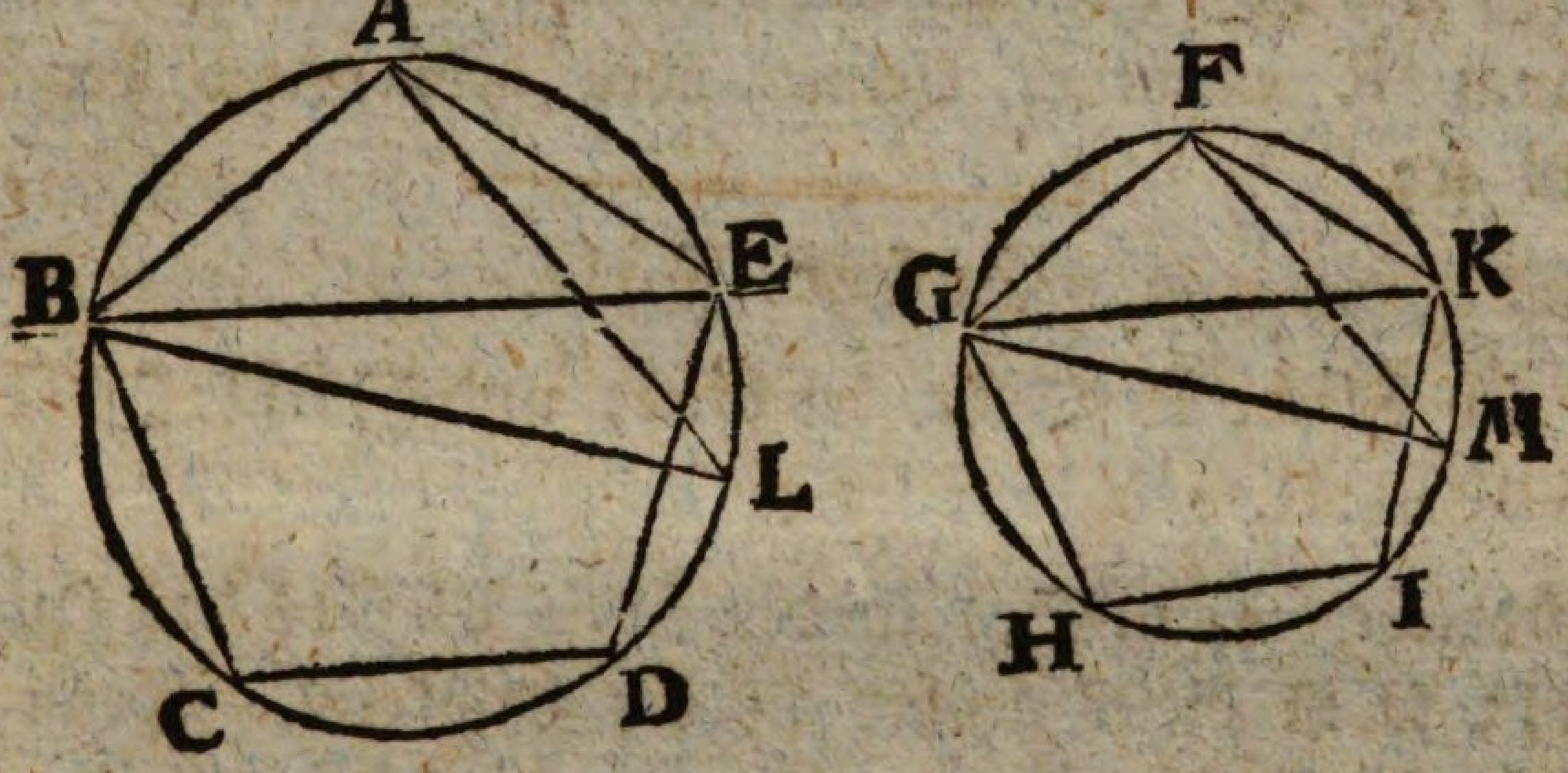
Euklid's Elemente

Zwölftes Buch

Und Zweytes von den Körpern.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche in Kreisen beschriebene Polygone, ABCDE, FGHIK, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, BL, GM.



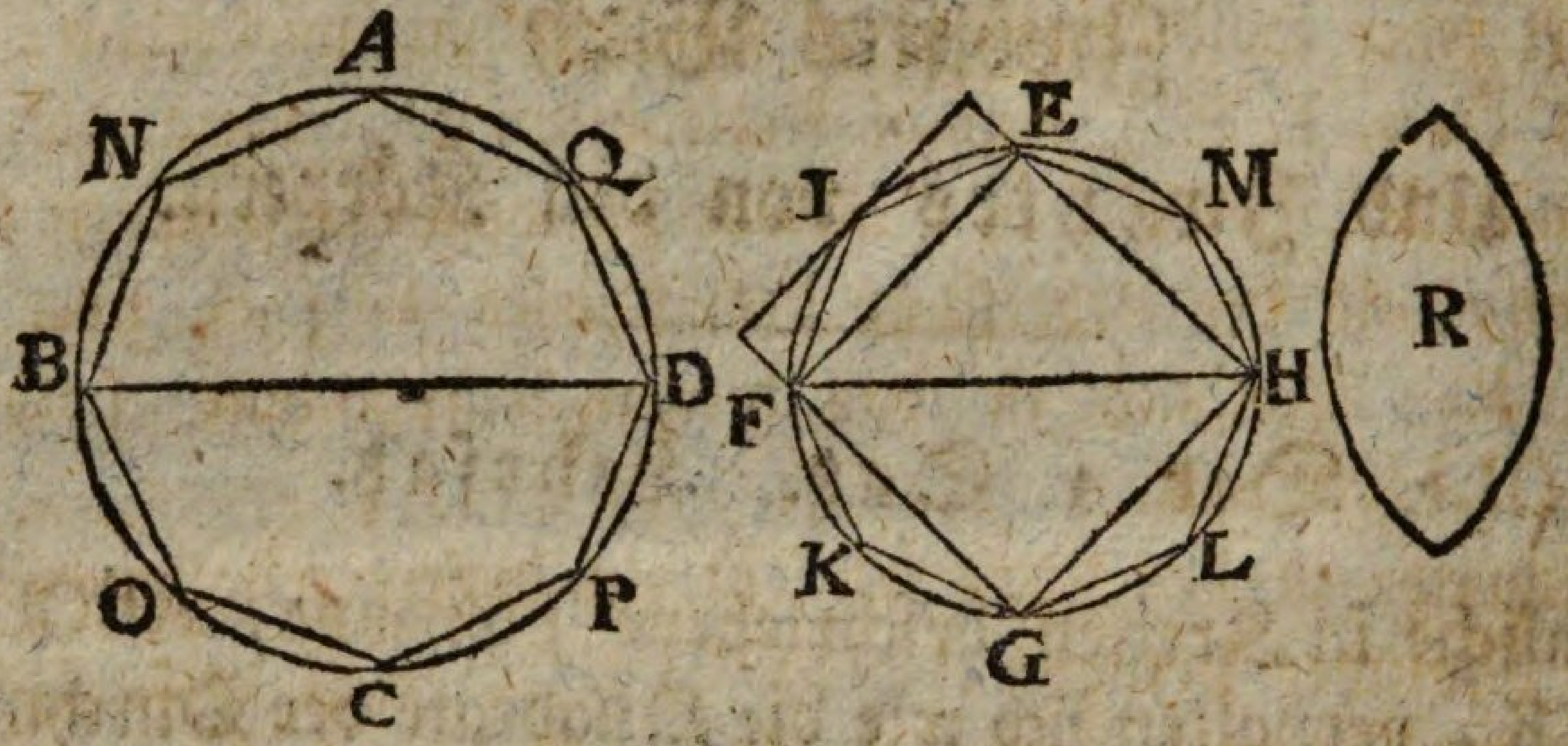
Ziehe BE, AL; GK, FM.

Da wegen Aehnlichkeit der Polygone (6, 1. E.) BAE = GFK, und BA:AE = GF:FK; so sind (6, 6. S.) die Triangel ABE, FGK, gleichwinklig, also AEB = FKG. Nun ist (3, 21. S.) AEB = ALB, und FKG = FMG. Folglich ist ALB = FMG; aber (3, 31. S.) BAL = GFM = R., folglich auch ABL = FGM. Demnach sind die Triangel ABL, FGM, gleichwinklig; folglich ist (6, 4. S.) BL: GM = BA:GF; also auch 2 (BL:GM) = 2 (BA:GF). Nun ist (6, 20. S.) 2 (BL:GM) = □ BL:□ GM, und 2 (BA:GF) = ABCDE:FGHIK. Folglich ist ABCDE :FGHIK = □ BL:□ GM.

Der

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Kreise, ABCD, EFGH, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, BD, FH.



Wäre nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH; so sey □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, so daß der Flächenraum R entweder kleiner oder größer als der Kreis EFGH sey.

Erster Fall.

Es sey Fläche R < Kr. EFGH, und □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R.

Beschreibe (4, 6. S.) in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH; so ist dieses größer als der Halbkreis. Denn werden durch die Punkte E, F, G, H, Berührungslinien gezogen: so ist (1, 41. S.) das innere Quadrat EFGH die Hälfte des äußern. Nun ist das innere Quadrat größer als der Halbkreis.

Halbire die Bogen EF, FG, GH, HE, in den Punkten I, K, L, M, und ziehe EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME: so ist jeder der entstandenen Triangel, IFE, KGF, LHG, MEH, größer als die Hälfte des Kreisabschnitts, worin er befindlich ist. Denn werden durch die Punkte I, K, L, M, Berührungslinien gezogen, und die Parallelogramme über EF, FG, GH, HE, vollendet: so ist jeder der obgenannten Triangel die Hälfte des Parallelogramms, worin er befindlich

ist.

ist. Nun ist jeder Kreisabschnitt kleiner, als das zugehörige Parallelogramm. Folglich ist jeder der obgenannten Triangel größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts.

Wird demnach die Halbirung der Kreisbogen fortgesetzt, und bei jeder Halbirung obige Construction wiederholt: so bleiben (10, 1. S.) einmal Kreisabschnitte, etwa die auf den Linien EI, IF, FK u. s. w. übrig, welche zusammen kleiner sind, als der Ueberschuß des Kreises EFGH über die Fläche R. Folglich ist das hierdurch erhaltene Polygon EIFKGLHM > R.

Beschreibe in den Kreis ABCD ein diesem erhaltenen Polygone ähnliches Polygon ANBOCPDQ: so ist (12, 1. S.) □ BD : □ FH = Polyg. ANB rc.: Polyg. EIF rc. Nun war angenommen □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R. Folglich ist Kr. ABCD : R = Polyg. ANB rc. : Polyg. EIF rc. Nun ist offenbar Kr. ABCD > Polyg. ANB rc. Folglich ist (5, 14. S.) auch R > Polyg. EIF rc., welches dem Vorigen, daß R < EIF rc. sey, widerspricht. Demnach ist nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, wenn R < Kr. EFGH.

Aus eben den Gründen ist auch nicht □ FH : □ BD = Kr. EFGH : Z, wenn die Fläche Z < Kr. ABCD.

Zweyter Fall.

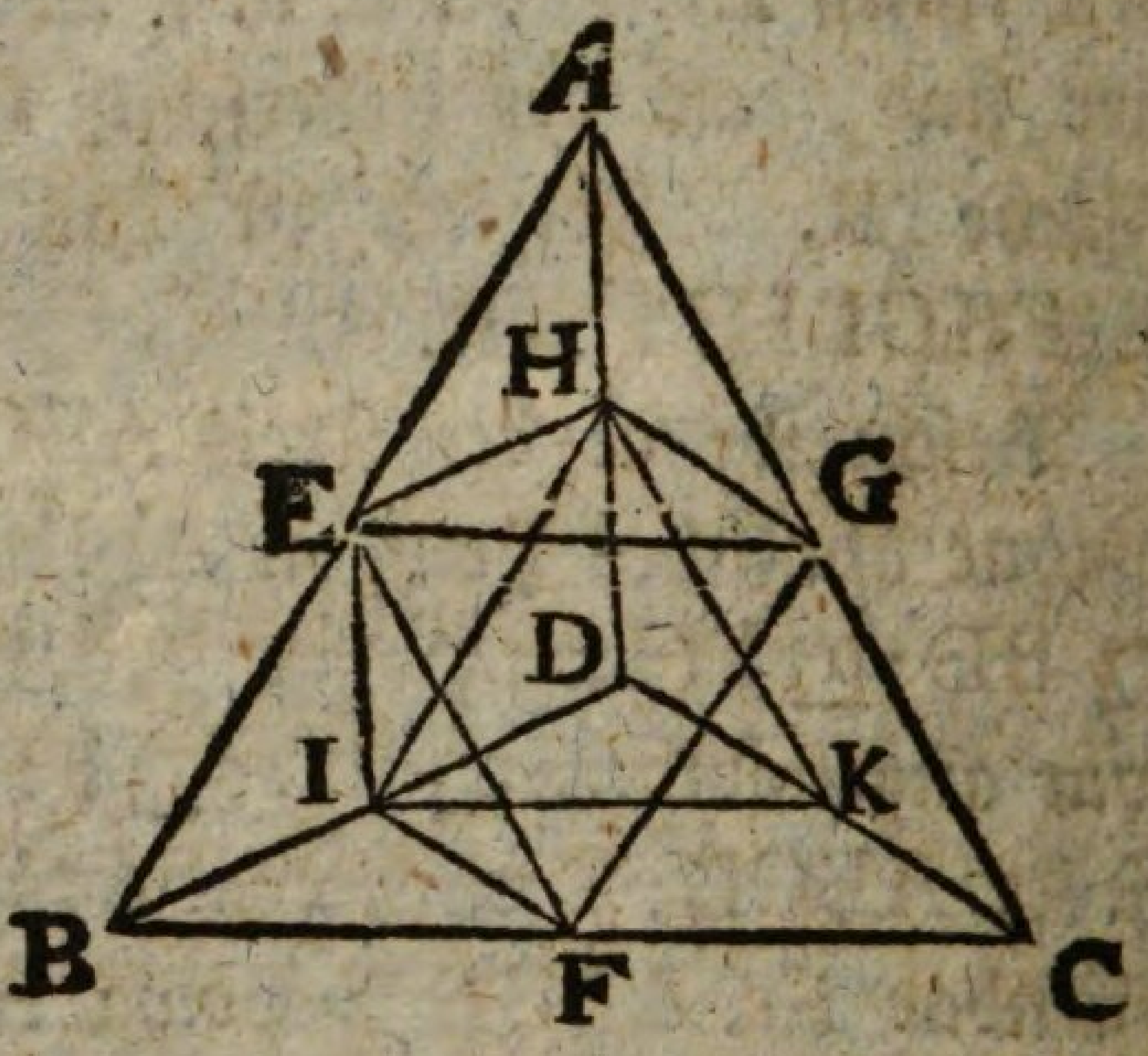
Es sey Fläche R > Kr. EFGH, und □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, folglich auch umgekehrt □ FH : □ BD = R : Kr. ABCD.

Es sey R : Kr. ABCD = Kr. EFGH : Z, so daß, weil R > Kr. EFGH ist, (5, 14. S.) auch Kr. ABCD > Z sey. Nun ist angenommen □ FH : □ BD = R : Kr. ABCD. Folglich ist □ FH : □ BD = Kr. EFGH : Z; welches, da Z < Kr. ABCD ist, nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, wenn R > Kr. EFGH, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn R < Kr. EFGH. Folglich ist □ BD : □ FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH.

Der

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Jede dreyseitige Pyramide, ABCD, läßt sich in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, dreyseitige Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen, welche zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide sind, zerlegen.



Die Grundfläche der Pyramide sey der Triangel ABC, und ihr Gipfel D. Halbire die Linien AB, BC, CA; AD, DB, DC, in den Punkten E, F, G; H, I, K. Ziehe die Linien EH, EG, GH, wodurch die dreyseitige Pyramide AEGH; ferner die Linien HI, IK, KH, wodurch die dreyseitige Pyramide HIKD; endlich die Linien IF, FG, wodurch das Prisma EBFGHI auf der Grundfläche EBFG, und das Prisma GFCKHI auf der Grundfläche FGC entstehet.

Erster Theil.

Daß die beyden dreyseitigen Pyramiden, AEGH, HIKD, deren Spitzen H, D, und Grundflächen AEG, HIK, einander gleich und ähnlich sind.

Da AE = EB, und AH = HD: so ist (6, 2. S.) EH der DB parallel; aber aus eben den Gründen auch HI der AB; also HEBI ein Parallelogramm, folglich (1, 34. S.) HI = EB; also, weil EB = AE, auch AE = HI. Nun ist AH = HD, und (1, 29. S.) EAH = IHD. Folglich ist (1, 4. S. und 6, 4. S.) $\triangle$ AEH $\cong$ $\triangle$ HID, und EH = ID. Aus gleichen Gründen ist $\triangle$ AHG $\cong$ $\triangle$ HKD, und KD = GH.

Da hiernach HE der DI, und HG der KD, gleich und parallel ist: so ist (11, 10. S.) EHG = IDK; folglich (1,

(1, 4. S. und 6, 4. S.) △ EHG≌IDK. Aus eben den Gründen ist △ AEG≌HIK.

Demnach werden die Pyramiden AEGH, HIKD, von gleich viel, gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt, und sind folglich (11, 10. E.) einander gleich und ähnlich.

Zweyter Theil.

Daß gedachte Pyramiden, AEGH, HIKD, auch der ganzen Pyramide, ABCD, ähnlich sind.

Da HI der AB parallel: so sind (1, 29. S.) die Triangel ADB, HDI, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt; folglich (6, 1. E.) die Triangel ADB, HDI, ähnlich. Aus eben den Gründen sind die Triangel BDC, DIK, und ADC, DHK, ähnlich.

Da BA der IH, und AC der HK parallel ist: so ist (11, 10. S.) BAC=IHK, auch (5, 15. S.) BA : AC=IH : HK; folglich (6, 6. S.) △ ABC ∾ △ HIK.

Demnach ist (11, 9. E.) die Pyramide ABCD der HIKD ähnlich, folglich auch der AEGH, weil diese nach dem ersten Theile der HIKD ähnlich ist.

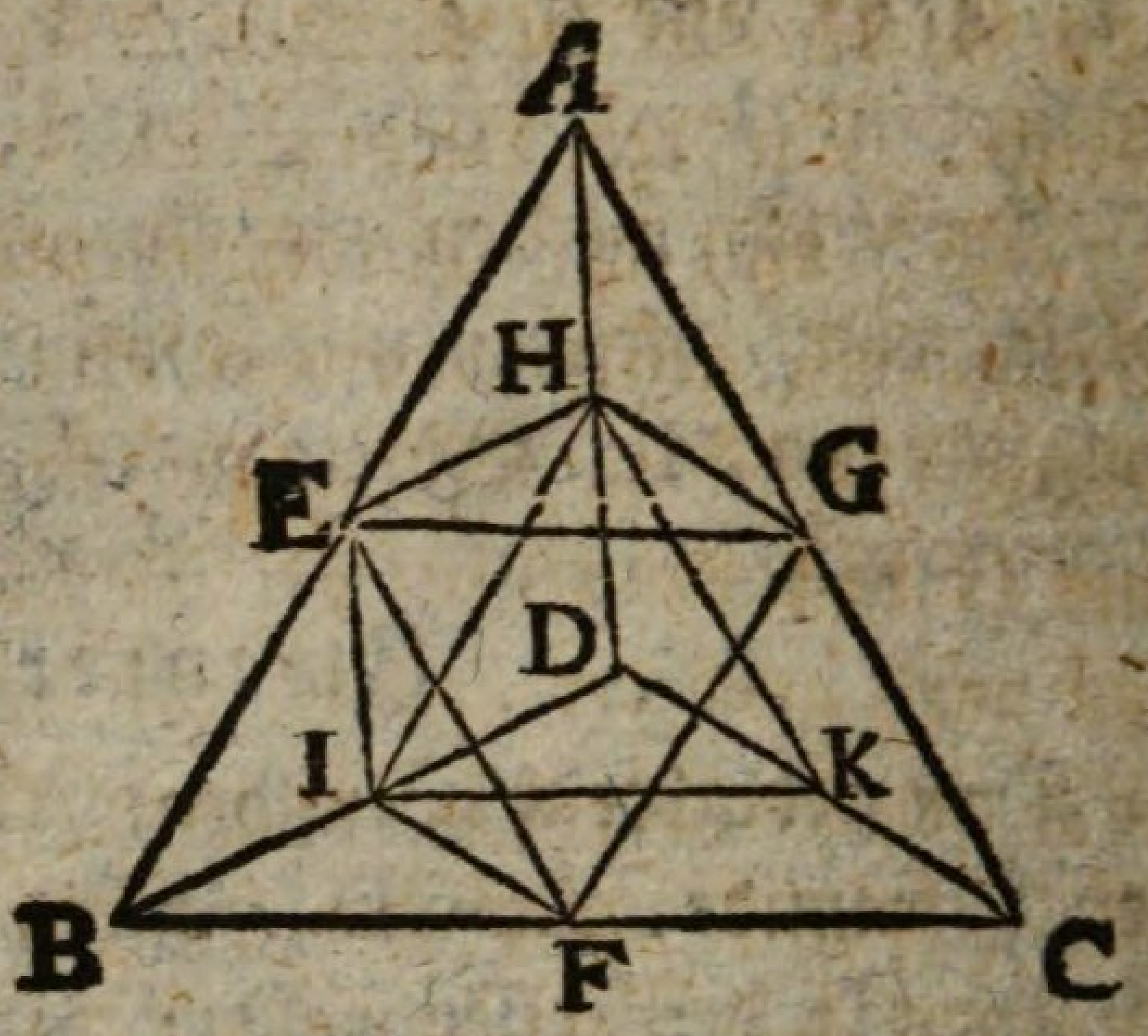
Dritter Theil.

Daß die Prismen, EBFGHI, GFCKHI, welche, wenn man von der ganzen Pyramide obige beyde kleine Pyramiden wegnimmt, übrig bleiben, einander gleich sind.

Da BF=FC, so ist (1, 41. S.) EBFG=2 △ GFC. Nun haben gedachte Prismen, weil in dem ersten der Grundfläche EBGF, die Linie HI, in dem zweyten der Grundfläche GFC, die Fläche IKH gegenüber liegt, gleiche Höhe. Folglich sind (11, 40. S.) diese Prismen gleich.

Vierter Theil.

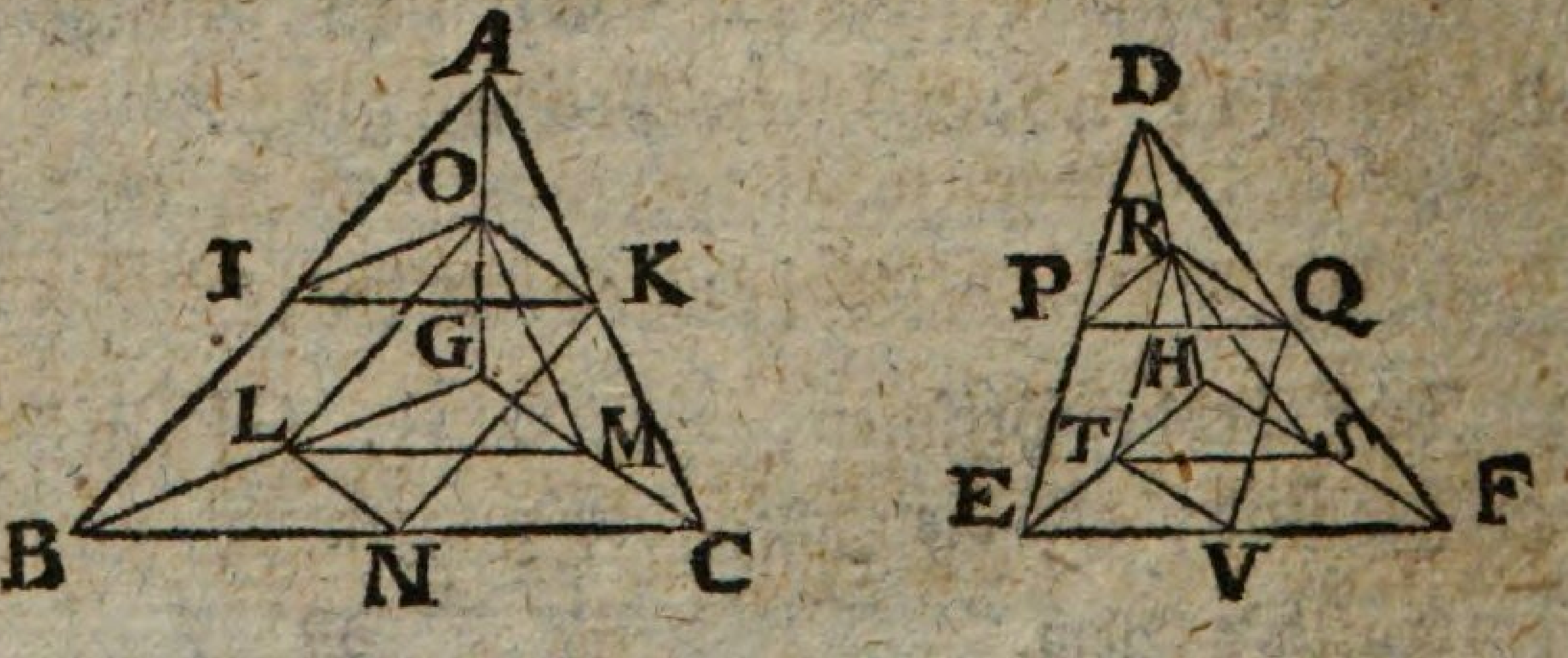
Daß beyde Prismen, EBFGHI, GFCKHI, zusammen größer sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide, ABCD.



Ziehe EF, EI, so entsteht eine Pyramide EBFI, deren Grundfläche EBF, und Spitze I, und es ist offenbar Prisma EBFGHI > Pyr. EBFI. Nun sind die Pyramiden EBFI, AEGH, weil sie von gleich viel gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt werden, gleich und ähnlich. Folglich ist Prisma EBFGHI > Pyr. AEGH. Nun war Prisma EBFGHI = Prisma FGCKHI, u. Pyr. AEGH = Pyr. HIKD. Folglich ist das Prisma EGCKHI > Pyr. HIKD. Folglich ist Prisma EBFGHI + Prisma GFCKHI > Pyr. AEGH + Pyr. HIKD. Demnach ist die ganze Pyramide ABCD in zwey ungleiche Theile getheilt, wovon der größere die beyden Prismen, der kleinere die beyden Pyramiden enthält. Folglich sind die beyden Prismen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Werden zwey dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, Pyramiden und in zwey gleiche Prismen zerlegt, und die entstandenen Pyramiden wieder auf eben die Art getheilt, und dieß immer so fort: so verhalten sich alle Prismen in der einen Pyramide zu denen von gleicher Anzahl in der andern, wie die Grundfläche der einen, ABC, zur Grundfläche der andern, DEF.



Da die beyden Pyramiden ABCG, DEFH, von gleicher Höhe sind: so sind offenbar, die

von

von G, H, auf die Ebenen ABC, DEF, gefällten Perpendikel gleich. Da der Perpendikel aus G und die Linie GC (11, 17. S.) von den Parallelebenen ABC, OLM, in gleicher Verhältniß geschnitten werden: so wird, weil GC von der Ebene OLM in M halbirt ist, auch gedachter Perpendikel aus G von der Ebene OLM halbirt. Aus eben den Gründen wird auch der aus H auf die Ebene DEF gefällte Perpendikel von der Ebene RTS halbirt. Nun sind gedachte Perpendikel, folglich auch ihre Hälften, gleich. Folglich haben die Prismen KNCMLO, QVFSTR, gleiche Höhe, und verhalten sich daher (11, 28. 32. S.) wie ihre Grundflächen KNC, QVF. Nun sind die Prismen in jeder der Pyramiden ABCG, DEFH, einander gleich, und daher Prism. IKNBLO : Prism. KNCMLO = Prism. EPQVTR : Prism. QVFSTR; also (5, 18. 16. S.) Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR = Prism. KNCMLO : Prisma QVFSTR. Folglich ist △ KNC : △ QVF = Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR.

Da BN = NC, und AK = KC; folglich (6, 2. S.) NK der AB parallel: so ist (6, 4. S.) △ ABC ∾ △ KNC. Aus eben den Gründen ist △ DEF ∾ △ QVF. Nun ist BC = 2 CN, und EF = 2 FV, und daher BC : CN = EF : FV. Folglich ist (6, 22. S.) △ ABC : △ KNC = △ DEF : △ QVF, also **verwechselt** △ ABC : △ DEF = △ KNC : △ QVF = Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR, nach dem oben Bewiesenen.

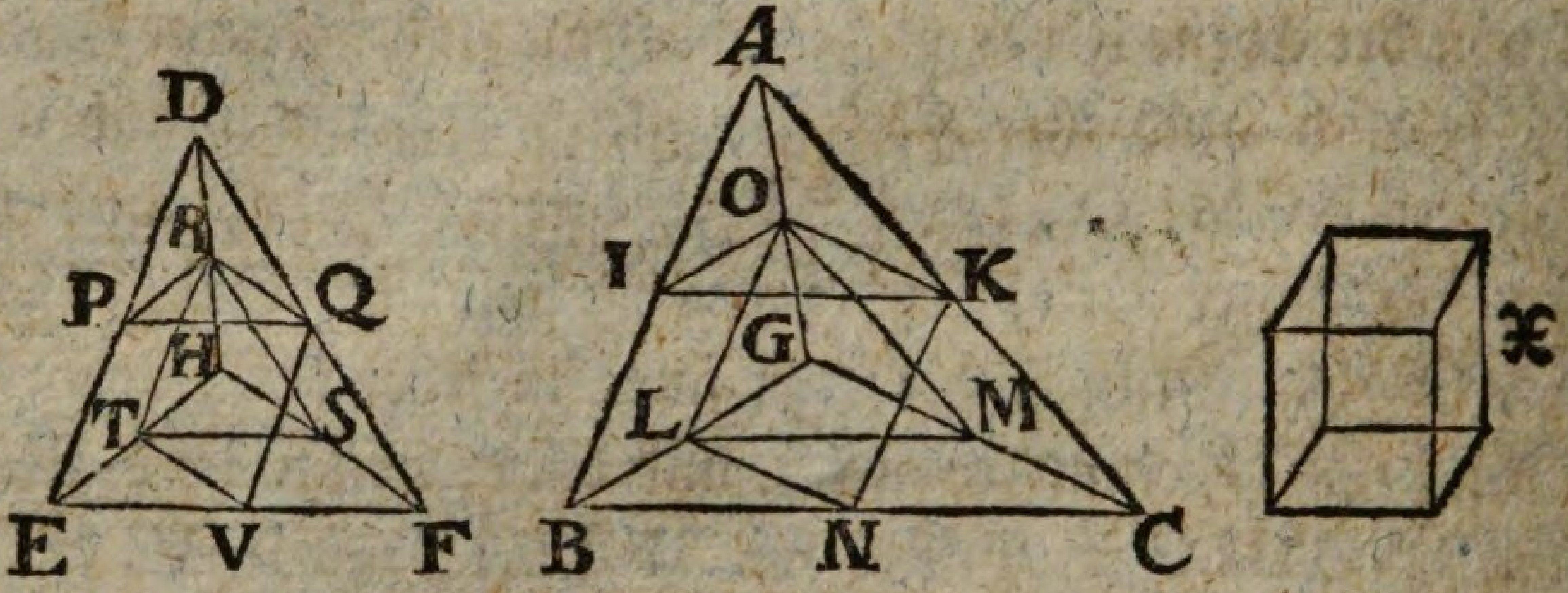
Werden nun die entstandenen kleinern Pyramiden OLMG, RTSH, eben so zerlegt: so verhalten sich nach obigen Gründen die Grundflächen OLM, RST, wie die beyden Prismen in jeder der beyden obigen Pyramiden. Nun ist △ OLM : △ RST = △ ABC : △ DEF. Folglich ist △ ABC △ DEF = vier Prism. in ABCG : vier Prism. in DEFG. Auf eben die Art wird der Beweis auch für die Prismen in AIKO, DPQR,

 und

und überhaupt für alle folgende Eintheilungen von gleicher Anzahl geführt.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABC, DEF.



Wäre nicht △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH, so sey △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als Pyramide DEFH sey.

Erster Fall.

Es sey Körper X < Pyr. DEFH, und △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X.

Zerlege (12, 3. S.) die Pyr. DEFH in zwey kleinere gleiche einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen; das also die beyden Prismen zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide DEFH sind. Diese kleineren Pyr. zerlege auf eben die Art, und so immer fort, bis du (10, 1. S.) auf Pyramiden kommst, welche kleiner sind, als der Ueberschuß der Pyr. DEFH über den Körper X. Es seyen diese Pyramiden DPQR, RTSH: so sind die in der Pyr. DEFH übrigen Prismen größer als X.

Die andere Pyramide, ABCG, werde auf eben die Art nach gleicher Anzahl zerlegt: so ist (12, 4. S.) △ ABC : △ DEF = Prism. in ABCG : Prism. in DEFH. Nun ist angenom-

genommen △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X. Folglich ist Pyr. ABCG : X = Prism. in ABCG : Prism. in DEFH. Nun ist Pyr. ABCG > Prism. in ABCG. Folglich ist (5, 14. S.) X > Prism. in DEFH, welches dem Vorigen, Prism. in DEFH > X, widerspricht. Demnach ist nicht △ ABC : △ DEF = Pyram. ABCG : X, wenn X < Pyram. DEFH. Aus eben den Gründen ist auch nicht △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z, wenn Z < Pyr. ABCG.

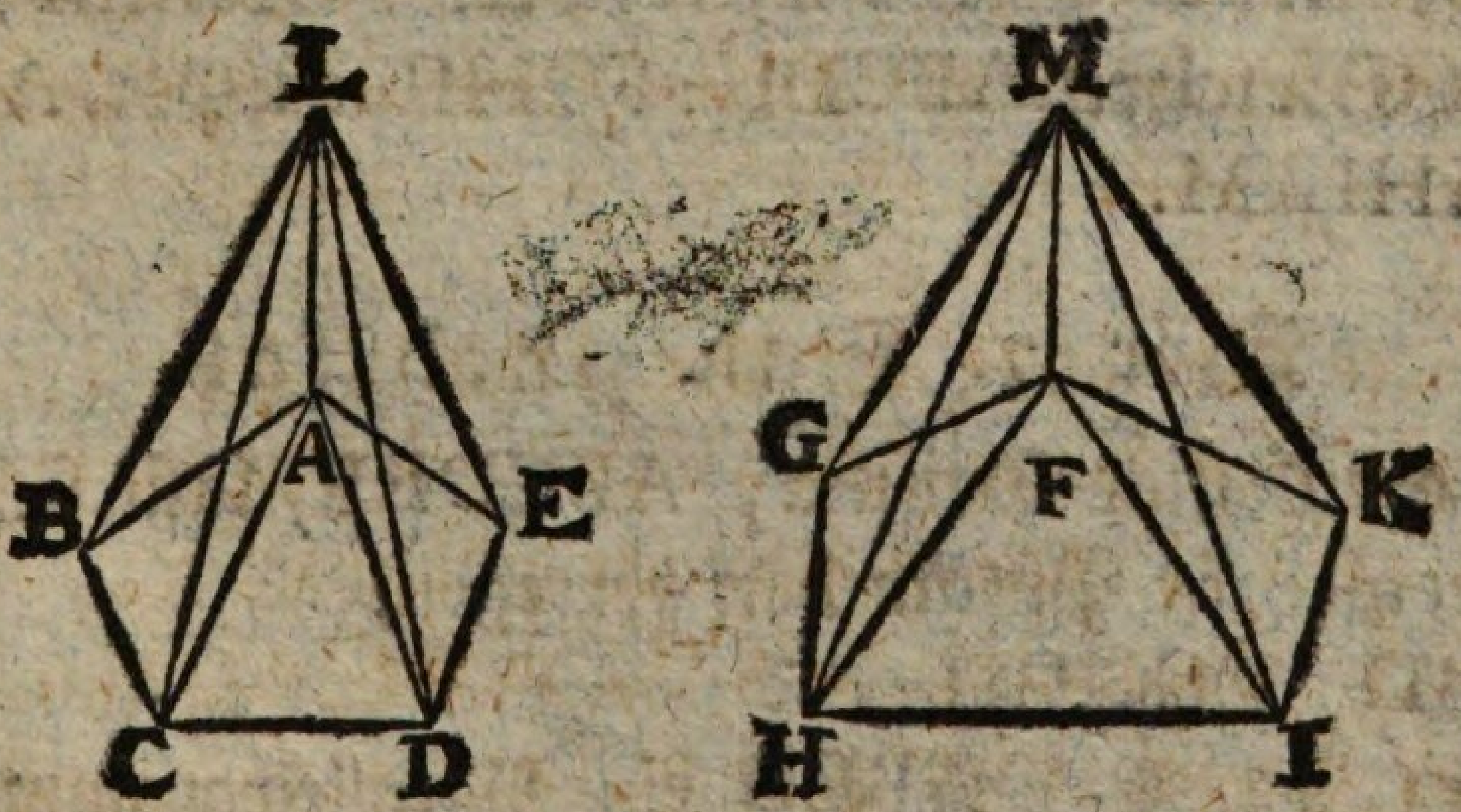
Zweyter Fall.

Es sey X > Pyr. DEFH und △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, folglich auch umgekehrt △ DEF : △ ABC = X : Pyr. ABCG.

Es sey X : Pyr. ABCG = Pyr. DEFH : Z, also Z < Pyr. ABCG. Nun ist angenommen △ DEF : △ ABC = X : Pyr. ABCG. Folglich ist △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z; welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, wenn X > Pyr. DEFH, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn X < Pyr. DEFH. Folglich ist △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

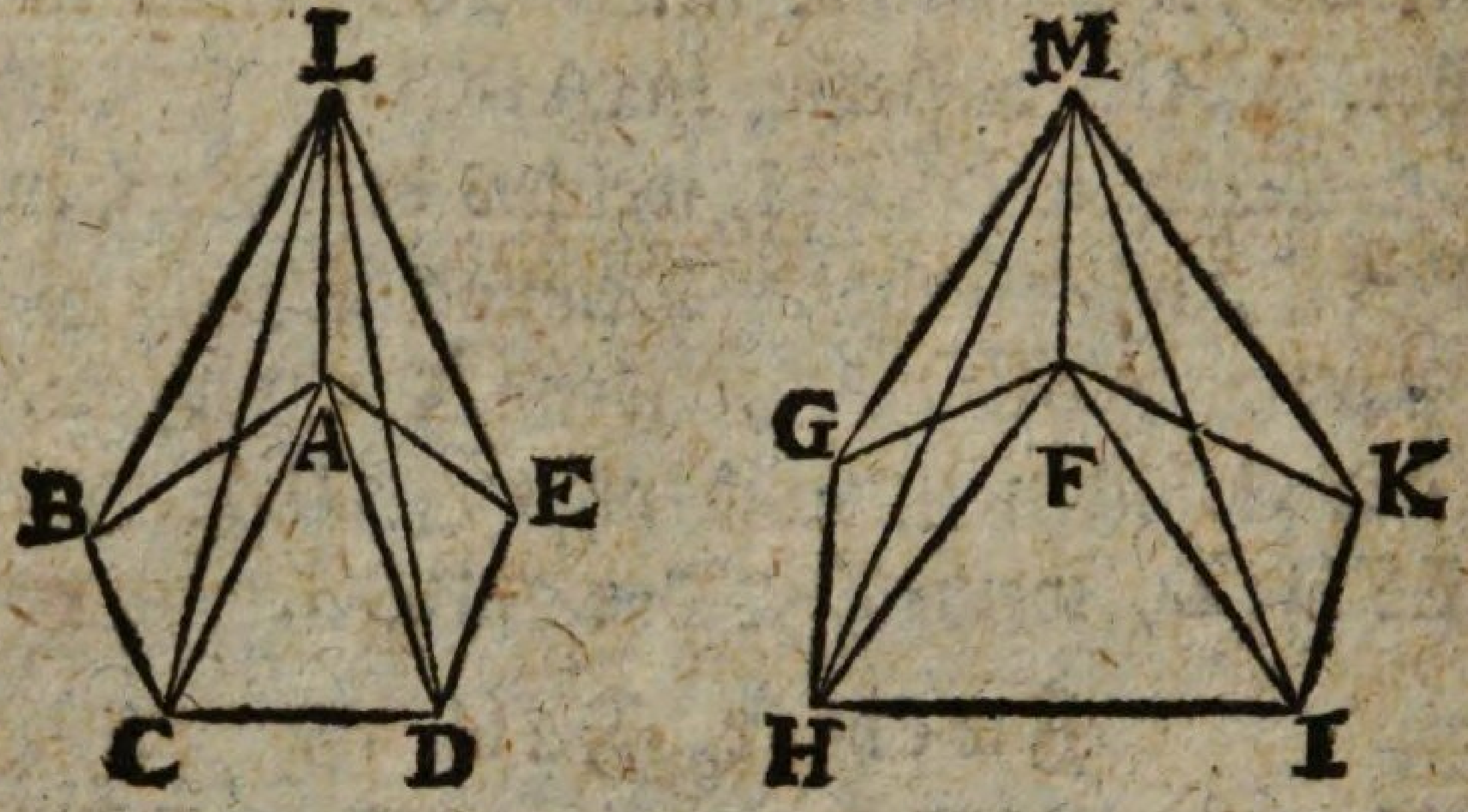
Vielseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCDEL, FGHIKM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCDE, FGHIK.



Theile diese Grundflächrn in ihre Triangel, ABC, ACD, ADE, FGH, FHI, FIK, und stelle dir über jedem Triangel

 eine

eine Pyramide von gleicher Höhe mit den beyden anfänglichen Pyramiden vor.



Da (12, 5. S.) △ ABC : △ ACD = Pyr. ABCL : Pyr. ACDL; so ist **verbunden** (5, 18. S.) ABCD : △ ACD = Pyr. ABCDL : Pyr. ACDL. Nun ist (12, 5. S.) auch △ ACD : △ ADE = Pyr. ACDL : Pyr. ADEL. Folglich ist (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** ABCD : △ ADE = Pyr. ABCDL : Pyr. ADEL, folglich (5, 18. S.) **verbunden** ABCDE : △ ADE = Pyr. ABCDEL : Pyr. ADEL. Aus gleichen Gründen ist auch FGHIK : △ FIK = Pyr. FGHIKM : Pyr. FIKM, folglich auch **umgekehrt** △ FIK : FGHIK = Pyr. FIKM : Pyr. FGHIKM.

Da △ ADE : △ FIK = Pyr. ADEL : Pyr. FIKM, und nach Obigem ABCDE : △ ADE = Pyr. ABCDEL : Pyr. ADEL; so ist **aus dem Gleichen** ABCDE : △ FIK = Pyr. ABCDEL : Pyr. FIKM; aber auch nach Obigem △ FIK : FGHIK = Pyr. FIKM : Pyr. FGHIKM; folglich **aus dem Gleichen** ABCDE : FGHIK = Pyr. ABCDEL : Pyr. FGHIKM.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

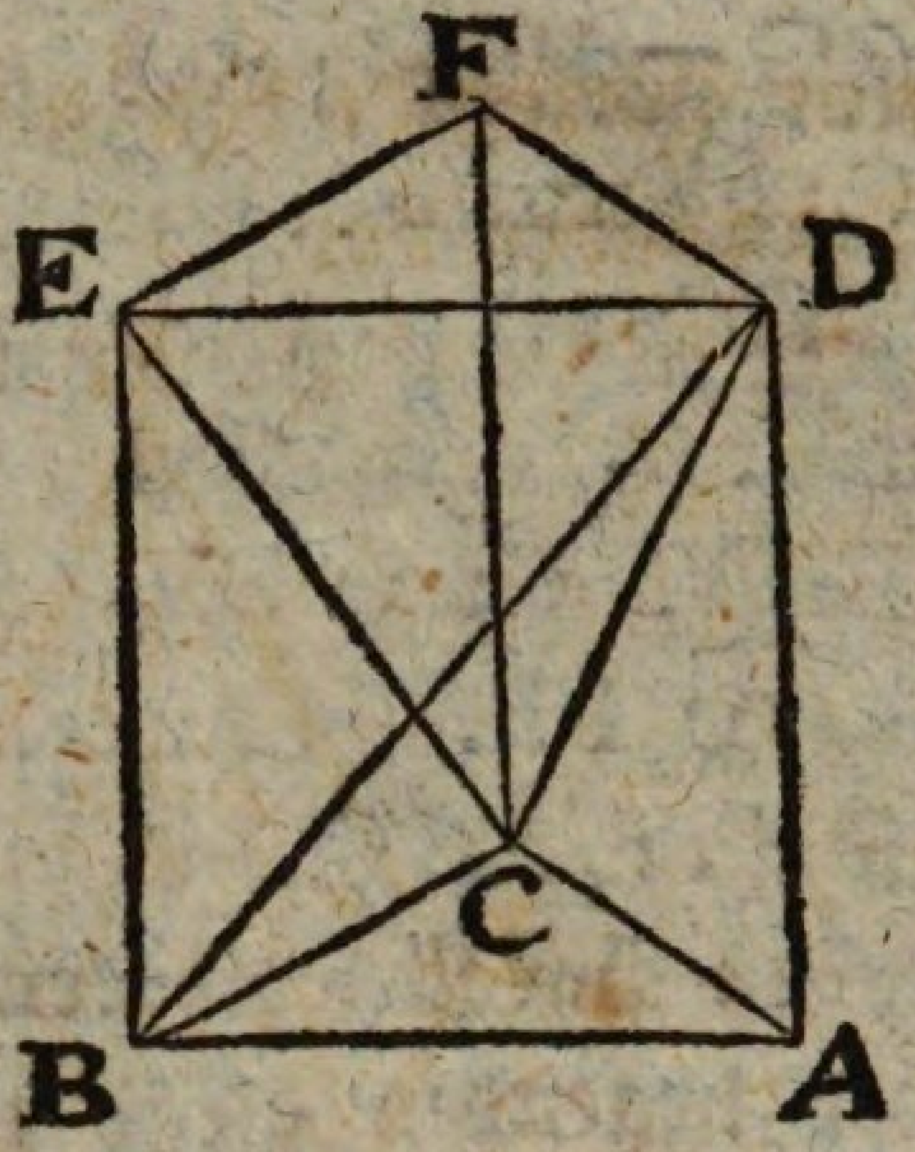
Jedes dreyseitige Prisma, ABCDEF, läßt sich in drey gleiche dreyseitige Pyramiden zerlegen.

Ziehe BD, EC, CD.

Da (11, 13. E.) ABED ein Parallelogramm, so ist (1, 34. S.) △ ABD = △ EDB; folglich (12, 5. S.) Pyr.

ABDC

ABDC = Pyr. EDBC; denn beyder Spitze ist C. Nun ist Pyr. EDBC mit Pyr. EBCD dieselbe. Folglich ist Pyr. ABDC = Pyr. EBCD.



Da ferner FCBE ein Parallelogramm, so ist (1, 34. S.) △ EBC = △ ECF, folglich (12, 5. S.) Pyr. EBDC = Pyr. ECFD; denn beyder Spitze ist D. Nun war Pyr. EBCD = Pyr. ABDC. Folglich ist Pyr. ECFD = Pyr. ABCD.

Demnach ist das Prisma ABCDEF in drey gleiche dreyseitige Pyramiden ABDC, BECD, ECFD, getheilt worden.

Zusatz.

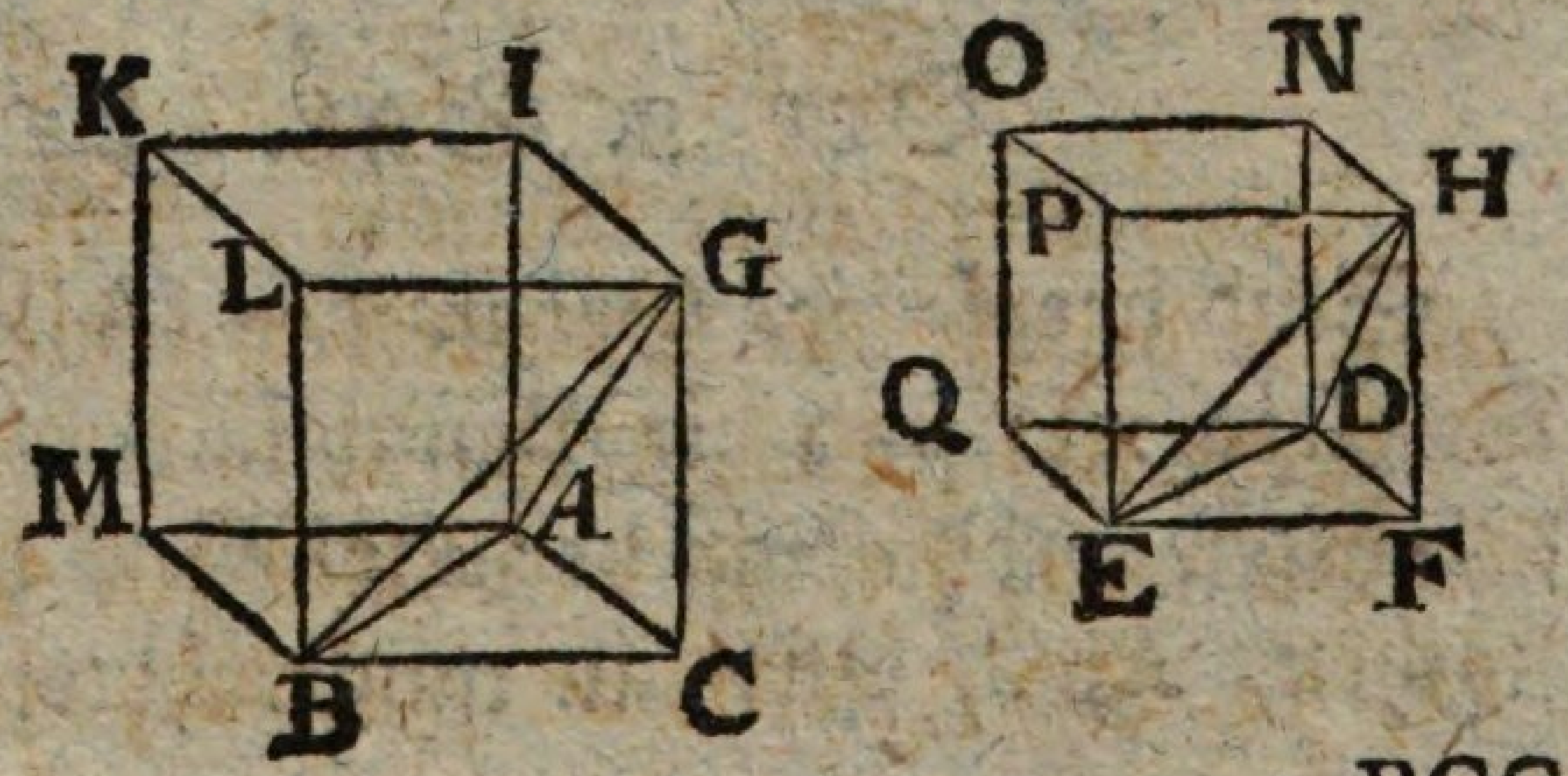
Hieraus erhellet, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma sey, das gleiche Höhe und einerley Grundfläche mit ihr hat.

Denn da Pyramide ABDC mit Pyr. CABD dieselbe ist; aber Pyr. ABDC = $\frac{1}{3}$ Prism. ABCDFE: so ist auch Pyr. CABD = $\frac{1}{3}$ Prism. ABCDFE.

Wäre nun auch das Prisma vielseitig, so läßt es sich doch in lauter dreyseitige zerlegen.

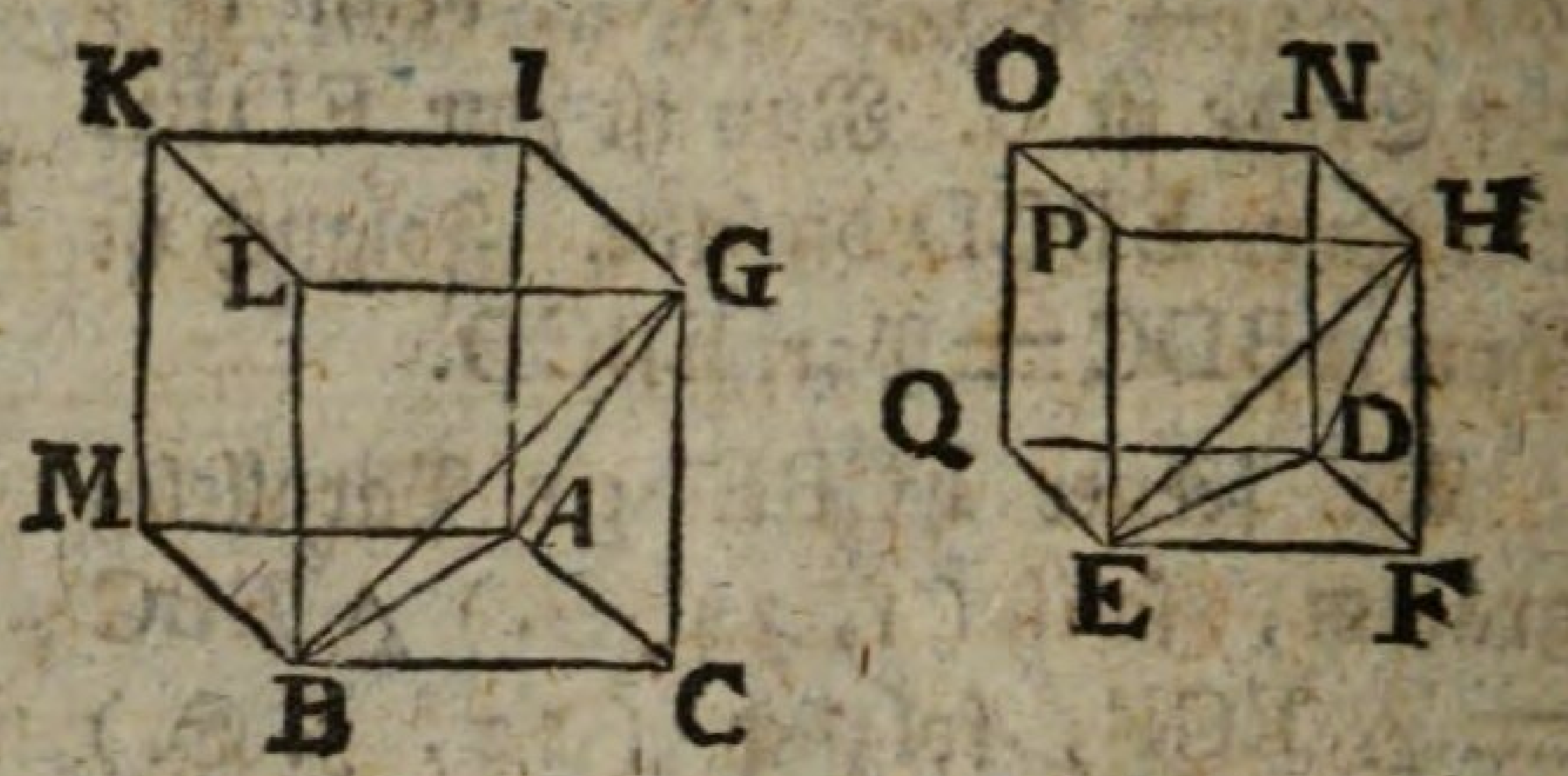
Der 8. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche dreyseitige Pyramiden, ABCG, DEFH, sind in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten, BC, EF.



Vollende die Parallelepipeda BI, EN. Da Pyram. ABCG ∾ Pyram. DEFH: so ist (11, 9. E.) BCA = EFD, ACG = DFH,

BCG = EFH; auch BC : EF = AC : DF = GC : HF. Folglich ist (6, 1. E.) CM ∾ FQ, CI ∾ FN, CL ∾ FP. Nun sind (11, 24. S.) in



beyden Parallelepipeden die den drey genannten Ebenen gegenüber liegenden gleich und ähnlich. Folglich ist (11, 9. E.) BI ∾ EN, folglich (11, 33. S.) BI : EN = 3 (BC : EF). Nun ist ein Prisma die Hälfte des Parallelepipedons, die Pyramide aber der dritte Theil des Prisma, also die Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons, und daher ist (5, 15. S.) BI : EN = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH. Folglich ist auch Pyr. ABCG : Pyr. DEFH = 3 (BC : EF).

Zusatz.

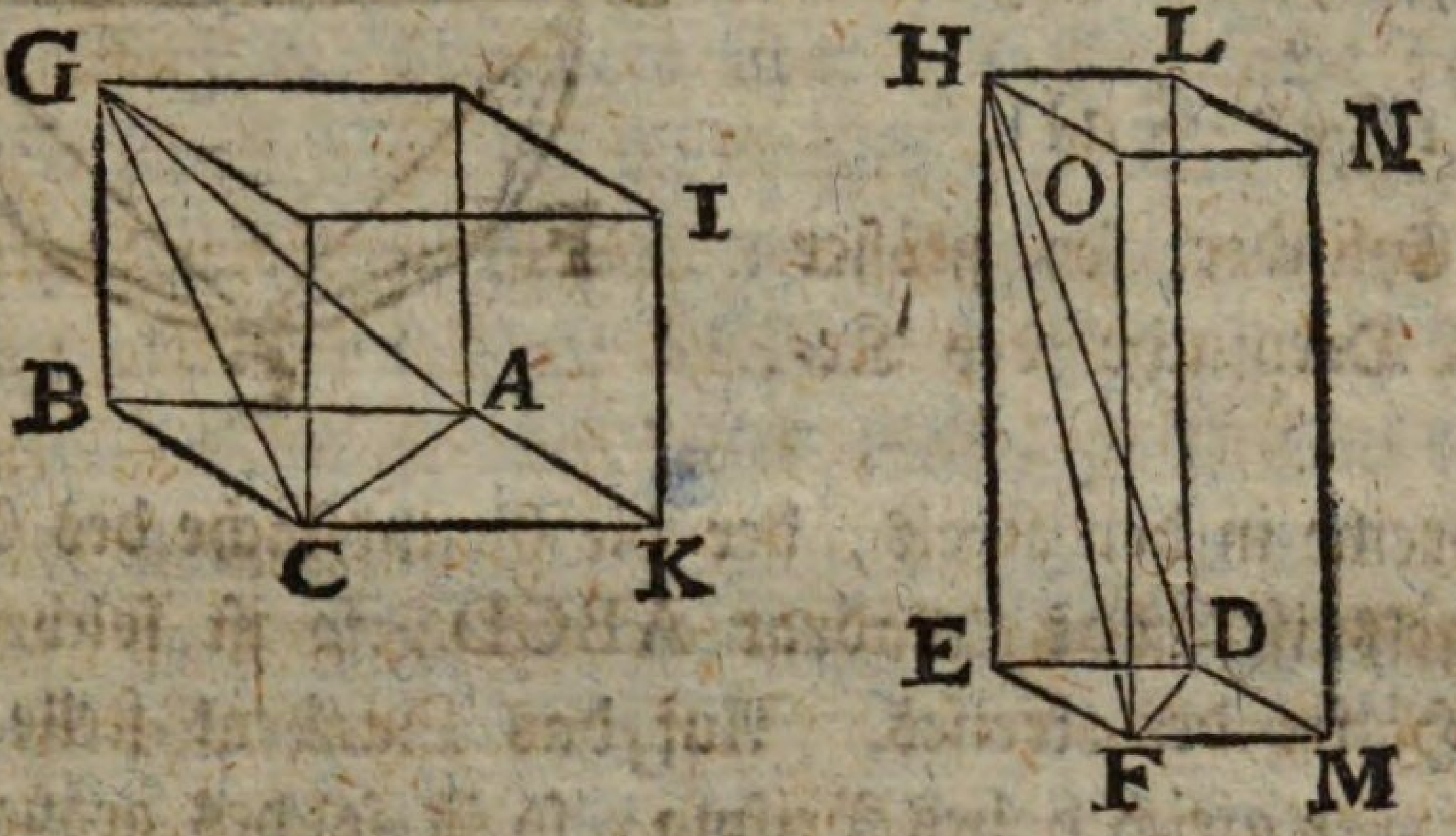
Hieraus erhellet, daß auch ähnliche vielseitige Pyramiden in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten sind. Denn zelegt man (6, 20. S.) die ähnlichen vielseitigen Grundflächen in gleich viele ähnliche Triangel, also die vielseitigen Pyramiden in dreyseitige: so verhält sich eine dreyseitige der einen vielseitigen Pyramide zu einer dreyseitigen der andern, wie alle dreyseitige der einen zu allen dreyseitigen der andern, das ist, wie die eine vielseitige Pyramide zu der andern. Da aber die dreyseitigen Pyramiden in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten sind: so sind es auch die vielseitigen.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Sind dreyseitige Pyramiden, ABCG, DEFH, einander gleich: so sind die Grundflächen, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß der Höhen. Und sind die Grundflächen, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß der Höhen:

hen: so sind die Pyramiden, ABCG, DEFH, einander gleich.

Vollende die Parallelepipeda, BI, EN, die mit den Pyramiden gleiche Höhe haben.



Erster Theil.

Es sey Pyr. ABCG = Pyr. DEFH; so ist, weil BI = 6 Pyr. ABCG, und EN = 6 Pyr. DEFH, auch BI = EN, folglich (11, 34. S.) BK : EM = Höhe von EN: Höhe von BI = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG. Nun ist BK : EM = △ ABC : DEF. Folglich ist auch △ ABC : △ DEF = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG.

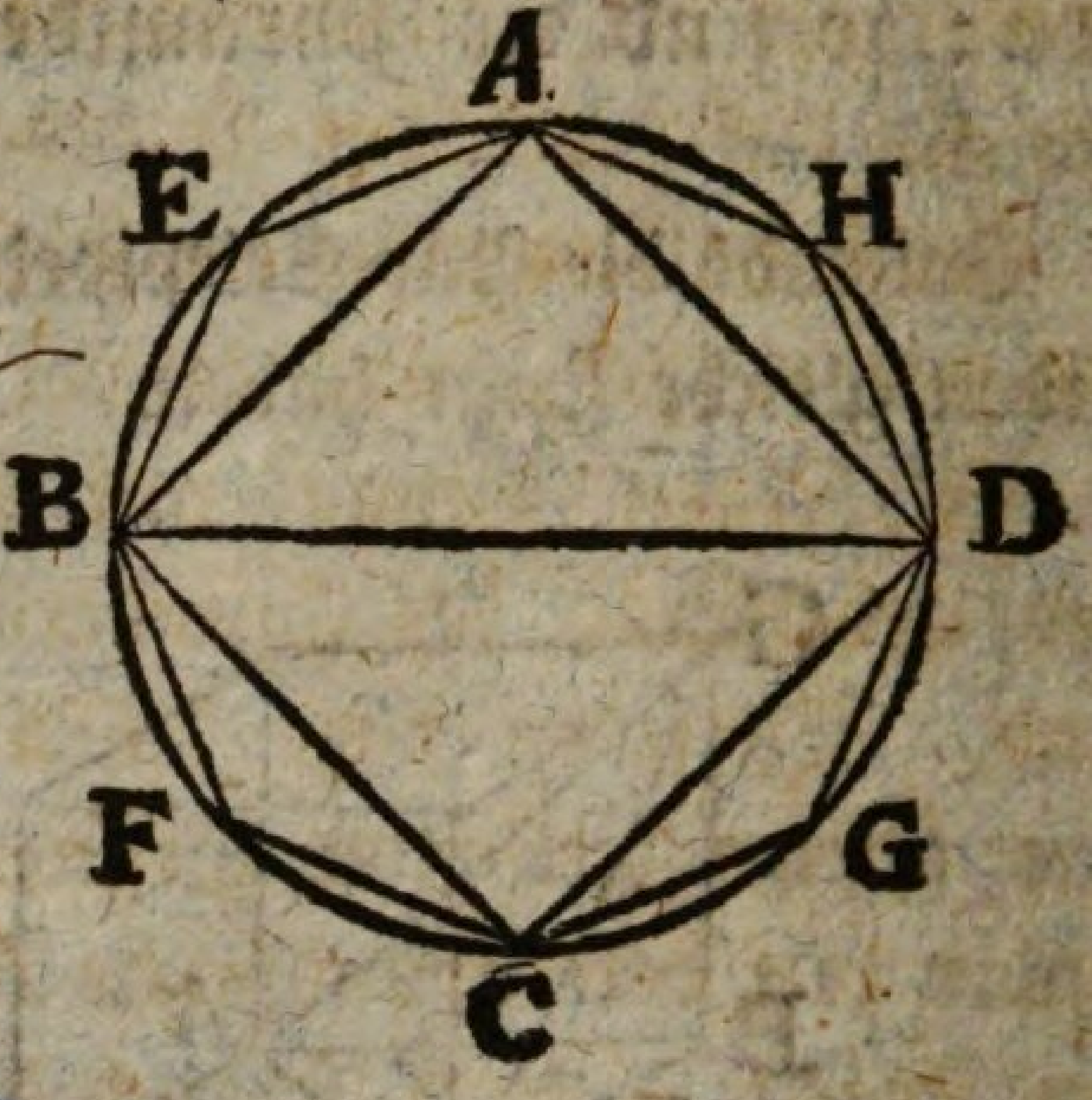
Zweyter Theil.

Es sey △ ABC : △ DEF = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG: so ist, weil △ ABC : △ DEF = BK : EM auch BK : EM = Höhe von EN: Höhe von BI; folglich (11, 34. S.) BI = EN. Nun ist BI = 6 Pyr. ABCG, und EN = 6 Pyr. DEFH. Folglich ist Pyr. ABCG = Pyr. DEFH.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Höhe und einerley Grundfläche, ABCD, hat.

Wäre der Cylinder nicht das Dreyfache des Kegels, so wäre der Cylinder entweder größer oder kleiner, als das Dreyfache des Kegels.



Erster Fall.

Der Cylinder sey größer als das Dreyfache des Kegels.

Beschreibe in den Kreis, der die Grundfläche des Cylinders und Kegels ist, das Quadrat ABCD, so ist solches größer als die Hälfte des Kreises. Auf das Quadrat stelle ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma, so ist solches größer als die Hälfte des Cylinders.

Denn wird auch um den Kreis ein Quadrat beschrieben: so ist das innere die Hälfte des äußern. Nun verhalten sich die auf diese Quadrate gestellten, mit dem Cylinder gleich hohen, Prismen wie ihre Grundflächen. Folglich ist das Prisma auf dem innern Quadrate die Hälfte des Prisma auf dem äußern. Da nun der Cylinder kleiner ist, als das Prisma auf dem äußern: so ist das Prisma auf dem innern, ABCD, größer als die Hälfte des Cylinders.

Halbire die Kreisbogen, AB, BC, CD, DA, in E, F, G, H, und verbinde die Halbirungspunkte: so ist jeder der dadurch entstandenen Triangel, wie AEB, größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Stellt man daher auf jeden dieser Triangel ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma: so ist jedes größer als die Hälfte des zugehörigen Cylinderabschnitts.

Denn wenn durch die Punkte, E &c. mit AB &c. Parallellinien gezogen, die Parallelogramme vollendet, und auf dieselben Parallelepipeda von gleicher Höhe mit dem Cylinder gestellt werden: so ist jedes Prisma auf den Triangeln AEB &c. die Hälfte eines solchen Parallelepipedons, welches

größer

größer als der Cylinderabschnitt ist; folglich das Prisma größer als die Hälfte des Cylinderabschnitts.

Nun halbire man die Kreisbogen AE ꝛc. und verfahre völlig wie vorher, und immer so fort: so kommt man (10, 1. S.) irgend einmal auf Cylinderabschnitte, die kleiner als der Ueberschuß des Cylinders über das Dreyfache des Kegels sind. Es seyen diese die Abschnitte auf AE, EB ꝛc.: so ist das übrige vielseitige Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder auf der Grundfläche AEB ꝛc. größer als das Dreyfache des Kegels. Nun ist auch dieses vielseitige Prisma das Dreyfache einer Pyramide, die einerley Grundfläche und Spitze mit dem Kegel hat. Folglich ist diese Pyramide größer als der Kegel auf dem Kreise ABCD. Da aber diese Pyramide in dem Kegel enthalten ist: so ist sie kleiner als der Kegel. Dieß widerspricht einander. Folglich ist ist der Cylinder nicht größer als das Dreyfache des Kegels.

Zweyter Fall.

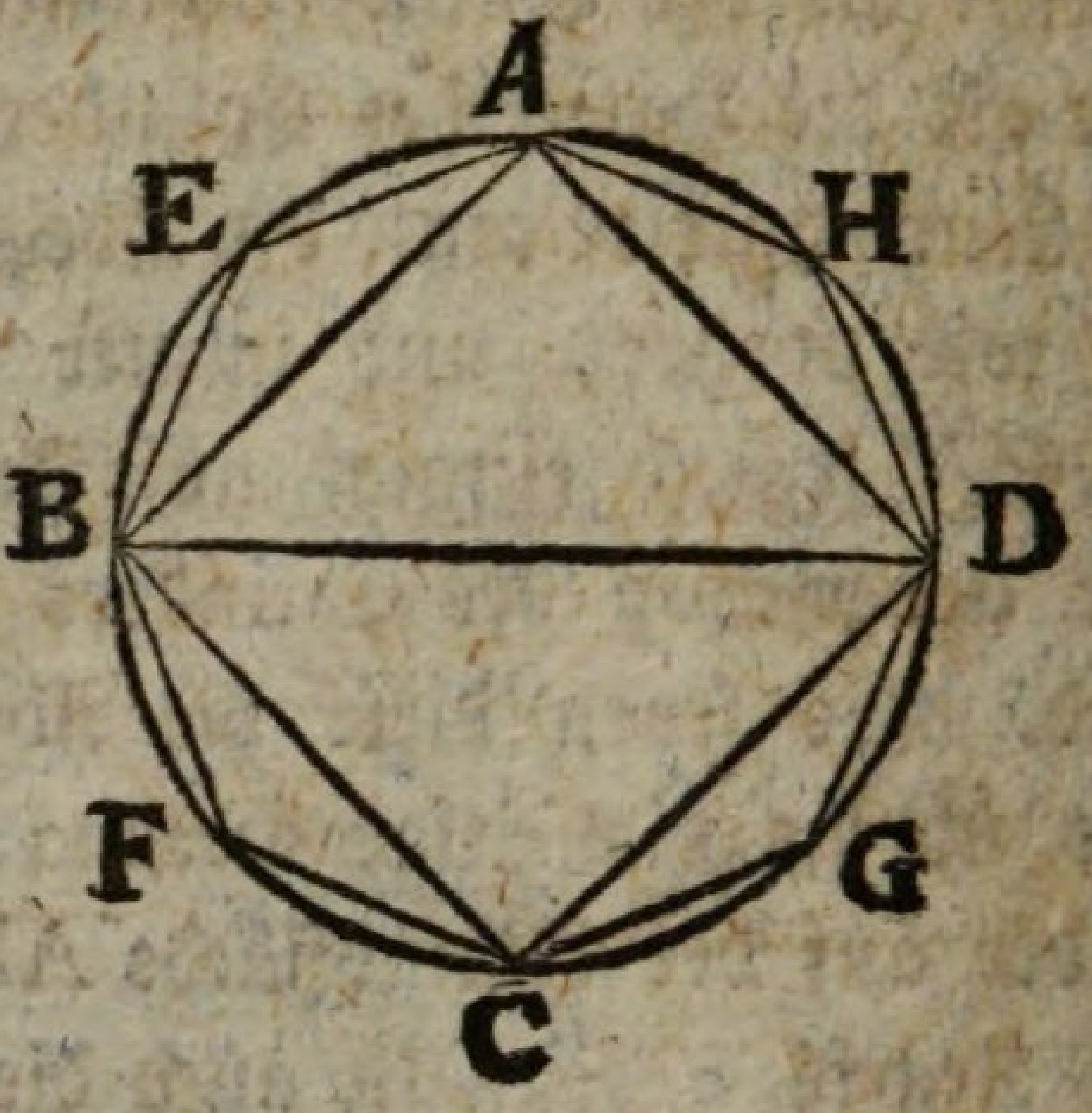
Der Cylinder sey kleiner als das Dreyfache des Kegels, folglich auch umgekehrt, der Kegel größer als der dritte Theil des Cylinders.

Hier sey wieder in den Kreis ein Quadrat ABCD beschrieben: so ist dieses größer als des Kreises Hälfte. Auf das Quadrat sey eine Pyramide von einerley Höhe mit dem Kegel gestellt: so ist diese größer als des Kegels Hälfte.

Denn wird, wie im ersten Falle, um den Kreis ein Quadrat beschrieben: so ist das innere die Hälfte des äußern. Werden nun auf beide Quadrate Prismen von gleicher Höhe mit dem Kegel gestellt, die sich also (11, 32. S.) wie ihre Grundflächen verhalten: so ist das innere Prisma die Hälfte des äußern, also auch das Drittel von jenem die Hälfte des Drittels von diesem, das ist, die Pyramide auf dem innern Quadrate die Hälfte der Pyramide auf dem äußern. Nun ist letztere, weil sie den Kegel enthält, größer als der Kegel. Folglich ist die Pyramide auf dem innern Quadrate ABCD,

die

die mit dem Kegel einerley Höhe hat, größer als die Hälfte des Kegels.



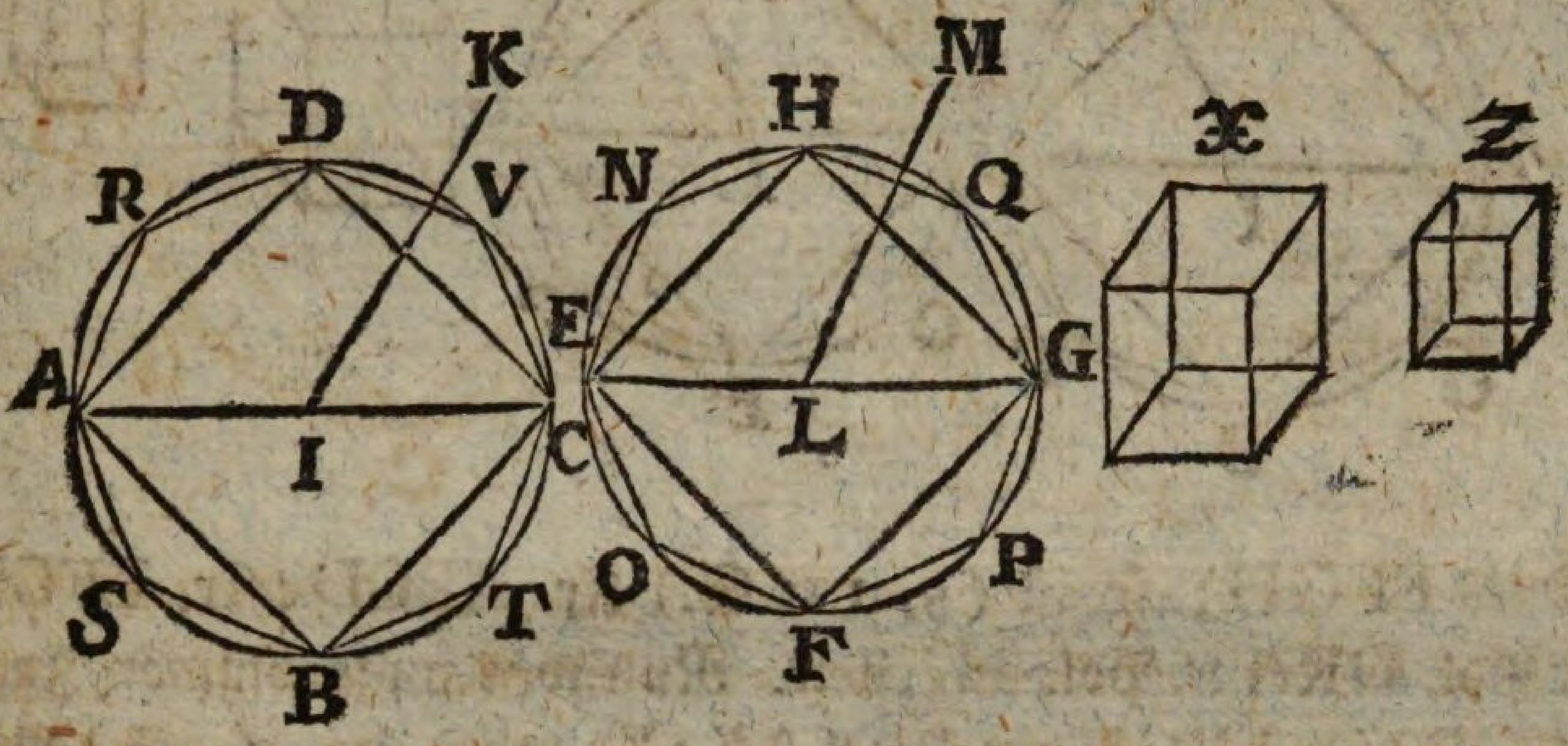
Nun halbire man wieder die Kreisbogen AB ꝛc., und ziehe AE ꝛc., daß also jeder Triangel, wie AEB, größer als der zugehörige Kreisabschnitt ist; stelle auf jeden dieser Triangel AEB ꝛc. Pyramiden von einerley Höhe mit dem Kegel: so ist jede derselben größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Fährt man nun mit Halbirung der Kreisbogen, und der übrigen Construction so fort: so kommt man zuletzt auf Kegelabschnitte, die kleiner sind, als der Ueberschuß des Kegels über den dritten Theil des Cylinders. Diese Abschnitte seyen die über AE, EB ꝛc.: so ist die übrige Pyramide auf der Grundfläche AEBF ꝛc. und in gleicher Höhe mit dem Kegel, größer als der dritte Theil des Cylinders. Nun ist diese Pyramide der dritte Theil des Prisma von einerley Höhe und Grundfläche mit dem Cylinder. Folglich ist das Prisma auf der Grundfläche AEBF ꝛc. größer als der Cylinder auf dem Kreise ABCD, mit dem es einerley Höhe hat. Nun ist es aber in dem Cylinder enthalten, also kleiner, welches einander widerspricht. Folglich ist der Cylinder nicht kleiner als das Dreyfache des Kegels; aber nach dem ersten Falle auch nicht größer; folglich ist der Kegel der dritte Theil dieses Cylinders.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Kegel, auch Cylinder AK, EM, von gleicher Höhe, IK, LM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCD, EFGH.

Wäre

Wäre dieses nicht: so wäre ABCD : EFGH = Kegel AK : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als der Kegel EM seyn müßte.



Erster Fall.

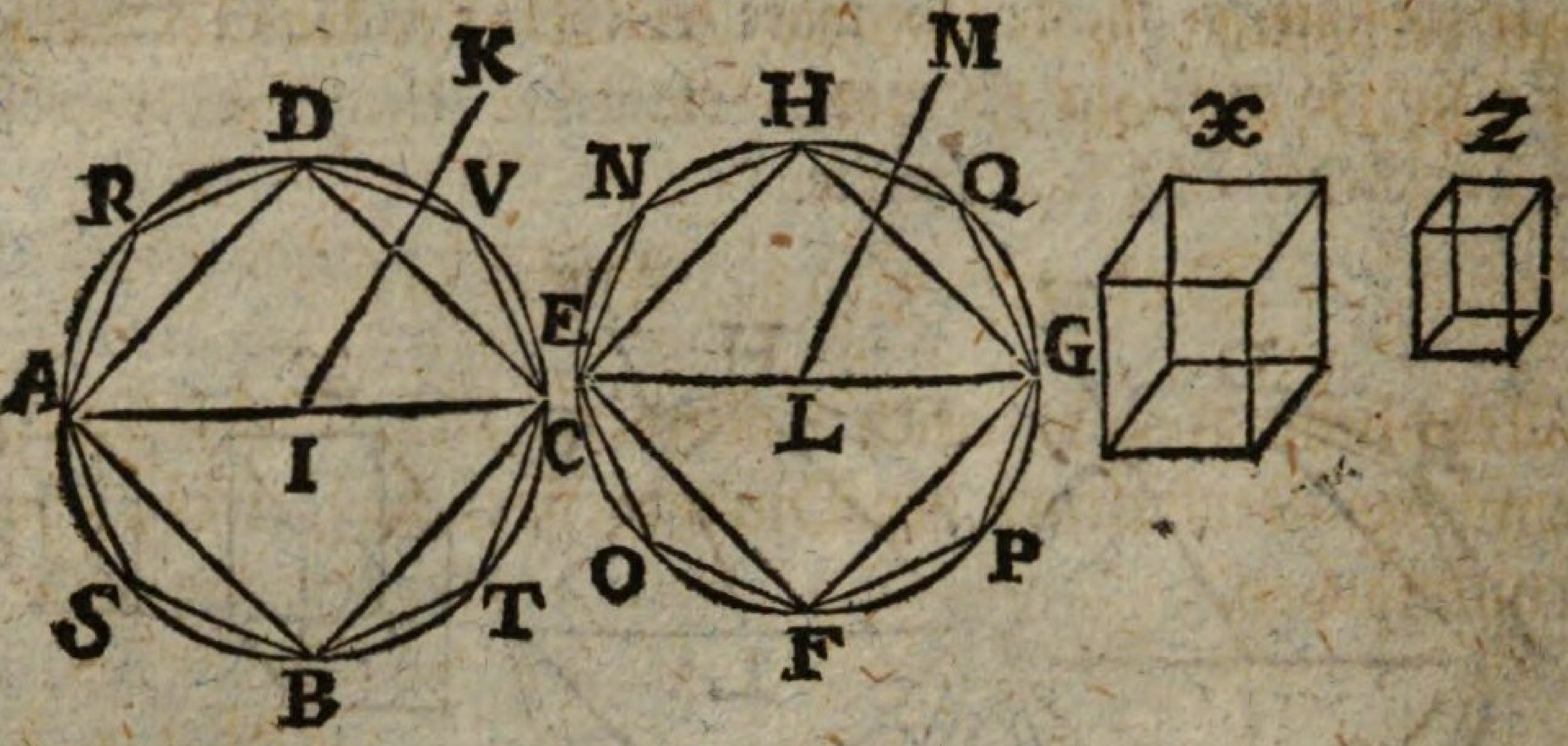
Es sey der Körper X < Kegel EM, so daß der Kegel EM = X + Z wäre.

Beschreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH: so ist solches größer als des Kreises Hälfte. Stelle auf dieses Quadrat eine Pyramide FM in gleicher Höhe mit dem Kegel EM: so ist solche größer als des Kegels Hälfte. Denn sie ist die Hälfte einer in gleicher Höhe auf das äußere Quadrat gestellten Pyramide, und der Kegel kleiner als diese letztere.

Halbirt man nun den Kreisbogen EF, FG ꝛc., construirt alles wie beym zweyten Falle des vorigen Satzes, und fährt damit immer fort: so kommt man einmal (10, 1. S.) auf Kegelabschnitte, die kleiner als Z sind. Es seyn solche nun die über HN ꝛc., so ist die übrige Pyramide FM auf der Grundfläche HNE ꝛc., und in gleicher Höhe mit dem Kegel EM größer als X.

Beschreibe in den Kreis ABCD ein dem Polygone HNE ꝛc. ähnliches und ähnlich liegendes DRA ꝛc., und stelle auf dasselbe eine Pyramide BK in gleicher Höhe mit dem Kegel AK.

Da (6, 20. S.) □ AC : □ EG = Polyg. DRA ꝛc. : Polyg. HNE ꝛc., und (12, 1. S.) □ AC : □ EG = Kreis ABCD : Kreis



: Kreis EFGH; so ist (5, 11. S.) Kr. ABCD : Kr. EFGH = Pol. DRA ꝛc. Pol. HNE ꝛc. Nun war angenommen Kreis ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X; aber (12, 6. S.) Pol. DRA ꝛc. : Pol. HNE ꝛc. = Pyr. BK : Pyr. FM. Folglich ist Kegel AK : X = Pyr. BK : Pyr. FM. Nun ist Kegel AK > Pyr. BK, weil diese in jenem enthalten ist. Folglich (5, 14. S.) ist auch X > Pyr. FM; welches dem Obigen, Pyr. FM > X, widerspricht. Folglich ist nicht Kreis ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, wenn X < Kegel EM.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch nicht Kreis EFGH : Kreis ABCD = Kegel EM : Y, wenn Y < Kegel AK.

Zweyter Fall.

Es sey X > Kegel EM, und Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, also auch umgekehrt Kr. EFGH Kr. ABCD = X : Kegel AK. Nun sey X : Kegel AK = Kegel EM : Y, wo also Y < Kegel AK; so ist Kreis EFGH : Kr. ABCD = Kegel EM : Y, welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, wenn X > Kegel EM, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn X < Kegel EM. Folglich ist Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : Kegel EM.

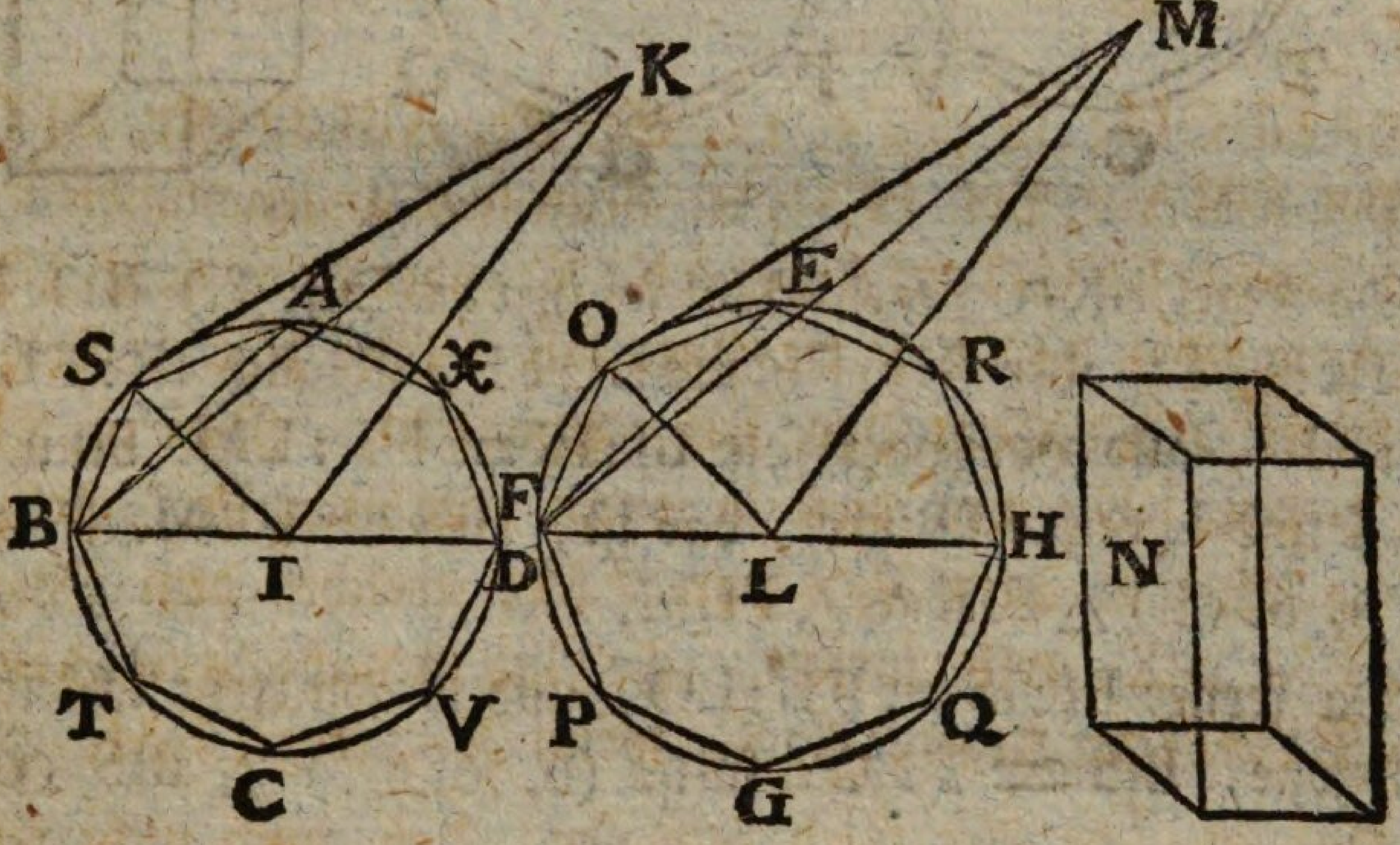
Da nun (12, 10. S.) Cylinder dreymal so groß als Kegel von derselben Höhe und Grundfläche sind, folglich sich wie die

Kegel

Kegel verhalten: so ist auch Kr. ABCD : Kr. EFGH = Cyl. auf ABCD : Cyl. auf EFGH.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Kegel, auch Cylinder, BK, FM, sind in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser, BD, FH, ihrer Grundflächen.



Wäre dieses nicht, so sey 3 (BD : FH) = Kegrl BK : N, wo der Körper N kleiner oder größer als Kegel FM ist.

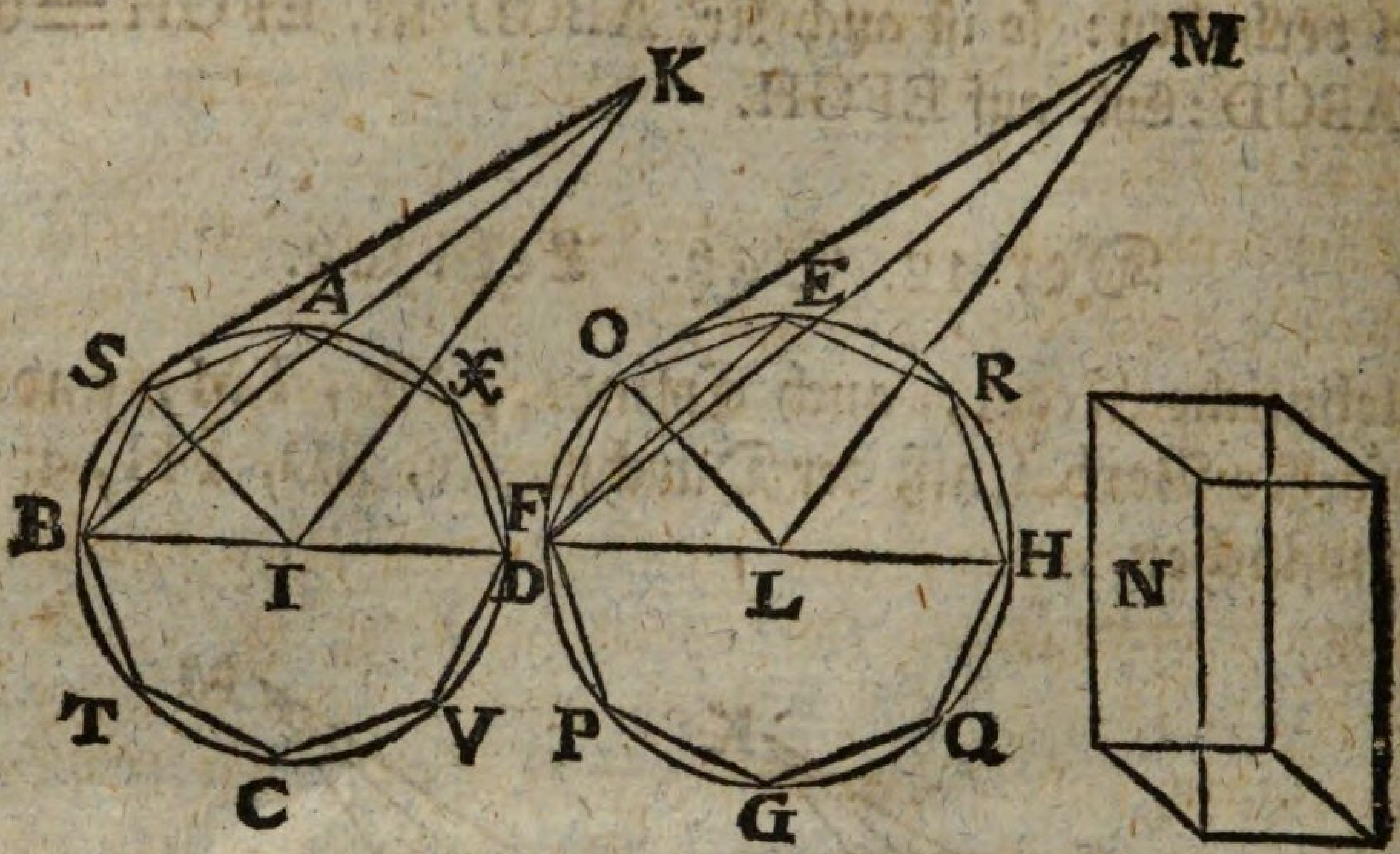
Erster Fall.

Es sey N < Kegel FM ist.

Wird hier alles wieder wie beym vorigen Satze zu Anfang des ersten Falles construirt: so erhält man auch hier zuletzt eine Pyramide GM, deren Spitze M, und Grundfläche das Polygon EOF ꝛc., und welche größer als der Körper N ist.

Beschreibe nun in den Kreis ABCD ein dem Polygon EOF ꝛc. ähnliches ASB ꝛc., und stelle auf dasselbe eine Pyramide CK, deren Spitze K ist. Eine Seite der Pyramide CK sey der △ KSB, und eine Seite der Pyramide GM der △ MOF. Ziehe IS, LO.

Da



Da Kegel BK ∾ Kegel FM: so ist (11, 24. S.) BD : FH = IK : LM; aber BD : FH = BI : FL, folglich BI : FL = IK : LM, also **verwechselt** BI : IK = FL : LM. Nun sind bey I und L rechte Winkel, das ist, BIK = FLM. Folglich ist (6, 6. S.) △ BIK ∾ △ FLM.

Da ferner BI : IS = FL : LO, und wegen Aehnlichkeit der Polygone, BIS = FLO: so ist (6, 6. S.) △ BIS ∾ △ FLO.

Da im Vorigen BI : IK = FL : LM, aber BI = IS, und FL = LO: so ist IS : IK = LO : LM. Nun ist SIK = OLM = R. Folglich ist (6, 6. S.) △ KSI ∾ △ MOL.

Da △ BIK ∾ △ FLM, folglich KB : BI = MF : FL; und △ BIS ∾ △ FLO, folglich BI : BS = FL : FO; so ist auch **aus dem Gleichen** KB : BS = MF : FO, also **umgekehrt** SB : KB = OF : MF.

Da △ KSI ∾ △ MOL, folglich KS : SI = MO : OL, und △ BIS ∾ △ FLO, folglich SI : SB = OL : OF; so ist **aus dem Gleichen** KS : SB = MO : OF. Nun war zuvor SB : KB = OF : MF. Folglich ist **aus dem Gleichen** KS : KB = MO : MF.

Demnach sind die Seiten der Triangel KSB, MOF, proportionirt. Folglich ist (6, 5. S.) auch △ KSB ∾ △ MOF;

folg-

folglich (11, 9. S.) Pyr. BISK $\sim$ Pyr. FLOM; folglich (12, 8. S.) Pyr. BISK : Pyr. FLOM = 3 (BI : LF) = 3 (BD : FH).

Werde nun von allen übrigen Punkten der Umkreise ABCD, EFGH, nach den Mittelpunkten, I, L, gerade Linien gezogen, und auf die dadurch entstandenen Triangel Pyramiden, deren Spitzen K, M, sind, gestellet: so läßt sich aus vorigen Gründen zeigen, daß die Verhältniß jedes zusammengehörigen Paares solcher Pyramiden das Dreyfache der Verhältniß BD : FH sey, daß folglich die Verhältnisse aller dieser Paare gleich sind. Folglich ist (5, 12. S.) Pyr. BISK : Pyr. FLOM = alle Pyr. auf ABCD : allen Pyr. auf EFGH, das ist = ganze Pyr. CK : ganzen Pyr. GM. Folglich ist 3 (BD : FH) = Pyr. CK : Pyr. GM. Nun war angenommen 3 (BD : FH) = Kegel BK : N. Folglich ist Kegel BK : N = Pyr. CK : Pyr. GM. Nun ist, weil der Kegel die Pyr. umschließt, Kegel BK > Pyr. CK. Folglich (5, 14. S.) ist auch N > Pyr. GM; welches dem Obigen, Pyr. GM > N, widerspricht. Demnach ist nicht 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, wenn N < Kegel FM ist.

Auf ähnliche Art zeigt man, daß auch nicht 3 (FH : BD) = Kegel FM : Z, wenn Z < Kegel BK ist.

Zweyter Fall.

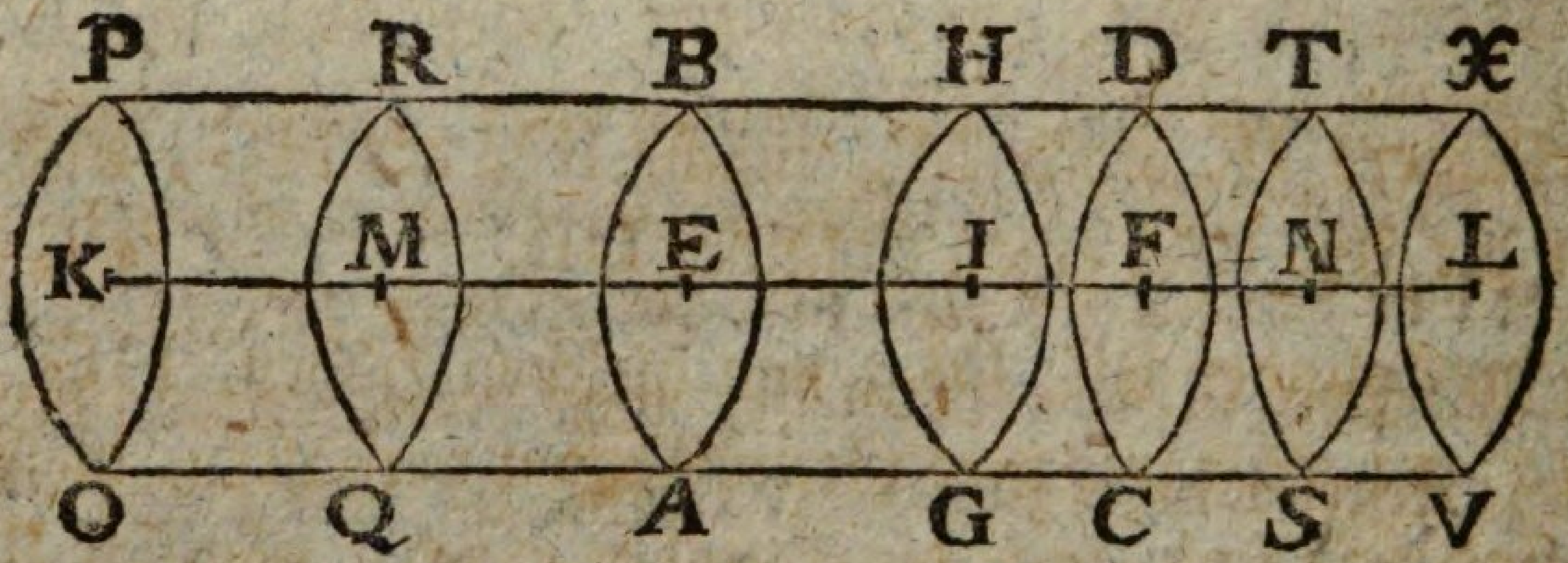
Es sey N > Kegel FM, und 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, folglich auch N : Kegel BK = 3 (FH : BD). Nun sey N : Kegel BK = Kegel FM : Z, wo also (5, 14. S.) Kegel BK < Z ist. Folglich ist 3 (FH : BD) = Kegel FM : Z, welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, wenn N > Kegel FM ist; und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn N < Kegel FM ist. Folglich ist 3 (BD : FH) = Kegel BK : Kegel FM.

Da nun (12, 10. S.) Cylinder dreymal so groß als Kegel von derselben Höhe und Grundfläche sind, folglich sich wie die

Kegel verhalten: so ist auch Cylinder BK: Cylinder FM = 3 (BD: FH)

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Cylinder, AD, von einer Ebene, HG, den einander gegenüber liegenden Grundflächen, AB, CD, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Cylinder, BG, GD, wie ihre Axen, EI, IF.



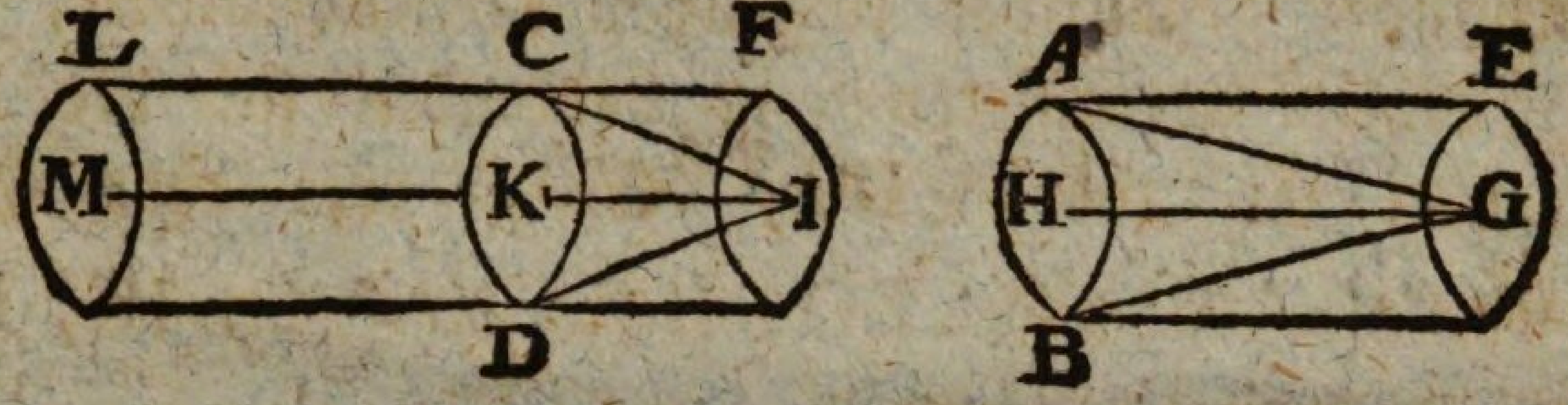
Verlängere des Cylinders, AD, Axe, EF, auf beyden Seiten nach K, L, trage auf EK eine beliebige Anzahl der EI gleiche Theile EM, MK, und auf FL eine beliebige Anzahl der IF gleiche Theile FN, NL; lege durch die Punkte M, K, N, L, Ebenen, den Grundflächen AB, CD, parallel und gleich, und vollende die Cylinder, PQ, QB, DS, SX.

Da die Cylinder, PQ, QB, BG, von gleichen Höhen, KM, ME, EI, sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen verhalten; diese aber gleich sind: so sind auch die Cylinder gleich, nämlich PQ = QB = BG. Folglich ist KI von EI eben so vielfach, wie Cyl. PG vom Cyl. BG. Aus denselben Gründen ist IL von IF eben so vielfach, wie Cyl. GX vom Cyl. GD. Nun ist, wenn KI ≷ IL, auch PG ≷ GX. Folglich ist (5, 5. E.) EI: IF = BG: GD.

Der

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Kegel, ABG, CDI, wie auch Cylinder, BE, DF, auf gleichen Grundflächen, AB, CD, verhalten sich wie ihre Höhen, HG, KI.



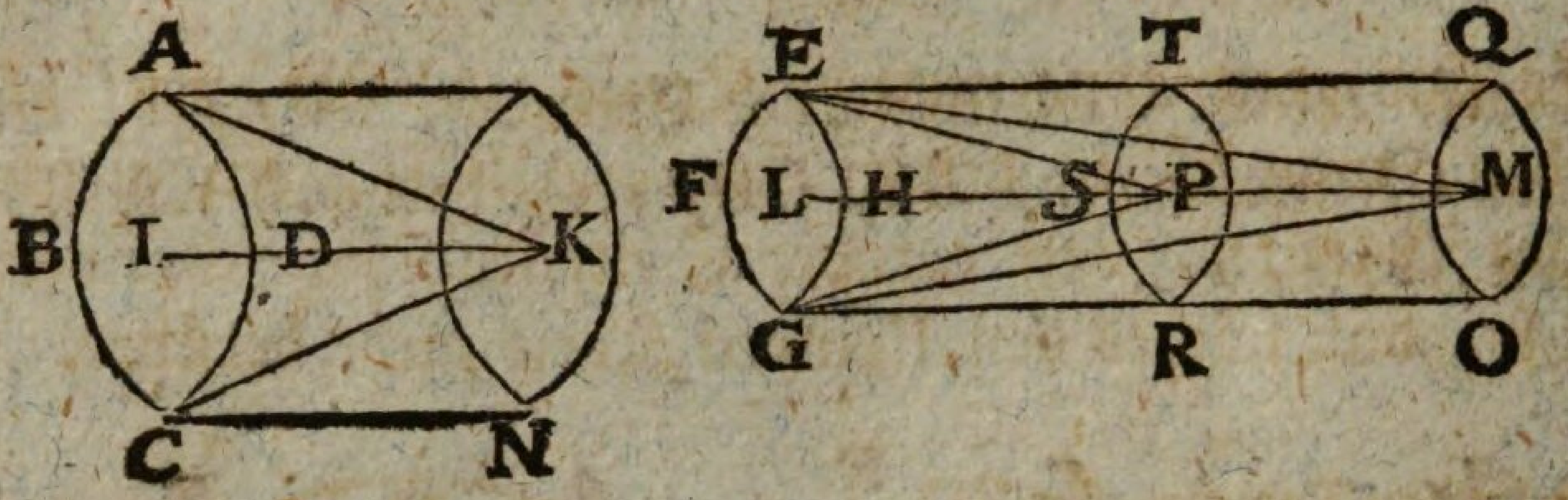
Verlängere IK nach M, mache KM = HG, und denke dir um die Axe KM einen Cylinder DL.

Da die Cylinder BE, DL, von gleichen Höhen, HG, KM, sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen verhalten, diese aber gleich sind: so sind auch die Cylinder gleich, nämlich BE = DL. Da der Cylinder FM von der Ebene CD den Grundflächen parallel geschnitten ist: so ist (12, 13. S.) DL : DF = MK : KI. Nun ist DL = BE, und MK = HG. Folglich ist BE : DF = HG : KI.

Da (12, 10. S.) die Cylinder BE, DF, sich wie die Kegel ABG, CDI, verhalten: so ist auch Kegel ABG : Kegel CDI = HG : KI.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Sind Kegel, ACK, EGM, oder Cylinder, AN, EO, einander gleich: so verhalten sich die Grundflächen, AC, EG, umgekehrt wie die Höhen, IK, LM. Und verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen: so sind die Kegel so wohl, als auch die Cylinder gleich.



Erster Theil.

Es sey Cyl. AN = Cyl. EO: so sind die Höhen IK, LM, entweder gleich oder ungleich.

Erstlich, wenn IK = LM, so ist (12, 11. S.) AN : EO = AC : EG; folglich, weil AN = EO, auch AC = EG, folglich AC : EG = LM : IK.

Zweytens, wenn LM > IK, so sey LP = IK. Lege durch P die Ebene TR den Grundflächen parallel, und denke dir auf der Grundfläche EG den Cylinder ER.

Da AN = EO, so ist (5, 7. S.) AN : ER = EO : ER. Nun ist (12, 11. S.) AN : ER = AC : EG, und (12, 13. S.) EO : ER = LM : LP. Folglich ist AC : EG = LM : LP = LM : IK.

Zweyter Theil.

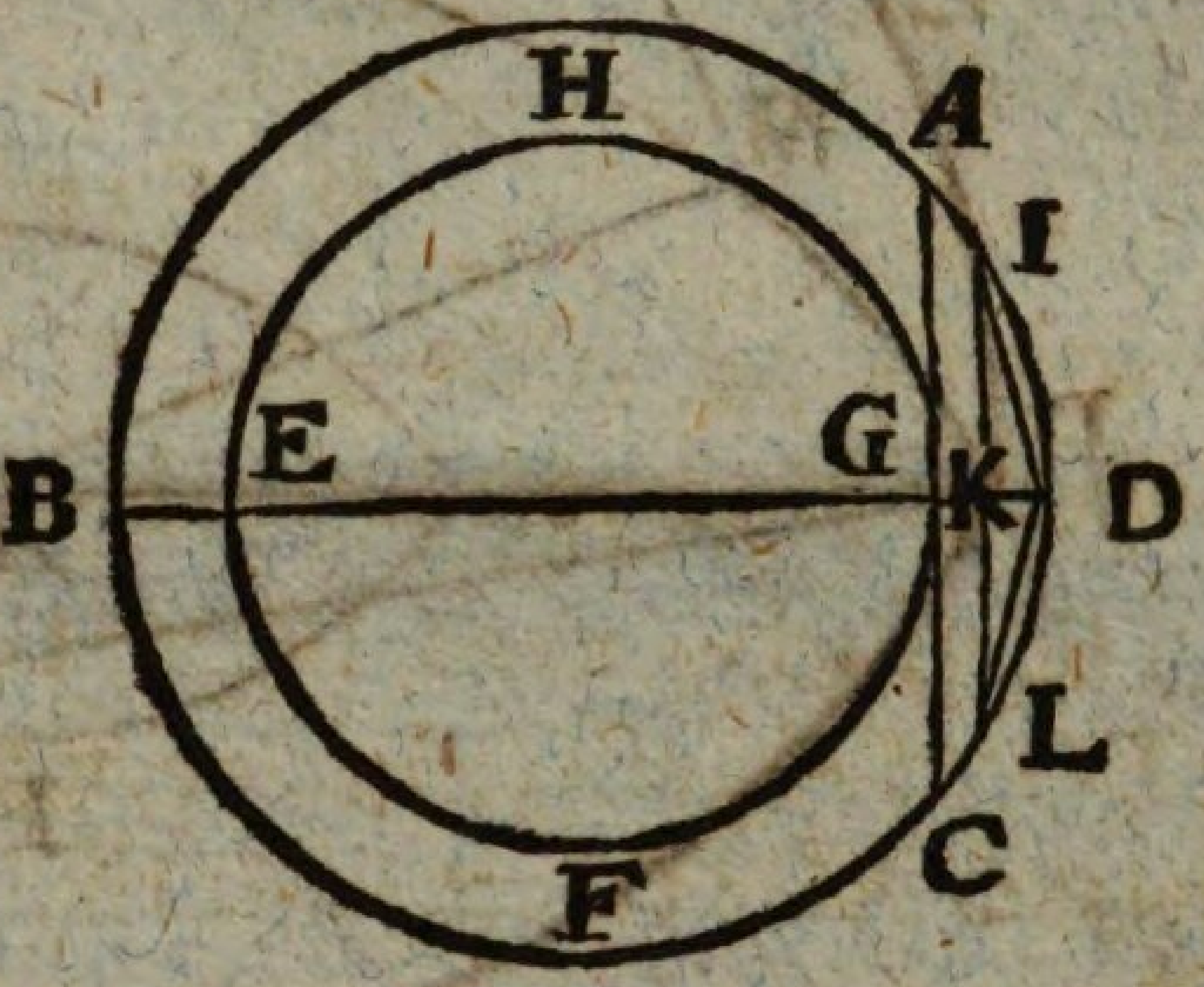
Es sey AC : EG = LM : IK, so ist nach der vorigen Construction AC : EG = LM : LP. Nun ist (12, 11. S.) AC : EG = AN : ER, und (12, 13. S.) LM : LP = EO : ER. Folglich ist AN : ER = EO : ER, folglich (5, 9. S.) AN = EO.

Dasselbe gilt auch (12, 10. S.) von den Kegeln ACK, EGM; daß nämlich auch hier AC : EG = LM : IK, wenn ACK = EGM, und daß ACK = EGM, wenn AC : EG = LM : IK ist.

Der

Der 16. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey concentrische Kreise, ABCD, EFGH, gegeben, man soll in den größern, ABCD, ein gleichseitiges Polygon, von gerader Seitenzahl, beschreiben, doch so, daß solches den kleinern Kreis nicht berühre.

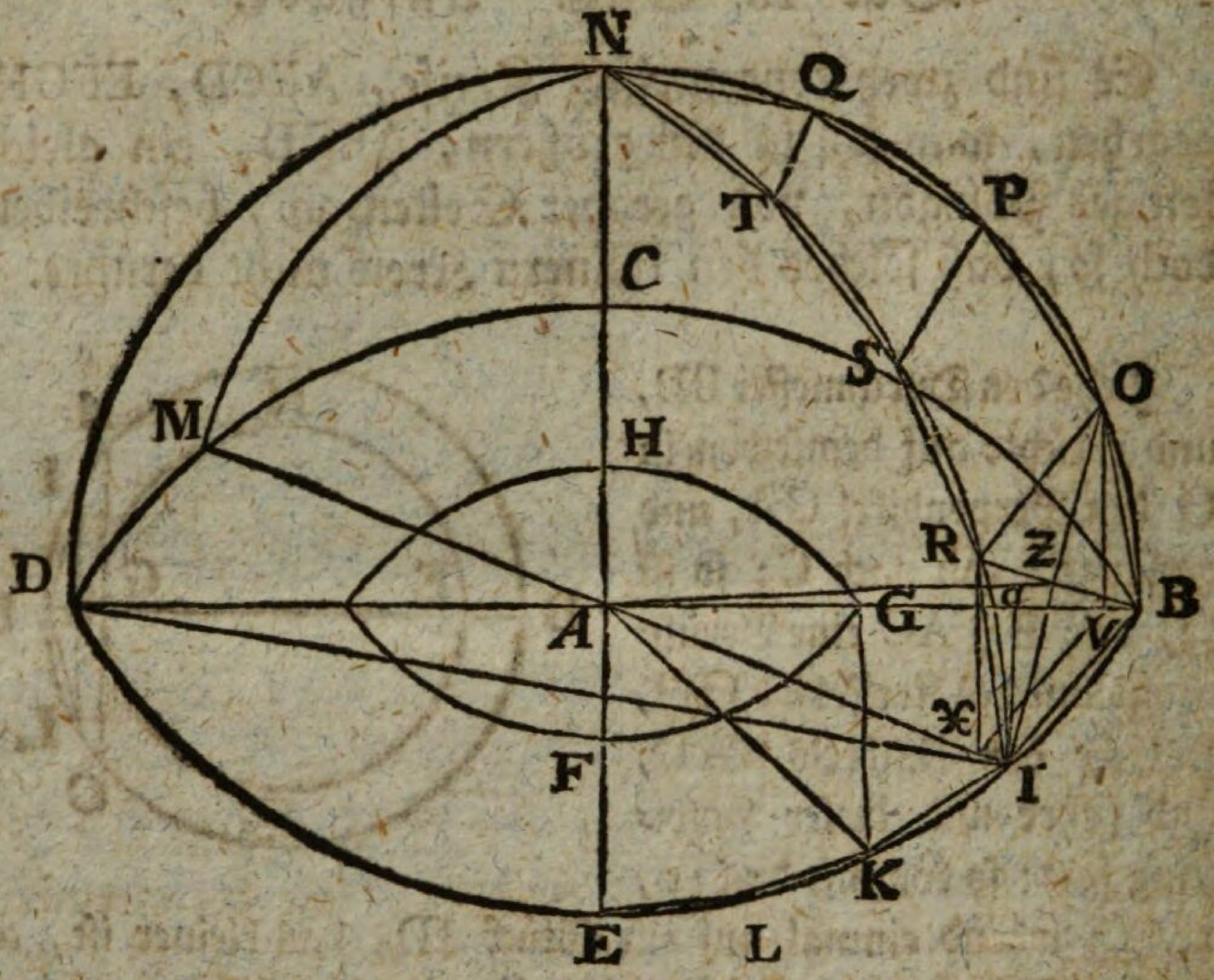


Ziehe den Durchmesser BD, und errichte auf demselben in G den Perpendikel GA, und verlängere ihn nach C; so ist (3, 16. S.) AC eine Berührungslinie des Kreises EFGH. Halbire den Umkreis BAD, und fahre mit dieser Halbirung fort: so kommst du (10, 1. S.) irgend einmal auf ein Stück ID, das kleiner ist, als AD. Fälle aus I auf BD den Perpendikel IK, verlängere ihn bis L, und ziehe ID, DL, da denn ID = DL ist.

Da IL der AC parallel ist, und letztere den Kreis berührt: so berührt ihn IL nicht, noch viel weniger berühren ihn ID, DL. Werden nun in den Kreis ABCD der ID gleiche gerade Linien an einander hängend eingetragen: so wird in den größern Kreis ein gleichseitiges Polygon von gerader Seitenzahl beschrieben, welches den kleinern Kreis nicht berührt.

Der 17. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey concentrische Kugeln gegeben; man soll in die größere ein Polyeder beschreiben, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berühre.



Construction.

Eine Ebene durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt A schneide die Kugeln: so bildet sie auf der Oberfläche jeder der beyden Kugeln einen Kreis. Denn da (11, 14. E.) die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen unverrückten Durchmesser entsteht, so wird, welche Lage der Halbkreis auch haben mag, die erweiterte Ebene desselben allemal auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden, und zwar einen größten, weil der Durchmesser der Kugel, welcher einerley mit dem des Halbkreises, also offenbar auch der des Kreises ist, (3, 15. S.) größer ist, als alle in dem Kreise oder in der Kugel gezogene gerade Linien. Es sey nun auf der größern Kugel Oberfläche der Kreis BCDE, und auf der kleinern Kugel Oberfläche der Kreis FGH auf diese Art entstanden. Ziehe dieses Schnittes Durchmesser BD, CE, perpendikular auf einander. In den größern der beyden concentrischen Kreise, BCDE, beschreibe (12, 16. S.) ein gleichseitiges Polygon von gerader Seitenzahl, welches den kleinern Kreis, FGH, nicht

nicht berühre. Dieses Polygons Seiten in dem Quadranten, BE, seyen BI, IK, KL, LE. Ziehe IA, und verlängere sie bis M. Errichte auf der Kreisebene BCDE in A den Perpendikel AN, der die Oberfläche der größern Kugel in N treffe. Durch AN, und jeden der beyden Durchmesser BD, IM, lege Ebenen: so werden diese, nach dem vorhin Gesagten, auf der Kugel Oberfläche auch größte Kreise bilden; deren Hälften seyen DNB, INM, welche, wie AN, (11, 18. S.) auf der Kreisebene BCDE perpendikular sind.

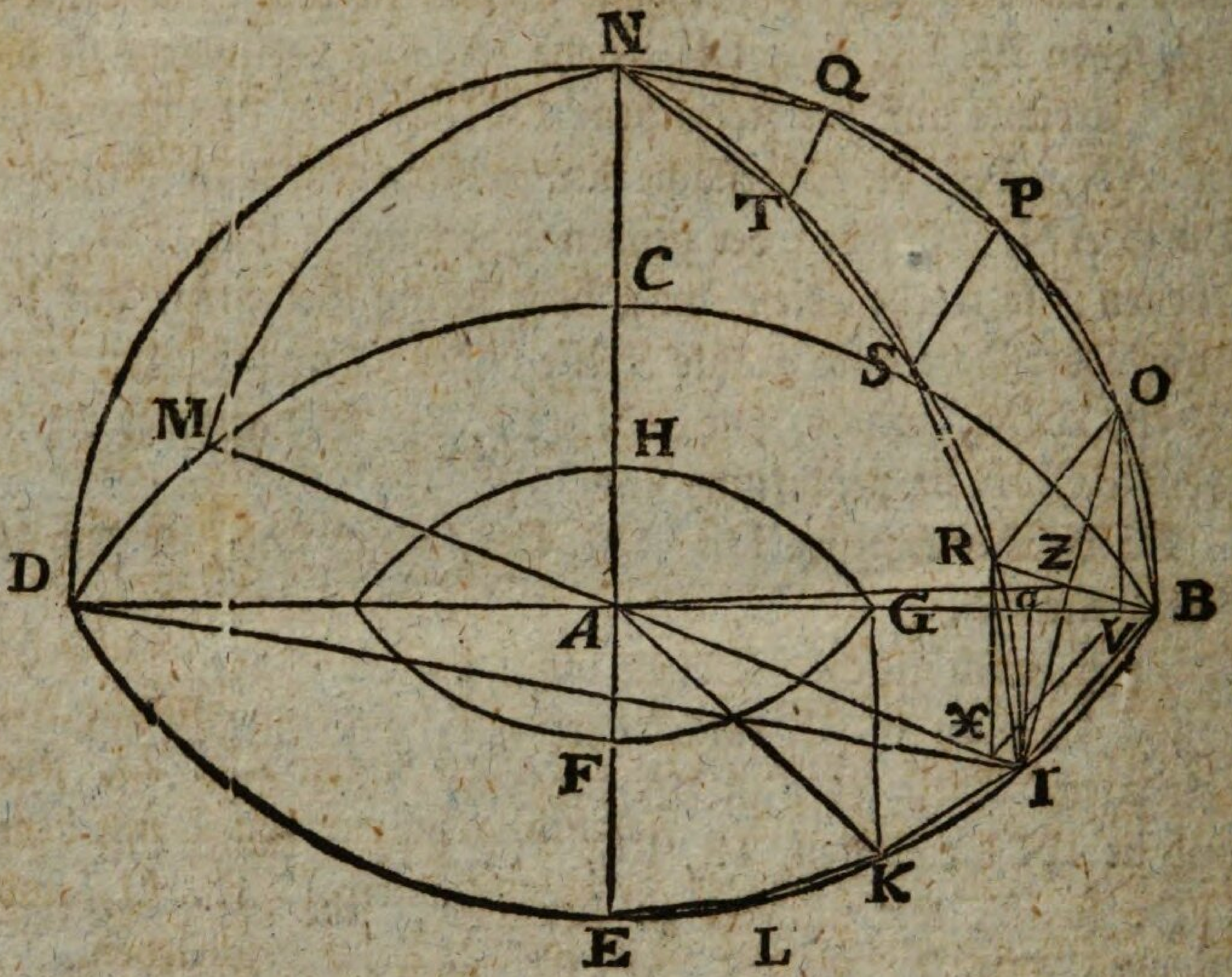
Da die Durchmesser DB, IM, CE, gleich sind, so sind die Halbkreise BND, INM, BED, folglich die Quadranten BN, IN, BE, auch gleich. Daher lassen sich die Seiten des Polygons, die man in BE eingetragen hat, auch in BN und IN eintragen. Diese seyen in BN die Seiten, BO, OP, QP, QN, und in IN die Seiten, IR, RS, ST, TN. Ziehe OR, PS, QT: so ist, wie nachher zu beweisen, jede der vierseitigen Figuren, IBOR, ROPS, SPQT, auch (11, 2. S.) der △ NQT in einer Ebene.

Denke dir von den Punkten, O, R, P, S, Q, T, nach der Kugel Mittelpunkte, A, gerade Linien gezogen: so entsteht zwischen den beyden Quadranten BN, IN, ein polyedrischer Körper aus Pyramiden zusammengesetzt, deren gemeinschaftliche Spitze A ist, und deren Grundflächen die Figuren IBOR, ROPS, SPQT, NQT, sind.

Construirt man nun im Quadranten BE, auf jeder der übrigen Seiten IK, KL, LE, eben so, wie auf BI, in den drey übrigen Quadranten BC, CD, DE, eben so, wie in BE, und in der andern Halbkugel wie in dieser: so entsteht in der größern Kugel ein aus Pyramiden von obgedachter Beschaffenheit zusammengesetztes Polyeder, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.

Beweis. Erster Theil.

Daß jede der vierseitigen Figuren IBOR, ROPS, SPQT, in Einer Ebene sey.



Fälle auf die Kreisebene BCDE, aus O, R, die Perpendikel OV, RX, welche (11,38. S.) die Durchschnittslinien BD, IM, treffen, auch (11, 6. S.) parallel sind, und ziehe VX.

Da von den gleichen Halbkreisen BND, INM, gleiche Bogen BO, IR, abgeschnitten sind: so ist (3, 21. S.) ABO = AIR. Nun sind bey V, X, rechte Winkel, auch ist OB = RI. Folglich ist (1, 26. S.) OV = RX, und BV = IX.

Da BA = IA, aber BV = IX; so ist auch AV = AX, folglich BV : VA = IX : XA, folglich (6, 2. S.) VX der IB parallel. Nun waren nach Obigem OV, RX, parallel und gleich. Folglich sind (1, 33. S.) VX, RO, parallel und gleich. Folglich ist (11, 9. S.) auch RO der IB parallel. Eben so wird bewiesen, daß SP der RO, und TQ der SP parallel sey.

Da RO der IB parallel ist: so ist (11, 7. S.) die vierseitige Figur IBOR in Einer Ebene. Aus gleichen Gründen aber ist auch jede der beyden übrigen vierseitigen Figuren ROPS, SPQT, in Einer Ebene.

Be-

Beweis. Zweyter Theil.

Daß die Oberfläche des beschriebenen Polyeders die Oberfläche der kleinern Kugel, auf welcher der größte Kreis FGH ist, nicht berühre.

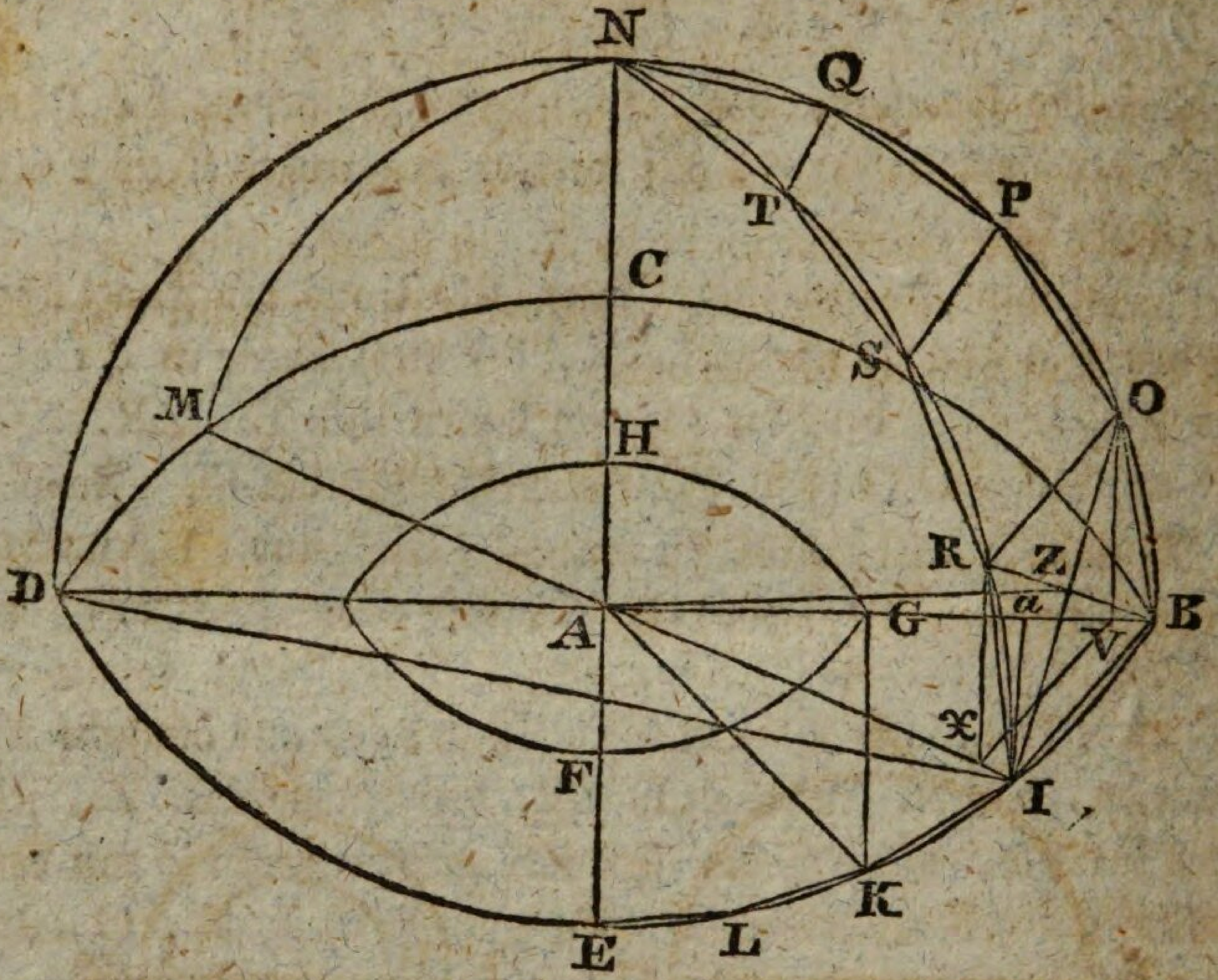
Fälle auf die vierseitige Ebene IBOR aus der Kugel Mittelpunkte A den Perpendikel AZ, der diese Ebene in Z treffe, und ziehe in der Ebene die geraden Linien BZ, ZI, ZR, ZO, auf welche daher (11, 3. S.) AZ perpendikular ist. Folglich ist (1, 47. S.) $\square AB = \square AZ + \square ZB$, und $\square AI = \square AZ + \square ZI$. Nun ist $AB = AI$, also auch $\square AB = \square AI$. Folglich ist $\square AZ + \square ZB = \square AZ + \square ZI$, folglich $\square ZB = \square ZI$, also $ZB = ZI$. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß die Linien ZO, ZR, den Linien ZB, ZI, jede jeder für sich, gleich sind. Folglich geht ein um Z mit dem Halbmesser ZB beschriebener Kreis auch durch I, R, O, und die vierseitige Figur IBOR ist in solchen Kreis beschrieben.

Da $IB > XV$, und $XV = RO$, folglich $IB > RO$, aber $IB = IR = BO$: so ist auch IR so wohl als $BO > RO$. Folglich ist in dem um IBOR beschriebenen Kreise von den Kreisbogen IB, BO, IR, jeder größer als der Kreisbogen OR; folglich IZB ein stumpfer Winkel; folglich (2, 12. S.) $\square IB > 2 \square BZ$.

Fälle aus dem Punkte I auf BD den Perpendikel Ia. Da $BD < 2\,Da$, und (6, 1. S.) $BD : Da = BD \times Ba : Da \times aB$; so ist $BD \times Ba < 2\,(Da \times aB)$. Nun ist, wenn man die ID ziehet, (6, 8. Zus.) $BD \times Ba = \square IB$, und $Da \times aB = \square Ia$. Folglich ist $\square IB < 2 \square Ia$, folglich, weil nach Obigem $\square IB > 2 \square BZ$, $\square Ia > \square BZ$.

Da ferner (1, 47. S.) $\square BA = \square BZ + \square ZA$, und $\square IA = \square Ia + \square Aa$; aber $BA = IA$, also $\square BA = \square IA$: so ist $\square BZ + \square ZA = \square Ia + \square Aa$. Nun war nach Obigem $\square Ia > \square BZ$. Folglich ist $\square AZ > \square Aa$, also $AZ > Aa$, folglich noch vielmehr $AZ > AG$. Nun ist AZ auf einer Seitenfläche des Polyeders, und AG auf der Oberfläche der kleinern Kugel, perpendikular. Folglich berührt die Oberfläche des Polyeders nicht die Oberfläche der kleinern Kugel.

An-



Anderer Beweis, daß AZ > AG.

Errichte auf AG in G den Perpendikel GK, und ziehe AK. Halbire den Bogen BE fortgesetzt: so bleibt einmal (10, 1. S.) ein Stück BI übrig, das kleiner ist, als ein Bogen, dessen Sehne GK wäre, folglich auch die gerade Linie BI < GK. Da nun nach dem oben Erwiesenen BZI ein stumpfer Winkel, folglich BI > BZ: so ist um so mehr GK > BZ, also auch □ GK > □ BZ.

Da □ AK = □ AG + □ GK, und □ AB = □ BZ + □ AZ, aber AK = AB, also □ AK = □ AB: so ist □ AG + □ GK = □ BZ + □ AZ. Nun war □ BZ < □ GK. Folglich ist □ AZ > □ AG, also AZ > AG.

Zusatz.

Wird in eine andere Kugel, B, ein, dem in die Kugel A beschriebenen ähnliches, Polyeder beschrieben, so sind beyde Polyeder in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser ihrer Kugeln.

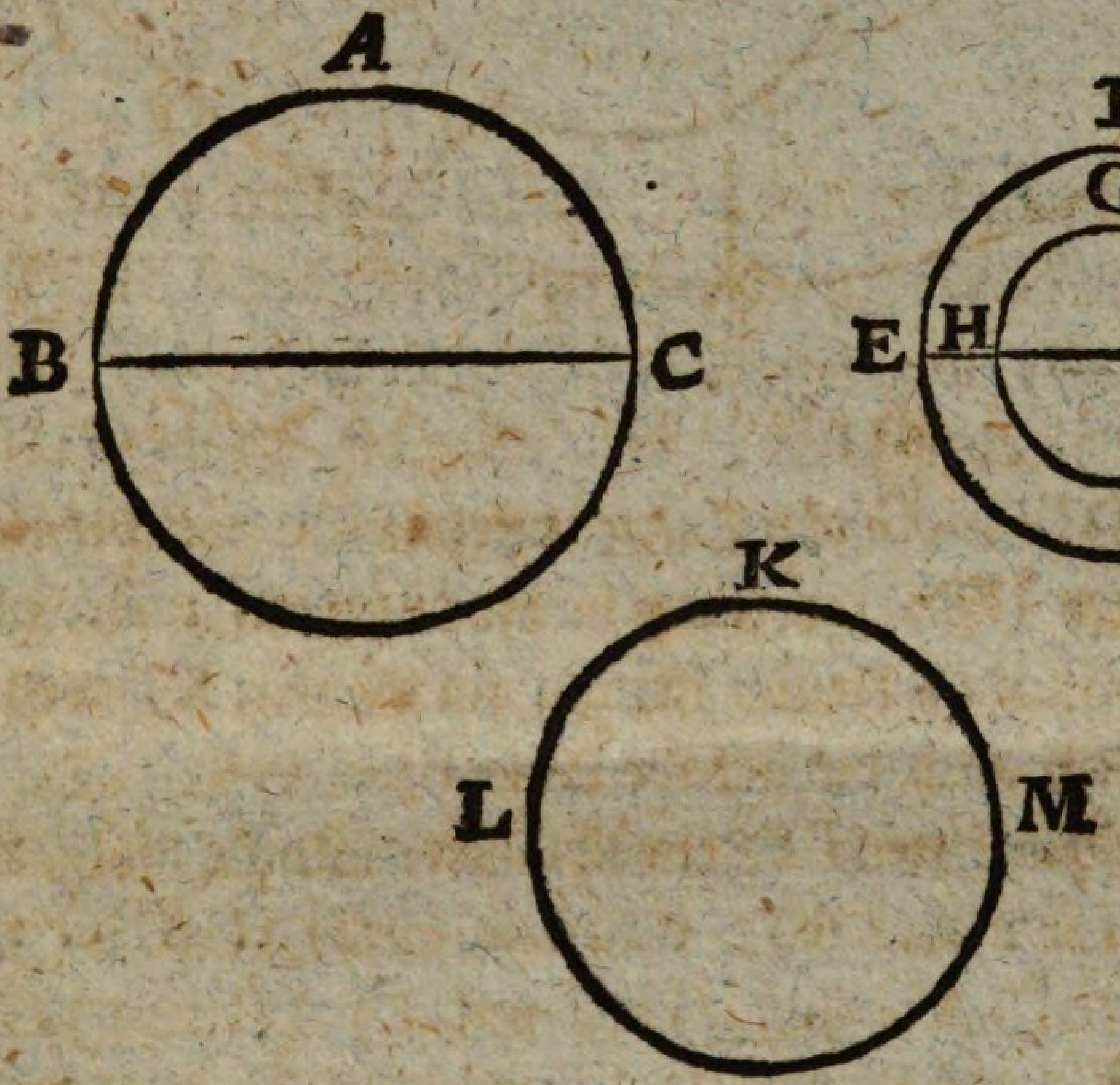
Denn, werden die Polyeder in gleich viel gleichstellige Pyramiden zerlegt: so sind diese Pyramiden ähnlich, folglich (12, 18. S.) in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten.

Folg-

Folglich ist jedes Paar gleichstelliger Pyramiden in den beyden Kugeln, A, B, in dreyfacher Verhältniß der Halbmesser, also auch der Durchmesser dieser Kugeln. Folglich verhalten sich alle Pyramiden in der Kugel A, zu allen Pyramiden in der Kugel B, wie eine Pyramide in A, zu der gleichstelligen in B. Demnach sind auch die ganzen Polyeder in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser der Kugeln.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

Kugeln, ABC, DEF, sind in dreyfacher Verhältniß ihrer Durchmesser, BC, EF.



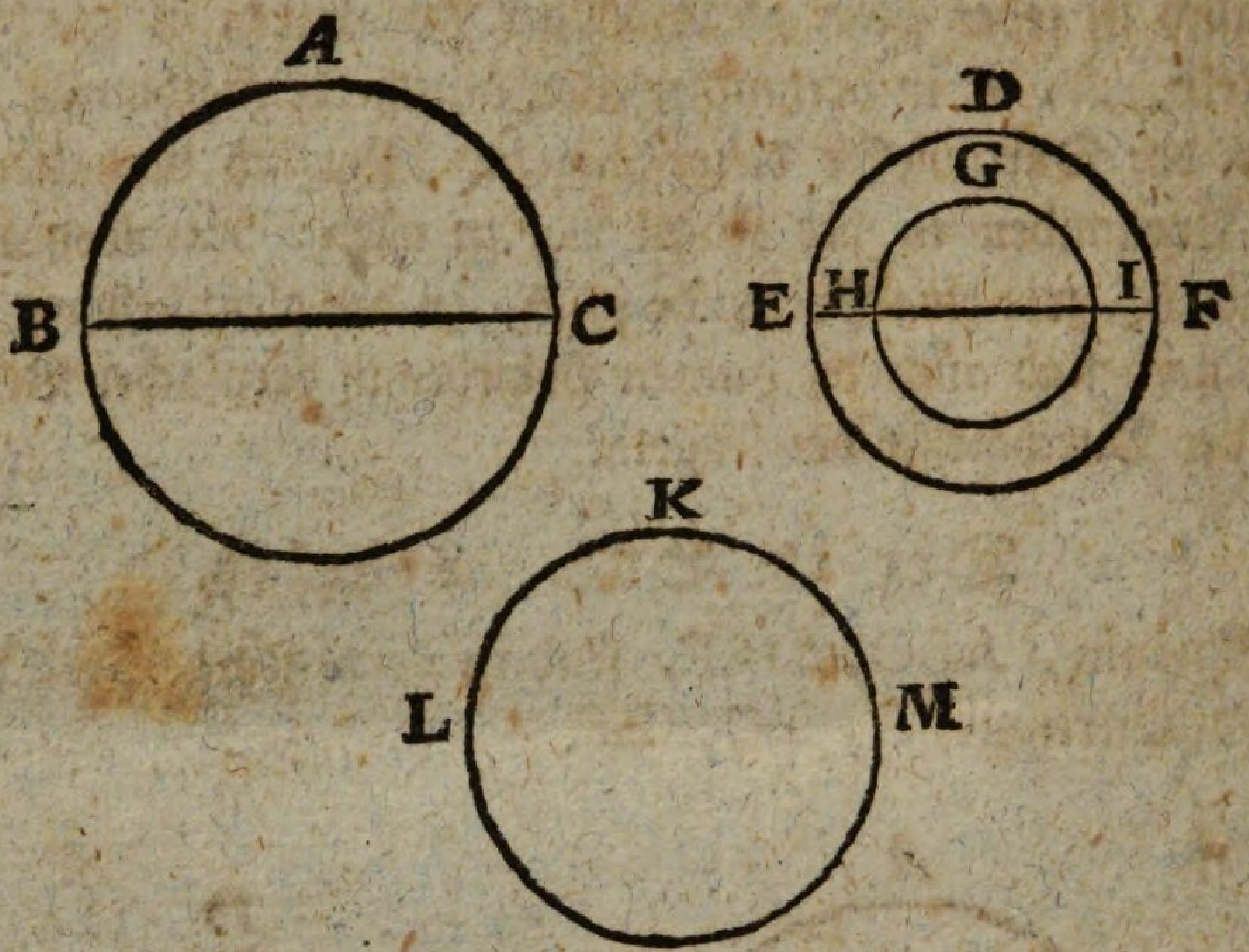
Wäre dieß nicht, so wäre 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als die Kugel DEF seyn müßte.

Erster Fall.

Es sey X < Kugel DEF.

Es sey eine mit der Kugel DEF concentrische Kugel HGI = X. Beschreibe (12, 17. S.) in die größere Kugel DEF ein Polyeder, dessen Oberfläche die kleinere HGI nicht berührt, und in ABC ein diesem ähnliches Polyeder: so ist (12, 17. Zus.) Polyeder ABC : Polyeder DEF = 3 (BC : EF).

Nun



Nun ist angenommen Kugel ABC : Kugel GHI = 3 (BC : EF). Folglich ist Kugel ABC : Kugel GHI = Polyeder ABC : Polyeder DEF; folglich, weil Kugel ABC > Polyeder ABC, auch Kugel GHI > Polyeder DEF. Da aber die Kugel GHI von dem Polyeder DEF eingeschlossen wird, so ist die Kugel GHI < Polyeder DEF, welches dem Vorigen widerspricht. Demnach ist nicht 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, wenn X < Kugel DEF ist.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch nicht Kugel DEF : Z = 3 (EF : BC) sey, wenn Z < Kugel ABC ist.

Zweyter Fall.

Es sey X > Kugel DEF, und 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X; folglich, wenn Kugel KLM = X ist, 3 (EF : BC) = Kugel KLM : Kugel ABC. Nun sey Kugel KLM : Kugel ABC = Kugel DEF : Z, wo also Kugel ABC > Z ist. Folglich ist 3 (EF : BC) = Kugel DEF : Z, welches, weil Z < Kugel ABC, nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, wenn X > Kugel DEF, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn X < Kugel DEF ist. Folglich ist 3 (BC : EF) = Kugel ABC : Kugel DEF.

STADTBIBLIOTHEK AUGSBURG

S

L. G.

Euclides

48
3

K

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euclides,

Euklid's Geometrie oder die sechs ersten Bücher der Elemente nebst dem eilften und zwölften

Halle 1818

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- LG 485
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11263718-2